FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS n° 3
GÉNÉRALITÉS SUR LES PROCESSUS STOCHASTIQUES

Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace de probabilité sous-jacent. Les astérisques devant les exercices indiquent leur difficulté : ceux sans astérisque sont des exercices essentiels qui doivent être maîtrisés, ceux comportant un astérisque sont plus difficiles et/ou font intervenir des notions avancées de théorie de la mesure.

1. Temps d'arrêt et filtration

Exercice 1.
Soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires réelles. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

(1) $X_1^2 + 2X_2$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_1, X_2, X_3)$.
(2) $X_1 + 2X_2^6 - \sin(X_3)$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_1, X_2)$.
(3) $X_1^2 + 2X_2 - e^{X_3}$ est mesurable par rapport à $\sigma(X_1, X_2^3, X_3)$.
(4) X_1 est mesurable par rapport à $\sigma(\cos(X_1))$.
(5) $\sigma(X_1^2, X_2X_1)$ est inclus dans $\sigma(X_1, X_2)$.
(6) $\sigma(X_1, X_2)$ est inclus dans $\sigma(X_1, X_2X_1)$.
(7) Toute variable aléatoire Y qui est $\sigma(X_1, X_3, X_5)$-mesurable peut s'écrire comme $Y = \varphi(X_1, X_3, X_5)$ pour une certaine fonction φ.

Exercice 2.
On considère un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $\forall n \geq 0, S_n = \sum_{k=0}^n X_k$. Les filtrations $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\mathcal{F}_n^S\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles identiques ?

Exercice 3.
Montrer qu'un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $i \leq n,\ X_i$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

Exercice 4.
On considère une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit T une v.a. à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1) T est un temps d'arrêt pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$.
(3) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{T \geq n+1\} \in \mathcal{F}_n$.

Exercice 5.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que la v.a. T constante égale à n_0 est un temps d'arrêt pour n'importe quelle filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6.
On considère un processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On se donne également un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^d$ (précisément $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$).

(1) Montrer que le temps d'atteinte de A, $T_A := \inf\{n \geq 0,\ X_n \in A\}$, est un temps d'arrêt pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Montrer que le temps de second passage dans A, $T_A^2 := \inf\{n > T_A,\ X_n \in A\}$ est également un temps d'arrêt pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3) Le temps de dernier passage dans A, $S_A := \sup\{n \geq 0,\ X_n \in A\}$, est-il un temps d'arrêt pour cette filtration ?

Exercice 7.
Soit T_1 et T_2 deux temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Montrer que $\min(T_1, T_2)$ est encore un temps d'arrêt pour cette filtration. La variable aléatoire $\max(T_1, T_2)$ est-elle également un temps d'arrêt ?

(2) Les variables aléatoires $T_1 + 1$ et $T_1 - 1$ sont-elles des temps d'arrêt ?

(3) La variable aléatoire $T_1 + T_2$ est-elle un temps d'arrêt ?

*** Exercice 8.** *Loi binomiale négative.*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0,1[$. On définit $T_1 = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 1\}$, et récursivement pour $k \in \mathbb{N}^*$, $T_{k+1} = \inf\{n > T_k,\ X_n = 1\}$, avec la convention que $\inf \varnothing = \infty$.

(1) Montrer que les T_k sont des temps d'arrêt pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k \leq n$,
$$\sum_{\ell=k}^{n} \binom{\ell}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{et que} \quad \forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k est $\mathbb{P}$-p.s. finie et suit la loi de Pascal $\mathcal{P}(k,p)$ (ou loi binomiale négative) i.e. :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(T_k = n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$
avec la convention $\binom{n}{\ell} = 0$ pour $\ell > n$.

(3) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{E}[T_k] = \frac{k}{p}$. Que vaut X_{T_k} ?

(4) On pose $T_0 = 0$. Montrer que les v.a. $\tau_k = T_k - T_{k-1}$, $k \geq 1$, forment une famille de v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$.

Exercice 9. *Identité de Wald.*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. et T un temps d'arrêt adapté à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que les espérances $\mathbb{E}[|X_1|]$ et $\mathbb{E}[T]$ sont finies.

(1) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{T} X_k = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbf{1}_{T\geq k}\ .$$

(2) Montrer que $\mathbb{E}[T] = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(T \geq k)$.

(3) En déduire que $\sum_{k=1}^{T} X_k$ est intégrable et que $\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} X_k\right] = \mathbb{E}[T]\,\mathbb{E}[X_1]$.

Exercice 10.
Dans cet exercice, on considère qu'à chaque naissance, un couple a la même chance d'obtenir un garçon ou une fille. On suppose de plus que toutes les naissances sont indépendantes et on néglige les naissances de jumeaux, triplés, etc. (Le résultat resterait néanmoins inchangé).

(1) Un état phallocrate décide d'appliquer un contrôle des naissances pour réguler la population de filles. Un premier choix du gouvernement est d'obliger les familles à procréer jusqu'à avoir un garçon et ensuite de leur interdire d'avoir d'autres enfants. En utilisant un modèle probabiliste adéquat, calculer le nombre moyen de filles et de garçons par famille.

(2) En utilisant le résultat de l'exercice 9, montrer qu'il est impossible, dans notre modèle, de réguler le nombre de filles en choisissant d'autoriser ou non les parents à procréer selon le sexe des enfants qu'ils ont déjà eus.

*** Exercice 11.** *Pyramide de D'Alembert.*
Un joueur espère gagner à la roulette en utilisant la stratégie suivante. Il commence en misant un euro sur le rouge et, à chaque partie, il rejoue rouge en doublant sa mise.
La probabilité de gagner à chaque partie est $p = 18/37$ (cette probabilité n'est pas $1/2$ suite à la présence du 0 qui n'est ni rouge, ni noir) et, si il gagne une partie, le joueur récupère 2 fois la mise, soit un gain net égal à la mise déposée. On note X_i la variable qui vaut 1 si le joueur gagne à la i^e partie et 0 sinon et on fait l'hypothèse (raisonnable !) que les v.a. X_i sont indépendantes. Finalement, on note G_n le gain net (positif ou négatif) après la n^e partie partant de $G_0 = 0$.

(1) On suppose tout d'abord que le joueur peut miser autant d'argent que nécessaire et qu'il arrête de jouer dès qu'il gagne. On appelle alors T le nombre de parties effectuées avant de gagner. Quelle est la loi de T ? En déduire que T est $\mathbb{P}$-p.s. fini puis montrer que T est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Est-ce une temps d'arrêt pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^G\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \sum_{i=1}^n 2^{i-1}(2X_i - 1)$. Que vaut G_T ?

(3) On suppose maintenant que le joueur dispose d'une fortune initiale de $2^M - 1$ euros (pour un $M \in \mathbb{N}$) et qu'il arrête de jouer s'il gagne ou s'il n'a plus d'argent. On note T' le moment où le joueur s'arrête.

   (a) Exprimer T' en fonction de T et de M. Le temps T' est-il un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$? à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^G\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

   (b) Calculer $\mathbb{E}[G_{T'}]$. Commenter.

2. Espérance conditionnelle

Exercice 12.

(1) Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $Z = \mathbf{1}_{\{X+Y=2\}}$. Calculer $\mathbb{E}[X|Z]$ et $\mathbb{E}[Y|Z]$. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

(2) On considère deux v.a. X et Y indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}[X|X+Y]$ après avoir justifier l'existence de cette v.a.

Exercice 13.
Soient X, Y, Z des variables aléatoires réelles telles que les couples (X, Z) et (Y, Z) aient la même loi. Montrer que pour toute fonction f telle que $f(X) \in \mathbb{L}^1$, $\mathbb{E}[f(X)|Z] = \mathbb{E}[f(Y)|Z]$, $\mathbb{P}$-p.s.

*** Exercice 14.** Soit X, Y, Z trois variables aléatoires telles que le couple (X, Y) est indépendant de Z. On suppose que $X \in \mathbb{L}^1$, montrer $\mathbb{E}[X|Y, Z] = \mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 15.
Une usine produit n lampes. Chaque lampe est défectueuse avec probabilité p. On teste chaque lampe pour détecter un éventuel défaut et on suppose que la probabilité de détecter le défaut quand il est présent est δ (et 0 quand il n'est pas présent). Soit pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $X_i = 1$ (resp. $Y_i = 1$) si lampe i est défectueuse (resp. si le test déclare la lampe défectueuse). On suppose que les couples (X_i, Y_i) sont indépendants entre eux et on note X le nombre d'ampoules défectueuses et Y le nombre d'ampoules détectées comme défectueuses.

(1) Donner la loi de X.

(2) Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $a, b \in \{0, 1\}$, donner les valeurs de $\mathbb{P}(Y_i = b | X_i = a)$ et en déduire les valeurs de $\mathbb{P}(X_i = a | Y_i = b)$.

(3) Exprimer la variable aléatoire $\mathbb{E}[X_i | Y_i]$ comme une fonction explicite de Y_i.

(4) Expliquer pourquoi pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{E}[X_i | Y_1, \ldots, Y_n] = \mathbb{E}[X_i | Y_i]$.

(5) En déduire la variable aléatoire $\mathbb{E}[X | Y_1, \ldots, Y_n]$ puis $\mathbb{E}[X | Y]$.

(6) Supposons que $n = 1000$, $p = 0,01$, $\delta = 0,9$. On détecte 54 ampoules défectueuses via le test. À combien d'ampoules réellement défectueuses doit-on s'attendre en moyenne ?

Exercice 16. *Somme de v.a. indépendantes.*
Soient X_1, ..., X_n une suite de v.a.i.i.d intégrables. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

(1) Calculer $\mathbb{E}[S_n | X_i]$ et $\mathbb{E}[X_i | S_n]$ pour $1 \leq i \leq n$.

(2) Calculer pour $n \geq 1$:
   (a) $\mathbb{E}\left[S_{n+1} | \mathcal{F}_n^X\right]$.
   (b) $\mathbb{E}\left[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n^X\right]$ avec l'hypothèse $X_1 \in \mathbb{L}^2$.
   (c) $\mathbb{E}\left[e^{S_{n+1}} | \mathcal{F}_n^X\right]$ avec l'hypothèse $e^{X_1} \in \mathbb{L}^1$.

Exercice 17.
On considère une v.a. N intégrable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de v.a.i.i.d également intégrables et indépendantes de N. On définit alors la variable aléatoire : $S = \sum_{k=1}^N X_k$.

(1) Montrer que $S \in \mathbb{L}^1$ et calculer $\mathbb{E}[S | N]$. *On pourra remarquer que* $S = \sum_{k=1}^\infty X_k \mathbf{1}_{N \geq k}$.

(2) Dans un casino, une personne décide de jouer sur rouge/noir à la roulette (probabilité $p = 18/37$ de gagner en raison du zéro) en s'imposant la règle suivante : au moment où elle arrivera devant la table de jeu, elle regardera sa montre et jouera autant de fois à la roulette que le nombre de minutes passées depuis la dernière heure pleine. À chaque partie, elle misera 1 euro (elle peut donc soit gagner 1 euro ou perdre 1 euro à chaque partie).
Proposer une modélisation probabiliste de ce jeu et calculer l'espérance de gain du joueur sachant le nombre de parties effectuées.

Exercice 18.
On considère Y une variable $\mathbb{L}^2$ et $\mathcal{B}$ une tribu. On définit la *variance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{B}$* par
$$\mathbb{V}[Y | \mathcal{B}] = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y | \mathcal{B}])^2 | \mathcal{B}\right].$$

(1) Montrer que la variable aléatoire $\mathbb{V}[Y | \mathcal{B}]$ est une variable aléatoire p.s. positive ou nulle vérifiant :
$$\mathbb{V}[Y | \mathcal{B}] = \mathbb{E}\left[Y^2 | \mathcal{B}\right] - (\mathbb{E}[Y | \mathcal{B}])^2.$$

(2) Montrer que $\mathbb{E}[\mathbb{V}[Y | \mathcal{B}]] = \mathbb{V}[Y] - \mathbb{V}[\mathbb{E}[Y | \mathcal{B}]]$.

(3) On suppose dans cette question que $Y = 3X + Z$ où $X \in \mathbb{L}^2$ et Z est une v.a. indépendante de X de loi $\mathcal{B}(1/3)$. Calculer $\mathbb{V}[Y | X]$.

Exercice 19.
Un processus ARCH(1) [1] est un processus à temps discret $(X_n)_{n \geq 0}$ très utilisé dans les modélisations de séries temporelles financières (X_n est le prix de l'actif au temps n). Il est défini par une relation de la forme
$$X_n = \varepsilon_n \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2}$$
où $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ sont deux paramètres fixés et $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées de variance 1 indépendantes de X_0.

1. pour "AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity"

(1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}\left[X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^X\right] = 0$.

(2) On pose pour tout $n \geq 1$, $Y_n^2 = \mathbb{V}\left[X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^X\right]$ (la variance conditionnelle étant définie dans l'exercice 18). Montrer que

$$Y_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2.$$

(3) En déduire le comportement de $\mathbb{V}[X_n]$ quand n tend vers l'infini selon les valeurs de α_0 et α_1.

(4) Expliquer pourquoi ce modèle est intéressant en finance pour modéliser le comportement de la volatilité dans les marchés financiers.

* **Exercice 20.** On considère X un vecteur aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, U une v.a. indépendante de $\mathcal{B}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et f une fonction borélienne $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ satisfaisant $f(X,U) \in \mathbb{L}^1$. On va montrer que

$$\mathbb{E}[f(X,U)|\mathcal{B}] = \int_{\mathbb{R}^d} f(X,u)\mathbb{P}_U(\mathrm{d}u).$$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,u)\mathbb{P}_U(\mathrm{d}u).$$

(1) Montrer que $g(X)$ est une v.a. $\sigma(X)$-mesurable et dans $\mathbb{L}^1$.

(2) Soit $B \in \mathcal{B}$. Montrer que $\mathbb{E}[g(X)\mathbf{1}_B] = \mathbb{E}[f(X,U)\mathbf{1}_B]$. *On pourra remarquer que, par indépendance de $\mathcal{B}$ et de $\sigma(U)$, on a $\mathbb{P}_{(U,X,\mathbf{1}_B)} = \mathbb{P}_U \times \mathbb{P}_{(X,\mathbf{1}_B)}$*

(3) Conclure.

Exercice 21.
Calculer pour U et Y deux v.a. indépendantes :

(1) $\mathbb{E}[\min(Y,U)|Y]$ si U suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$ et $Y \in \mathbb{L}^1$.

(2) $\mathbb{E}\left[|Y-U| \,\middle|\, Y\right]$ si U suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et $Y \in \mathbb{L}^1$.

(3) $\mathbb{E}[\cos(YU)|Y]$ si U suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.