FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS N° 4
CHAÎNES DE MARKOV.

Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace de probabilité sous-jacent. Les exercices plus difficiles ou faisant intervenir des notions avancées de théorie de la mesure sont indiqués par un astérisque.

Exercice 1.

(1) Montrer qu'une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans un espace E dénombrable est une chaîne de Markov.

(2) Soit X et Y deux chaînes de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le processus

$$(Z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

est-il nécessairement une chaîne de Markov ?

(3) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (X_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P^k.

1. Exemples de chaînes de Markov à espace d'états fini

Exercice 2.
Compléter les matrices suivantes pour en faire des matrices de transition d'une chaîne de Markov homogène puis représenter chaque processus par un graphe.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & \cdot \\ 1/2 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & \cdot & \cdot \\ 1/2 & 0 & \cdot & 1/8 \\ 1/3 & \cdot & 0 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.
Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $]0,1[$ et $p \in [0,1]$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ la suite de v.a. définie par :

$$X_0 = 0 \quad \text{et} \quad X_{n+1} = X_n \mathbf{1}_{\{U_{n+1}<p\}} + (1 - X_n)\mathbf{1}_{\{U_{n+1}\geq p\}} \ .$$

Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov d'état initial 0 et de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. *Les urnes d'Ehrenfest.*
On considère un système de N particules qui peuvent se trouver soit dans un compartiment A soit dans un compartiment B. À chaque instant n, on choisit, de manière équiprobable, une particule parmi les N et cette particule est alors transférée du compartiment où elle se trouve dans l'autre. On note X_n le nombre de particules dans A à l'instant n.

(1) Expliquer pourquoi cette expérience peut être modélisée par une chaîne de Markov. Donner sa matrice de transition P. Donner P explicitement pour $N = 3$.

(2) On suppose dans cette question que X_0 suit la loi $\mathcal{B}(N, 1/2)$. Donner la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.
Des étudiants décident de tricher à un examen dans lequel on leur demande de répondre par *oui* ou par *non* à une question. Ils sont assis sur une même rangée dans un amphithéâtre et seul le premier de la rangée sait que la bonne réponse est *oui*. Il transmet une réponse à son voisin de droite qui lui-même en transmet une à son voisin de droite et ainsi de suite. Mais, facétieux, les étudiants ne transmettent la réponse qu'ils ont reçue qu'avec une probabilité $1-\alpha$, ($\alpha \in]0,1[$) ; sinon ils transmettent la réponse contraire.

(1) Modéliser le problème par une chaîne de Markov.

(2) Calculer la probabilité que le $n^{\text{ème}}$ étudiant de la rangée reçoive la bonne réponse.

Exercice 6.
On lance un dé parfaitement équilibré. On note le résultat s'il s'agit du premier lancer ou si ce résultat est différent du précédent. On appelle X_n le $n^{\text{ème}}$ résultat noté.

(1) Modéliser l'expérience par une chaîne de Markov homogène dont on précisera la matrice de transition.

(2) Quelle est la probabilité que le $n^{\text{ème}}$ résultat noté soit 6 ?

— si on sait qu'on a obtenu 6 au premier lancer ?

— si on ne dispose d'aucune information sur le premier lancer ?

*(3) On note maintenant le résultat du lancer de dé si il est différent de 1 plus le résultat précédent (modulo 6). En utilisant la question précédente, calculer la probabilité que le $n^{\text{ème}}$ résultat noté soit 6 sachant qu'on a obtenu 6 au premier lancer.

2. Propriété de Markov

*** Exercice 7.** *Jeu de pile ou face.*
Un joueur A joue une suite de parties de pile ou face indépendantes contre un joueur B : si la pièce tombe sur pile, B donne 1 euro à A sinon c'est le joueur A qui donne 1 euro au joueur B. On ne sait pas si la pièce est truquée ou non et on note $p \in [0,1]$ la probabilité d'obtenir pile et $q = 1-p$ la probabilité d'obtenir face. Le joueur A commence la partie avec k euros et le joueur B avec $N-k$ euros. Le jeu s'arrête lorsqu'un des deux joueurs n'a plus d'argent. On note X_n la fortune de A après n lancers. (On pose $X_n = 0$ à partir du moment où A est ruiné et $X_n = N$ à partir du moment où B est ruiné).

(1) Modéliser le problème par une chaîne de Markov. Donner l'espace d'états associé et la matrice de transition.

(2) On note $T_A := \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = 0\}$, $T_B := \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = N\}$ et
$$\forall k \in \{0, \cdots, N\},\ h_k := \mathbb{P}_k(T_A \leq T_B) = \mathbb{P}(T_A \leq T_B | X_0 = k)\ .$$
Montrer que $(h_k)_{x\in\{0,\cdots,N\}}$ est solution du système :
$$h_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k = N, \\ ph_{k+1} + (1-p)h_{k-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(3) En déduire la valeur de $\mathbb{P}_k(T_A \leq T_B)$ pour tout $k \in \{0, \cdots, N\}$.
Application numérique : calculer $\mathbb{P}_k(T_A \leq T_B)$ pour $k = 1$ et $N = 10$ et $p \in \{1/2, 1/3, 2/3\}$.

(4) On suppose maintenant que le joueur B est beaucoup plus riche que le joueur A ie $N \to \infty$ alors que k reste fixe. Étudier le comportement de $\mathbb{P}_k(T_A \leq T_B)$ selon la valeur de p dans ce cas.

*** Exercice 8.** *Temps d'atteinte.*
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace E fini ou dénombrable. On note $P = (p_{xy})_{x,y\in E}$ la matrice de transition de X. Pour A sous-ensemble de E, on définit $T_A := \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n \in A\}$ le *temps d'atteinte* de l'ensemble A.

(1) On note pour $x \in E$, $h_x := \mathbb{P}_x(T_A < \infty) = \mathbb{P}(T_A < \infty | X_0 = x)$. Montrer que, pour tout $x \in E$,
$$h_x = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ \sum_{y\in E} p_{xy} h_y & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

(2) Montrer que si $S = (s_x)_{x\in E}$ est une solution positive du système précédent, alors pour tout $x \in E$, $h_x \leq s_x$.

*** Exercice 9.**
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}$ telle que les probabilités de transition (p_{ij}) vérifient :
$$p_{0,1} = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}^*,\ p_{i,i-1} = 1 - p_{i,i+1} = \frac{i^2}{i^2 + (i+1)^2}.$$
On cherche la probabilité que partant de 1, on n'atteigne jamais la valeur 0.
On note ainsi $T_0 := \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = 0\}$ le temps d'atteinte de 0 et, comme dans l'exercice précédent, on pose $h_i = \mathbb{P}_i(T_0 < \infty)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

(1) Indiquer les classes de communication de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ?

(2) Montrer que h est la plus petite solution positive du système :
$$\begin{cases} s_0 = 1 \\ \forall i \geq 1,\ s_i = p_{i,i-1}s_{i-1} + p_{i,i+1}s_{i+1} \end{cases} \tag{1}$$
(On pourra utiliser le résultat de l'exercice 8.)

(3) (a) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une solution du système (1). Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $r_i := s_{i+1} - s_i$ Montrer que $p_{i,i+1}r_i = p_{i,i-1}r_{i-1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

(b) En déduire qu'une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de (1) ssi il existe $c \in \mathbb{R}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 1 - c\sum_{i=1}^{n} i^{-2}$.

(4) Montrer que $\mathbb{P}_1(T_0 < \infty) = 1 - \frac{6}{\pi^2}$. La chaîne de Markov X est-elle récurrente ?
(*On rappelle que* $\sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$)

(5) Étudier, selon les valeurs de $\alpha \in [0, \infty[$, la récurrence de la chaîne de Markov ayant pour probabilités de transition :
$$p_{01} = 1 \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}^*, p_{ii-1} = 1 - p_{ii+1} = \frac{i^\alpha}{i^\alpha + (i+1)^\alpha}.$$

Exercice 10. *Temps de retour en un point.*
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à valeurs dans un espace E fini ou dénombrable et x_0 un point de E. On pose :
$$T_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ T_{k+1} = \min\{n > T_k\ ,\ X_n = x_0\}$$
avec la convention que $\min\emptyset = \infty$.

(1) Montrer que pour tout $x \in E$, tout $l \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}_x(T_{k+1} - T_k = l, T_k < \infty) = \mathbb{P}_{x_0}(T_1 = l)\,\mathbb{P}_x(T_k < \infty)\ .$$

(2) En déduire que pour tout $x \in E$ et tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}_x(T_{k+1} < \infty) = \mathbb{P}_{x_0}(T_1 < \infty)^k\,\mathbb{P}_x(T_1 < \infty)\ .$$

(3) Soit $x \in E$. On suppose que $\mathbb{P}_x(T_1 < +\infty) = \mathbb{P}_{x_0}(T_1 < +\infty) = 1$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{E}_x[T_{k+1}] = k\mathbb{E}_{x_0}[T_1] + \mathbb{E}_x[T_1]$$

3. Classes de communication, Récurrence, Transience

Exercice 11.
Indiquer quelles matrices parmi les matrices suivantes sont des matrices de transition. Donner alors leurs classes de communication et la nature de chaque classe (récurrente ou transitoire).

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 5/12 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 5/12 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/6 & 1/2 & 1/12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 12.
Donner les classes de communication des chaînes de Markov apparaissant dans les différents exercices des sections précédentes.

Exercice 13. *Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$.*
On se donne une suite de v.a.i.i.d $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que
$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1) = p \in]0,1[$$
et on définit la marche aléatoire issue de $x \in \mathbb{Z}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par $S_0 = x$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$.

(1) Montrer que le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible.

(2) Calculer $\mathbb{P}_0(S_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) En déduire que 0 est un état récurrent pour le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ssi $p = 1/2$. Les autres entiers sont-ils également récurrents ?

Exercice 14.
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace d'état E *fini*. On se fixe un état $x \in E$ arbitraire et, pour tout $y \in E$, on note N_y le nombre de passages en y : $N_y = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{1}_{X_n=y}$.

(1) Montrer que pour tout $y \in E$, si y est transitoire, $\mathbb{P}_x(N_y = \infty) = 0$.

(2) On se fixe $x \in E$. Montrer que $\mathbb{P}_x(\exists y \in E, N_y = \infty) = 1$.

(3) En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une classe de communication récurrente.

(4) Ce résultat est-il encore vrai si l'espace d'états E n'est plus supposé fini ?

Exercice 15. *Marche aléatoire simple sur un arbre régulier.*
On considère un arbre régulier T où chaque noeud possède $b > 1$ enfants. On définit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche simple sur T comme la chaîne de Markov vérifiant la propriété suivante : si X_n est en un noeud x, alors la marche saute sur un des voisins de x de manière équiprobable.
Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible transitoire.

*** Exercice 16.** *Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$.*
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On dit que $x, y \in \mathbb{Z}^d$ sont voisins si $\|x - y\| = 1$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$, et on écrit alors $x \sim y$.
On considère la chaîne de Markov $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ telle que
$$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbb{P}(S_{n+1} = y | S_n = x) = \frac{1}{2d}\mathbf{1}_{x\sim y}.$$

(1) Montrer que le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov irréductible.

(2) On suppose que $d = 2$.

(a) *Identité de Vandermonde.* Montrer que pour tout entier p, q,r,

$$\sum_{m=0}^{r} \binom{p}{m}\binom{q}{r-m} = \binom{p+q}{r}^2.$$

On pourra considérer deux ensembles P et Q disjoints à respectivement p et q éléments et exprimer de deux manières différentes le nombre de sous-ensembles à r éléments de $P \cup Q$.

(b) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \leq m$, $\mathbb{P}_0(\{S_{2n} = 0\} \cap A_{2n,2m})$ où

$A_{2n,2m} := \{$Parmi les $2n$ premiers pas de la marche, exactement $2m$ sont des déplacements horizontaux$\}$.

En déduire que

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^{2n}}\binom{2n}{n}$$

(c) En déduire que la marche simple dans $\mathbb{Z}^2$ est récurrente.

(3) On suppose maintenant que $d = 3$.

(a) Démontrer la formule du multinôme de Newton :

$$\forall (d,n) \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1,\dots,x_d),\ \left(\sum_{k=1}^{d} x_k\right)^n = \sum_{n_1+\dots+n_d=n} \frac{n!}{n_1!\cdots n_d!}\prod_{k=1}^{d} x_k^{n_k}.$$

(b) Montrer, en utilisant la même démarche que dans la question (2) que

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\sum_{n_1+\dots+n_d=n}\left(\frac{n!}{n_1!\cdots n_d!}\frac{1}{d^n}\right)^2.$$

(c) Montrer que

$$\mathbb{P}_0(S_{2n} = 0) = O\left(\frac{m_n}{d^n\sqrt{n}}\right).$$

où

$$m_n = \max_{n_1+\dots+n_d=qd} \frac{n!}{n_1!\cdots n_d!}$$

(d) Montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$m_{qd} = \frac{(qd)!}{(q!)^d}.$$

(e) Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{m_n}{d^n\sqrt{n}} \leq \sum_{q\geq 0} \frac{d m_{qd}}{d^{qd}\sqrt{q}}.$$

(f) En déduire que la marche simple dans $\mathbb{Z}^3$ est transiente.

Exercice 17. *Longueur d'une suite de succès.*
On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont les probabilités de transition sont définies par la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = x) = p_x \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = x+1 | X_n = x) = 1 - p_x$$

où la suite $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]0,1[$

(1) Tracer le graphe associé à la chaîne de Markov et montrer qu'elle est irréductible.

(2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$ pour que la chaîne soit récurrente.

Exercice 18. *File d'attente.*
On étudie l'évolution d'une file d'attente à un guichet. On suppose qu'un client est servi par unité de temps. On note N_n le nombre de clients arrivant dans la $n^{\text{ième}}$ unité de temps. On suppose que les N_n sont des v.a.i.i.d. et qu'un client arrivant à la période n ne peut pas être servi avant la période $n+1$. Finalement, on note X_n le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant n et on suppose que $X_0 = 0$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = N_{n+1} + X_n - \mathbf{1}_{X_n \geq 1}$. En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(2) Montrer que, $\mathbb{P}$-p.s, pour tout $n \geq 1$, $X_n \geq \sum_{k=1}^{n} N_k - n$. En déduire que si $\mathbb{E}[N_1] > 1$ alors X_n tend vers $+\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. et que 0 est un état transient.

(3) On note maintenant $T_0^1 = \min\{n \geq 1,\ X_n = 0\}$ le temps de retour en 0.

  (a) Montrer que si $T_0^1 = \infty$, alors pour tout $n \geq 1$, $X_n = \sum_{k=1}^{n} N_k - (n-1)$.

  (b) En déduire que si $\mathbb{E}[N_1] < 1$ alors 0 est un état récurrent.

4. Loi stationnaire

Exercice 19.
On considère la matrice P suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Montrer que P est une matrice de transition. Donner ses classes de communication et leur nature. Donner la probabilité invariante de la chaîne de Markov associée.

Exercice 20.
Un jeu de plateau comprend $M \geq 6$ cases numérotées de 0 à $M-1$. Au départ, le joueur place son pion sur la case 0 et à chaque tour, il lance un dé et avance son pion d'un nombre de cases correspondant au résultat du lancer (après la case $M-1$, le pion retourne à la case 0). Les lancers successifs sont supposés indépendants. On note S_n le numéro de case où se trouve le pion du joueur à l'issue du n-ième lancer.

(1) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène à valeurs dans $\{0, \ldots, M-1\}$. et donner sa matrice de transition.

(2) Classifier les états de la chaîne de Markov. La chaîne admet-elle une probabilité stationnaire ? La chaîne est-elle apériodique ?

(3) Vérifier que la matrice P est *bistochastique*, c'est-à-dire que pour tout $y \in \{0, \ldots, M-1\}$, $\sum_{x=0}^{M-1} P(x,y) = 1$. Montrer que la matrice P^n est également bistochastique.

(4) Calculer la probabilité stationnaire de la chaîne. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_0(S_n = 0)$?

Exercice 21.

(1) Soit $p \in]0,1[$ et $-\infty < a \leq b < \infty$. Après avoir justifié son existence et son unicité, donner la probabilité invariante associée à la marche simple $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\{a, \ldots, b\}$ avec réflexion partielle en a et en b :

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = a+1 | S_n = a) = p, \mathbb{P}(S_{n+1} = a | S_n = a) = 1-p$$
$$\text{et } \mathbb{P}(S_{n+1} = b-1 | S_n = b) = 1-p,\ \mathbb{P}(S_{n+1} = b | S_n = b) = p.$$

(2) La marche simple de paramètre $p \in]0,1[$ sur $\mathbb{Z}$ admet-elle une probabilité invariante pour certaines valeurs de p ? Si oui, lesquelles ?

(3) On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la marche simple sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p \in]0,1[$ avec réflexion partielle en 0 :

$$\mathbb{P}\left(S_{n+1}=1|S_n=0\right)=p, \mathbb{P}\left(S_{n+1}=0|S_n=0\right)=1-p.$$

La chaîne de Markov $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une probabilité invariante pour certaine valeur de p ? Si oui, lesquelles ?

*** Exercice 22.**
Un professeur distrait possède N parapluies. Il part à son bureau chaque matin et rentre chaque soir chez lui. Si il pleut quand il quitte un lieu, il emporte un parapluie si il en a un à sa disposition. Si il ne pleut pas, il laisse les parapluies sur place. On suppose qu'à chaque déplacement, la probabilité qu'il pleuve est $p \in]0,1[$ et cela indépendamment du temps lors des autres déplacements.

(1) Modéliser le nombre de parapluies à la disposition du professeur à chacun de ses déplacements par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont on précisera les transitions.

(2) On note p_n la proportion des n premiers voyages où le professeur est obligé de voyager sans parapluie. Donner la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 23. *Les urnes d'Ehrenfest (2).* On se place dans le cadre de l'exercice 4.

(1) Montrer que la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique probabilité invariante qu'on explicitera.

(2) On suppose N pair. Comparer l'espérance du temps de retour en 0 et en $N/2$.

Exercice 24. *Retour à l'état initial.*
On considère une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n\geq 0}$ irréductible récurrente positive. On note τ le temps de retour à l'état initial : $\tau = \inf\left\{n \geq 1,\ X_n = X_0\right\}$.
Calculer l'espérance de τ lorsque la chaîne de Markov a pour distribution initiale sa loi invariante. Est-ce en contradiction avec l'hypothèse de récurrence positive ?

Exercice 25.

(1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P sur un ensemble E. On dit qu'une loi de probabilité π sur E est réversible pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si

$$\forall (i,j) \in E, \quad \pi_i P(i,j) = \pi_j P(j,i)\ .$$

On suppose dans la suite de la question que la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une mesure de probabilité réversible π.

(a) Montrer que pour tout $(i_0,\ldots,i_n) \in E^{n+1}$,

$$\mathbb{P}_\pi\left(X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n\right)=\mathbb{P}_\pi\left(X_0=i_n,\ldots,X_n=i_0\right).$$

(b) Montrer que π est une mesure de probabilité invariante pour la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) On considère un ensemble fini E et une application c de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ symétrique. Si $c(x,y) > 0$, on dit que x et y sont voisins et on note $x \sim y$. On pose $c(x) = \sum_{y\sim x} c(x,y)$ et $C = \sum_{x\in E} c(x)$, on suppose que $c(x) > 0$ pour tout $x \in E$. On considère alors la matrice $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$ définie par pour tout $x, y \in E$, $p(x,y) = c(x,y)/c(x)$.

(a) Montrer que P est une matrice de transition.

(b) Montrer que P admet une probabilité réversible π. Cette probabilité est-elle nécessairement unique ?

(c) On prend le cas particulier : $E = \{1,2,3,4\}$ et les seules valeurs non nulles de c sont $c(1,2) = c(2,3) = 1$ et $c(3,4) = c(4,1) = 2$. Donner les probabilités réversibles dans ce cas.