FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 2
CONVERGENCES STOCHASTIQUES ET THÉORÈMES LIMITES.

Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace de probabilité sous-jacent. Les exercices plus difficiles ou faisant intervenir des notions avancées de théorie de la mesure sont indiqués par un astérisque.

1. Convergences stochastiques

Exercice 1.
Rappeler les définitions de la convergence presque sûre, de la convergence dans $\mathbb{L}^p$, de la convergence en probabilité et de la convergence en loi. Indiquer les liens entre les différents types de convergence.

Exercice 2.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui converge en loi vers une *constante* $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi en probabilité vers a.

*** Exercice 3.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une autre variable aléatoire, toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que $\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}$ est un événement.

*** Exercice 4.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et X une autre variable aléatoire, toutes définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \epsilon\right) < \infty.$$

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X.
On pourra utiliser le premier lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètres p_n dans $[0, 1]$.

(1) On suppose que $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.
   (a) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité et donner sa limite.
   (b) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également dans $\mathbb{L}^1$.

*(2) À quelle condition sur les paramètres p_n, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle $\mathbb{P}$-p.s. vers 0 ?

(3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Y_n = nX_n$. À quelle condition sur les paramètres p_n la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en probabilité vers 0 ? dans $\mathbb{L}^1$?

Exercice 6. On se donne un réel $p \geq 1$ et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant en norme $\mathbb{L}^p$ vers une v.a. X. Montrer que, pour tout $r \leq p$,

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n\|_r = \|X\|_r.$$

Exercice 7.
Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = (-1)^n X$.

(1) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi et donner sa limite.
(2) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en probabilité.

*** Exercice 8.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ convergeant en probabilité vers une v.a. X.

(1) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour la convergence en probabilité i.e.
$$\forall\epsilon>0,\ \forall\delta>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n,m\geq N,\quad \mathbb{P}(|X_n-X_m|>\epsilon)<\delta.$$

(2) On pose $n_0=1$ et pour $j\geq 1$,
$$n_j=\inf\{k>n_{j-1},\ \forall p,q\geq k,\ \mathbb{P}(|X_p-X_q|>1/2^j)<1/3^j\}.$$
Montrer que pour tout $j\in\mathbb{N}$, $n_j<\infty$.

(3) Montrer que la suite $(X_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement de Cauchy. En déduire qu'elle converge p.s. vers X.

*** Exercice 9.** Pour deux variables aléatoires X et Y définies sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, on pose
$$d(X,Y)=\mathbb{E}\left[|X-Y|\wedge 1\right].$$

(1) Montrer que d définit une distance sur l'ensemble des (classes de) variables aléatoires de $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

(2) Montrer qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers une variable X ssi
$$\lim_{n\to\infty} d(X_n,X)=0\ .$$

Exercice 10. *Il n'y a pas d'équivalent du lemme de Césaro pour la convergence en probabilité.* Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que la fonction de répartition de X_n est définie par
$$F_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\frac{1}{x+n} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$
On note de plus pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.

(1) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 en probabilité.

(2) On introduit la variable $Y_n=\max_{1\leq i\leq n} X_i$. Montrer que pour tout $x\geq 0$,
$$\mathbb{P}(Y_n\leq x)\leq\left(1-\frac{1}{x+n}\right)^n.$$

(3) En déduire que, pour tout $\epsilon>0$, $\liminf_n \mathbb{P}(\epsilon<\frac{Y_n}{n})>0$ puis que $\left(\overline{X}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité vers 0.

2. Convergence en loi

Exercice 11.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que pour $n\in\mathbb{N}^*$, X_n ait pour densité la fonction $f_n(x)=nx^{n-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$.

(1) Montrer que f_n est bien une densité de probabilité pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

(2) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la constante 1.

Exercice 12. *Dans cet exercice, on pourra utiliser les fonctions caractéristiques.*

(1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. telle que $X_n\sim\mathcal{N}(m_n,\sigma_n^2)$. On suppose que $\lim_n m_n=m\in\mathbb{R}$ et $\lim_n\sigma_n^2=\sigma^2\geq 0$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi et préciser sa limite.

*(2) Soit $\lambda>0$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de loi $\mathcal{B}(n,\lambda/n)$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 13. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$. On note $M_n = \max(U_1, U_2, ..., U_n)$.

(1) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers 1.

(2) On considère maintenant la suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = n(1 - M_n)$.

(a) Quelle est la fonction de répartition de X_n ?

(b) Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Loi des Grands Nombres

*** Exercice 14.**
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, démontrer la loi faible des grands nombres dans le cas $\mathbb{L}^2$ puis la loi forte des grands nombres dans le cas $\mathbb{L}^4$.

Exercice 15.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables réelles $\mathbb{L}^2$ i.i.d . On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1)$. Pour tout $n \geq 2$, on définit les variables aléatoires

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et } \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2.$$

(1) Calculer, pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{E}[\overline{X}_n]$, $\mathbb{V}\left[\overline{X}_n\right]$ et $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^2]$.

(2) Montrer que $(\overline{X}_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers m et que $(\hat{\sigma}_n^2)_{n\geq 2}$ converge p.s. vers σ^2.

(3) Donner une application en statistique de ce résultat.

Exercice 16. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$. Calculer la limite des variables aléatoires Z_n dans les cas suivants (on expliquera en quel sens la limite a lieu).

$$Z_n^1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Z_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \quad Z_n^3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{X_i \leq 1}$$

$$Z_n^4 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad Z_n^5 = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} e^{\sqrt{X_i}}, \quad Z_n^6 = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}}\right)^2.$$

*** Exercice 17.** *LGN et v.a. non intégrables.*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. *non intégrables.* On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

(1) (a) Montrer que $\{\overline{X}_n \text{ a une limite finie}\} \subset [\limsup\{|X_n| \geq n\}]^c$.

(b) En déduire que $\overline{X}_n$ diverge p.s.

(c) Montrer que $\overline{X}_n$ n'est pas bornée.

(2) On suppose maintenant que les X_i sont $\mathbb{P}$-p.s. positives. Montrer que $\overline{X}_n$ diverge $\mathbb{P}$-p.s. vers l'infini.

Exercice 18. *Démonstration probabiliste du théorème de Bernstein*
Étant donnée une fonction f continue sur le segment $[0,1]$, on définit, pour tout rang $n \geq 1$, la fonction polynomiale

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

(1) En introduisant, pour tout $x \in [0,1]$, une suite de v.a.i.i.d. de même loi de Bernoulli de paramètre x, $(\varepsilon_n(x))_{n\geq 1}$, et en posant $S_n(x) = \varepsilon_1(x) + \cdots + \varepsilon_n(x)$, interpréter $\mathcal{P}_n(x)$ comme une espérance.

(2) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que
$$\forall \delta > 0, \forall x \in [0,1], \forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n(x)}{n} - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

(3) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} \big|f(x) - \mathcal{P}_n(x)\big| = 0.$$

Exercice 19. Des événements d'un certain type se produisent en des temps $T_n = \sum_{k=1}^n X_k$ où les X_k sont des variables aléatoires i.i.d., $\mathbb{L}^1$ et p.s. strictement positives. On pose $T_0 = 0$. Pour tout $t \geq 0$, on note
$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N}\ ,\ T_n \leq t\}$$
le nombre d'événements qui se sont produits avant le temps t.

(1) Montrer que, $\mathbb{P}$-p.s., $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \mathbb{E}[X_1]$. En déduire que, $\mathbb{P}$-p.s., pour tout $t > 0$, $N_t < \infty$ et que $\lim_{t\to\infty} N_t = +\infty$.

(2) Montrer que $T_{N_t} \leq t \leq T_{N_t+1}$ pour tout $t \geq 0$.

(3) En déduire que, $\mathbb{P}$-p.s., $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]}$.

4. Théorème Central Limite

Exercice 20.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de variables de $\mathbb{L}^2$. On note $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}[X_1]$ (supposée >0). On définit
$$Z_n = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}\ .$$

(1) Rappeler la convergence en loi de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(2) Établir la convergence en loi de la suite de terme général $Z_{2n} - Z_n$ et donner sa limite.

(3) En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger en probabilité.

Exercice 21.

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme de n v.a.i.i.d. de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$.

(2) En utilisant le Théorème Central Limite, montrer que $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$.

Exercice 22. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$. Trouver une suite de variables aléatoires $(a_n = a_n(\overline{X}_n))_{n\geq 1}$ construites sans faire intervenir la valeur de p telles que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\overline{X}_n - p| \leq a_n) = 0.95.$$

Exercice 23. *Théorème Central Limite et formule de Stirling.*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(1) Montrer que $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ suit la loi $\Gamma(n, 1/\lambda)$ de densité
$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

(2) En étudiant la loi limite de $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$, démontrer la formule de Stirling :
$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

*** Exercice 24.** *TCL pour une somme aléatoire de v.a.*
On considère $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui diverge vers l'infini en probabilité : pour tout $M > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(N_n \geq M) = 1$.

(1) Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une autre suite, indépendante de $(N_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, de v.a. convergeant en loi vers une limite Y (toutes définies sur le même espace de probabilité). Montrer que la suite $(Y_{N_n})_{n\geq 1}$ converge également en loi vers Y.

(2) On considère maintenant une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a.i.i.d. dans $\mathbb{L}^2$ indépendante des $\{N_n\}_{n\geq 1}$ de moyenne m et de variance σ^2. On pose pour $n \geq 1$, $Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - m\right)$. Montrer que $(Z_{N_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable dont on précisera la loi.

Exercice 25. *Méthode de Monte-Carlo*

(1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées de loi de densité q sur $\mathbb{R}^d$ et f une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ bornée.

(a) Montrer, qu'avec probabilité 1,
$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^n f(X_i) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)q(x)dx.$$

(b) Est-il possible d'affaiblir l'hypothèse f bornée ?

(c) On suppose maintenant que la variance des variables $f(X_i)$ est une valeur σ_f^2 finie et on note pour tout $n \geq 1$,
$$\epsilon_n = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(X_i) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)q(x)\,\mathrm{d}\,x\right|.$$
Montrer, que pour tout $a > 0$,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\epsilon_n \leq \frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}a\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}\,x$$

(2) On rappelle que la fonction Γ est définie par
$$\forall t > 0, \quad \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}\exp(-x)dx.$$

(a) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\Gamma(t)$ est bien définie et que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

(b) Montrer qu'il existe une v.a. X telle que
$$\forall t > 0, \quad \Gamma(t) = \mathbb{E}\left[X^{t-1}\right].$$
En déduire une méthode probabiliste d'approximation de $\Gamma(t)$.

(c) Soit Y une v.a. de loi exponentielle de paramètre $1/2$. Montrer que
$$\forall t > 0, \quad \Gamma(t) = 2\mathbb{E}\left[Y^{t-1}\exp(-Y/2)\right].$$
En déduire une autre méthode probabiliste d'approximation de $\Gamma(t)$.

(d) Comparer ces deux méthodes d'approximation en utilisant le résultat de la question (1c).