FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 1

Les exercices plus difficiles ou faisant intervenir des notions avancées de théorie de la mesure sont indiqués par un astérisque.

Exercice 1. Rappeler la définition des espaces $\mathbb{L}^p := \mathbb{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $p \in [1, +\infty]$.

Exercice 2. Soit X une v.a. *positive*. En utilisant le théorème de Fubini, montrer que pour tout $r > 0$:

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbb{P}(X > x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} rx^{r-1}\mathbb{P}(X \geq x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Exercice 3.

(1) Montrer qu'une v.a. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, est dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

(2) *(lois de Pareto)* On se donne un réel $a > 0$ et X une v.a. de loi de fonction de répartition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = (1 - \frac{1}{x^a})\mathbf{1}_{x \geq 1}.$$

(a) Expliquer pourquoi F_X est bien une fonction de répartition.

(b) Indiquer, selon la valeur de a, pour quelles valeurs de $p \in [1, \infty]$, la variable X appartient à $\mathbb{L}^p$.

Exercice 4. Soit X une v.a. réelle. On définit la fonction *queue* de cette v.a. par

$$\forall x \geq 0,\ Q(x) = \mathbb{P}\left(|X| > x\right)\ .$$

On suppose dans la suite de l'exercice que $X \in \mathbb{L}^p$ pour un certain $p \geq 1$.

(1) Montrer que pour tout $k < p$, $Q(x) \underset{x\to\infty}{=} o(1/x^k)$.

*(2) (a) Montrer que pour toute fonction f positive, décroissante et intégrable sur $[0, +\infty[$, on a $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

(b) En déduire qu'on a même $Q(x) \underset{x\to\infty}{=} o(x^{-p})$.

Exercice 5.

(1) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les v.a. $\mathbb{L}^2$.
On pourra introduire la fonction polynomiale $t \in \mathbb{R} \to \mathbb{E}\left[(X + tY)^2\right]$.

*(2) Généraliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz en démontrant l'inégalité de Hölder.
On pourra utiliser la croissance, en p, des normes $\mathbb{L}^p$ pour la mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_A \frac{|X|^p}{\mathbb{E}[|X|^p]}\right].$$

Exercice 6.

(1) (Inégalité de Chernoff) Soit X une v.a. réelle. Montrer que

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq t) \leq \inf_{s\geq 0} \frac{\mathbb{E}\left[e^{sX}\right]}{e^{st}}$$

(2) (Un cas particulier de l'inégalité de Hoeffding) Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a.i.i.d. à valeurs dans $[-1, 1]$ et de moyenne nulle.

(a) Montrer que, pour tout $s \geq 0$, $\mathbb{E}\left[e^{sX_1}\right] \leq \cosh s$.
On pourra utiliser la convexité de la fonction exponentielle et remarquer que

$$X_1 = (-1) \cdot \frac{1 - X_1}{2} + 1 \cdot \frac{1 + X_1}{2}$$

(b) Montrer que, pour tout $s \geq 0$, $\cosh s \leq e^{\frac{s^2}{2}}$.
On pourra comparer les développements en série entière de ces deux fonctions.

(c) Montrer que : $\forall t > 0,\ \mathbb{P}\big(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq t\big) \leq \min_{s \geq 0} e^{\frac{ns^2}{2} - st}$

puis que : $\forall t > 0, \quad \mathbb{P}\big(\big|\sum_{i=1}^{n} X_i\big| \geq t\big) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2n}}$.

Exercice 7. *Deux lois différentes avec des moments identiques.*
On considère deux v.a.r. X et Y de densité respective :

$$\forall x > 0,\ p_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} \mathbf{1}_{x>0} \text{ et } p_Y(x) = (1 + \sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}} \mathbf{1}_{x>0}\ .$$

(1) Montrer que p_X et p_Y sont bien des densités de probabilité.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|X|^n] = \mathbb{E}[|Y|^n]$.

Exercice 8. Calculer la fonction caractéristique des lois usuelles suivantes : Bernoulli, binomiale, Poisson, géométrique, exponentielle, uniforme continue et Cauchy (* Pour cette dernière loi, on pourra passer par les fonctions holomorphes ou utiliser le théorème d'inversion).

Exercice 9. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On note Φ sa fonction caractéristique.

(1) Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $\Phi'(t) = -t\Phi(t)$. En déduire que pour $t \in \mathbb{R}$, $\Phi(t) = e^{-t^2/2}$.

(2) Calculer les moments de X.

(3) Calculer la fonction caractéristique d'une variable de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$.

Exercice 10. Utiliser les fonctions caractéristiques pour montrer que

(1) la somme de n v.a.i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in [0, 1]$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

(2) la somme de n v.a.i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$, suit la loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.

Exercice 11. *Vecteurs gaussiens.*
Soit $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On suppose de plus que $\mathbb{X}$ est un vecteur aléatoire *gaussien*, i.e.

$$\forall \mathbf{a} = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d,\ \langle \mathbf{a} | \mathbb{X} \rangle = \sum_{k=1}^{d} a_k X_k \ \text{ est une v.a. gaussienne.}$$

On note le vecteur des moyennes des X_k : $m = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])$ et la matrice de covariance :

$$\Gamma = (\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell))_{1 \leq k, \ell \leq d}\ .$$

(1) Calculer pour tout vecteur $\mathbf{a}$, l'espérance et la variance de la variable $\langle \mathbf{a} | \mathbb{X} \rangle$.

(2) Calculer la fonction caractéristique du vecteur gaussien $\mathbb{X}$. En déduire que la loi d'un vecteur gaussien est entièrement caractérisée par son vecteur moyenne et sa matrice de covariance.