# FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS n° 5
# MARTINGALES

*Dans tous les exercices, le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne l'espace de probabilité sous-jacent. Les exercices plus difficiles ou faisant intervenir des notions avancées de théorie de la mesure sont indiqués par un astérisque.*

## 1. Généralités sur les martingales

**Exercice 1.** Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale pour une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une martingale pour sa filtration naturelle $\left(\mathcal{F}_n^M\right)_{n\in\mathbb{N}} = (\sigma(M_0, M_1, \dots, M_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Il suffit de vérifier les différents points de la définition. La v.a. $M_n$ étant $\mathcal{F}_n^M$-mesurable et dans $\mathbb{L}^1$ par hypothèse, il reste à calculer $\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}^M\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, comme les v.a. $M_0, \dots, M_n$ sont $\mathcal{F}_n$-mesurables, on a l'inclusion $\mathcal{F}_n^M \subset \mathcal{F}_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$\mathbb{E}\Big[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^M\Big] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \mid \mathcal{F}_n^M\Big] = \mathbb{E}\Big[M_n \mid \mathcal{F}_n^M\Big] = M_n$$

**Exercice 2.** Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. On considère $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale et $T$ un temps d'arrêt associés à cette filtration. Montrer que le processus arrêté $(M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une martingale pour cette filtration.
*On pourra remarquer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 = \mathbf{1}_{T\geq n} + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{T=k}$ (avec la convention que $\sum_{k=0}^{-1} \cdots = 0$).*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

— *$M_{T\wedge n}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable :* avec l'indication, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_{T\wedge n} = M_n \mathbf{1}_{T\geq n} + \sum_{k=0}^{n-1} M_k \mathbf{1}_{T=k}. \tag{1}$$

La variable $T$ étant un temps d'arrêt, $\mathbf{1}_{T\geq n}$ et les v.a. $\mathbf{1}_{T=k}$, pour $k \leq n-1$ sont $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurables et donc $\mathcal{F}_n$-mesurables. De plus, le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une martingale, les v.a. $M_0, \dots, M_n$ sont $\mathcal{F}_n$-mesurables et donc $M_{T\wedge n}$ est bien $\mathcal{F}_n$-mesurable.

— *$M_{T\wedge n} \in \mathbb{L}^1$ :* en utilisant toujours la formule (1), on voit que

$$|M_{T\wedge n}| \leq \sum_{k=0}^{n} |M_k|.$$

L'espace $\mathbb{L}^1$ étant un espace vectoriel, $\sum_{k=0}^{n} |M_k|$ et donc $M_{T\wedge n}$ sont dans $\mathbb{L}^1$.

— *Le processus n'évolue pas en moyenne :*

$$\mathbb{E}\left[M_{T\wedge(n+1)} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[M_{n+1}\mathbf{1}_{T\geq n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\left[M_k \mathbf{1}_{T=k} \mid \mathcal{F}_n\right].$$

Or, comme précédemment, $\mathbf{1}_{T\geq n+1}$, $\mathbf{1}_{T=k}$ et $M_k$, pour $k \leq n$, sont $\mathcal{F}_n$-mesurables. Donc,

$$\mathbb{E}\left[M_{T\wedge(n+1)} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbf{1}_{T\geq n+1}\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] + \sum_{k=0}^{n} M_k \mathbf{1}_{T=k}.$$

Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une martingale, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M_{T\wedge(n+1)} \mid \mathcal{F}_n\right] &= \mathbf{1}_{T\geq n+1} M_n + \sum_{k=0}^{n} M_k \mathbf{1}_{T=k} \\ &= \mathbf{1}_{T\geq n} M_n + \sum_{k=0}^{n-1} M_k \mathbf{1}_{T=k} = M_{T\wedge n}.\end{aligned}$$

Cela conclut la démonstration.

**Exercice 3.** *Martingale et inégalité de Jensen conditionnelle.*

(1) Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. On se donne une martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que $\phi(M_n) \in \mathbb{L}^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\phi(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
*Remarque : Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale, $(|M_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une sous-martingale, de même que $\left(M_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ si $M_n \in \mathbb{L}^2$.*

La v.a. $\phi(M_n)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable car $M_n$ l'est et, par hypothèse, $\phi(M_n) \in \mathbb{L}^1$. Finalement, d'après l'inégalité de Jensen conditionnelle, par convexité de $\phi$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[\phi(M_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] \geq \phi(\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]) = \phi(M_n).$$

Le processus $(\phi(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une sous-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) On suppose maintenant que $\phi$ est croissante et convexe. Montrer que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale et $\phi(M_n) \in \mathbb{L}^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(\phi(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-martingale.

La v.a. $\phi(M_n)$ est toujours $\mathcal{F}_n$ mesurable et dans $\mathbb{L}^1$.De plus, toujours par Jensen, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[\phi(M_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] \geq \phi(\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right]).$$

Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une sous-martingale,

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] \geq M_n.$$

La croissance de la fonction $\phi$ nous donne donc l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left[\phi(M_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] \geq \phi(M_{n+})$$

et le processus $(\phi(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une sous-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 4.** Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables i.i.d. intégrables positives de moyenne $m > 0$. On définit le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \prod_{i=0}^{n} Y_i \; .$$

Dire, selon la valeur de $m$, si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale, une sous-martingale, une martingale par rapport à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^Y\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien adapté à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^Y\right)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, par indépendance des v.a. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[|X_n|\right] = \prod_{i=0}^{n} \mathbb{E}\left[Y_i\right] < \infty,$$

donc $X_n$ est bien dans $\mathbb{L}^1$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[X_n Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n \mathbb{E}\left[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = m X_n.$$

Ainsi,

- si $m \leq 1$, le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une surmartingale,
- si $m = 1$, c'est une martingale,
- si $m \geq 1$, il s'agit d'une sous-martingale.

*** Exercice 5.** *Décomposition de Doob.*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale de carré intégrable pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(1) Montrer qu'il existe un unique couple de processus $(M_n, A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n^2 = M_n + A_n$

(ii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus croissant et prévisible (i.e. $A_{n+1}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$)

(iii) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $M_0 = X_0^2$

et que, de plus,

$$A_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \; A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[ (X_{k+1} - X_k)^2 \;\middle|\; \mathcal{F}_k \right]$$

Considérons un couple $(M_n, A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les points (i), (ii) et (iii). Alors, le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une martingale et le processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant prévisible, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] = M_n + A_{n+1}$$

En utilisant le point (i), on obtient donc :

$$A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] - X_n^2.$$

Comme $M_0 = X_0^2$, on a immédiatement $A_0 = 0$ et, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[X_{k+1}^2 \mid \mathcal{F}_k\right] - X_k^2$$

Remarquons alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une martingale,

(2) $$\mathbb{E}\left[ (X_{n+1} - X_n)^2 \;\middle|\; \mathcal{F}_n \right] = \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] + X_n^2 - 2\mathbb{E}\left[X_n X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] - X_n^2.$$

Le processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a alors nécessairement la forme présentée dans l'énoncé et les couples $(M_n, A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc uniques.

Réciproquement, considérons le couple $(M_n, A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le processus introduit dans l'énoncé et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $M_n = X_n^2 - A_n$ et vérifions qu'il satisfait bien les conditions de l'énoncé. Les points (i) et (ii) sont vérifiés de manière immédiate. Montrons donc (iii), c'est-à-dire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale. Ce processus est bien adapté à la filtration $(cF_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et toutes les v.a. sont intégrables. De plus, on a immédiatement $M_0 = X_0^2$ et, comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est prévisible, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] - A_{n+1} = \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n\right] - \mathbb{E}\left[ (X_{n+1} - X_n)^2 \;\middle|\; \mathcal{F}_n \right] - A_n.$$

Donc, d'après l'égalité (2),

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n^2 - A_n = M_n.$$

Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une martingale et le couple donné vérifie donc bien les conditions de l'énoncé.

(2) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] = \sigma^2 < \infty$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que $(S_n^2 - n\sigma^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale pour sa filtration naturelle.

On a vu en cours que le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale (si jamais «on» l'a oublié, «on» revient à la définition pour vérifier ce point !). Pour obtenir le résultat recherché, il suffit de vérifier que le processus $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini à la question précédente vaut, dans ce cas particulier, $A_n = n\sigma^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et, en effet,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[ (S_{k+1} - S_k)^2 \;\middle|\; \mathcal{F}_k \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[X_{k+1}^2 \mid \mathcal{F}_k\right].$$

Par indépendance des $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}\left[X_k^2\right] = n\sigma^2.$$

Et donc, le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $M_n = S_n^2 - A_n = S_n^2 - n\sigma^2$, est une martingale.

## 2. Convergence de martingales

**Exercice 6.** On considère la marche aléatoire simple symétrique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{Z}$ partant de 1 : $S_0 = 1$ et il existe une suite de v.a.i.i.d. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que $\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. On note $T = \inf\{n \geq 0, \; S_n = 0\}$.

(1) Montrer que $T$ est un $\mathcal{F}^S$-temps d'arrêt.

La variable aléatoire $T$ est le temps d'atteinte de l'ensemble $\{0\}$ pour le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il s'agit donc bien d'un $\mathcal{F}^S$-temps d'arrêt.

(2) Montrer que le processus $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

D'après l'exercice 2, la variable $T$ étant un $\mathcal{F}^S$-temps d'arrêt, le processus arrêté $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ reste une martingale.

(3) Montrer que $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers une variable aléatoire $Y$ dont on précisera la loi, mais que la convergence n'a pas lieu au sens $\mathbb{L}^1$. *On pourra admettre (ou se référer à un exercice de la feuille de TD précédente) que le temps d'arrêt $T$ est fini p.s.*

Pour tout $n \leq T$, $S_n \geq 0$, $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc toujours positif et, ce processus étant une martingale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[|S_{T\wedge n}|] = \mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[S_{T\wedge 0}] = 1.$$

Le théorème de convergence nous dit donc que $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers une variable aléatoire $Y \in \mathbb{L}^1$. Nous allons vori que la convergence n'a pas lieu dans $\mathbb{L}^1$. En effet, comme le temps d'arrêt $T$ est fini p.s., $S_{T\wedge n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} S_T = 0$ et $Y = 0$ p.s. Or si la convergence vers 0 avait lieu dans $\mathbb{L}^1$, on aurait $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[0] = 0$, ce qui n'est pas le cas. Il n'y a donc pas convergence dans $\mathbb{L}^1$.

*** Exercice 7.** *Il existe des martingales convergentes non U.B. dans $\mathbb{L}^1$*

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Z_n = 2^n) = \mathbb{P}(Z_n = -2^n) = \frac{1}{2n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - 1/n^2.$$

(1) Montrer que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ défini par

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

est une $\left(\mathcal{F}_n^Z\right)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale.

Il est immédiat que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est adapté à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^Z\right)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ |M_n| \leq \sum_{i=1}^{n} |Z_i| \leq \sum_{i=1}^{n} a_i < \infty,$$

la v.a. $M_n$ est ainsi bornée et donc intégrable.
Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^Z\right] = \mathbb{E}\left[M_n \mid \mathcal{F}_n^Z\right] + \mathbb{E}\left[Z_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^Z\right].$$

La v.a. $M_n$ étant $\mathcal{F}_n^Z$-mesurable et la v.a. $Z_{n+1}$ indépendante de $\mathcal{F}_n^Z$ et de moyenne nulle, on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^Z\right] = M_n$$

et le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

(2) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers une v.a. $M_\infty$.

La série

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z_n \neq 0) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

est convergente. Ainsi, d'après le premier lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement à partir d'un certain rang les v.a. $Z_n$ sont toutes nulles. Donc,

$$M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \sum_{n\geq 1} Z_n$$

qui est en fait une somme finie.

(3) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas uniformément bornée dans $\mathbb{L}^1$.

Supposons que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit uniformément bornée dans $\mathbb{L}^1$. Il existe alors une constante $M > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}[|M_n|] \leq M.$$

Mais, d'après la seconde inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M \geq \mathbb{E}[|M_{n+1}|] \geq \mathbb{E}[|Z_{n+1}|] - \mathbb{E}[|M_n|] \geq \frac{2^n}{n^2} - M$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{2^n}{n^2} \leq 2M,$$

ce qui est impossible, le processus n'est donc pas uniformément borné.

**Exercice 8.** *Urne de Polya.*

(1) Une urne contient 1 boule noire et 1 boule blanche. On tire une boule au hasard, selon la loi uniforme, dans l'urne. On remet alors cette boule dans l'urne accompagnée d'une autre boule de la même couleur et on itère la procédure. On note $N_n$ le nombre de boules noires et $M_n$ la proportion de boules noires après le $n^{\text{ème}}$ tirage ($N_0 = 1$ et $M_0 = 1/2$).

(a) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}^N$-martingale.

Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est défini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $M_n = N_n/(2+n)$. Il est donc adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, comme il est borné par 1 car c'est une proportion, il est intégrable. Finalement, remarquons que d'après l'énoncé, le processus $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov non homogène à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall i \in \{0,\dots,n+1\}, \begin{cases} \mathbb{P}\left(N_{n+1} = i+1 \mid N_n = i\right) = \frac{i}{2+n} \\ \mathbb{P}\left(N_{n+1} = i \mid N_n = i\right) = \frac{n+2-i}{2+n} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la propriété de Markov faible,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^N\right] = \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid N_n\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{N_{n+1}}{2+n+1} \mid N_n\right] \\ &= \frac{N_n+1}{3+n}\frac{N_n}{2+n} + \frac{N_n}{3+n}\frac{2+n-N_n}{2+n} \\ &= \frac{N_n}{2+n} = M_n. \end{aligned}$$

Cela montre que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une martingale.

(b) Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?

Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale bornée par 1, donc uniformément bornée dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$. Ainsi, d'après les théorèmes de convergence, il existe une v.a. $M_\infty$ qui appartient à $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$ telle que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} M_\infty$ et $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{L}^p} M_\infty$.

(c) Calculer la loi de $N_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la loi de $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N_n$ suit la loi uniforme sur $\{1,\dots,n+1\}$. Le résultat est évident pour $n = 0$. Supposons le résultat vrai pour un $n \in \mathbb{N}$ et montrons le pour $n+1$. Soit $k \in \{1,\dots,n+2\}$. Si $k \in \{2,\dots,n+1\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{n+1} = k) &= \mathbb{P}\left(N_{n+1} = k \mid N_n = k\right)\mathbb{P}(N_n = k) + \mathbb{P}\left(N_{n+1} = k \mid N_n = k-1\right)\mathbb{P}(N_n = k-1) \\ &= \frac{n+2-k}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{k-1}{n+2}\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+2-k}{n+2}\frac{1}{n+1} + \frac{k-1}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

On voit facilement que le résultat est encore valable pour $k \in \{1, n+2\}$. Ainsi, $N_{n+1}$ suit bien la loi uniforme sur $\{1,\dots,n+1\}$.
Montrons maintenant que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{U}([0,1])$. Soit $f$ une fonction continue bornée. Alors,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}[f(M_n)] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{N_n}{2+n}\right)\right] &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} f(\frac{k}{n+2}) \\ &= \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1} f(\frac{k}{n+2}) - \frac{f(0)}{n+2}. \end{aligned}$$

On reconnaît une somme de Riemann ; la fonction $f$ étant continue, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(M_n)] = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = \mathbb{E}[f(U)] \quad \text{où } U \sim \mathcal{U}([0,1]).$$

Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $M_\infty$ p.s., il converge également vers $M_\infty$ en loi. Par unicité de la loi limite, on a donc $M_\infty \sim \mathcal{U}([0,1])$.

*(2) On suppose maintenant que l'urne contient initialement $a$ boules noires et $b$ boules blanches, $a, b \in \mathbb{N}^*$. On considère toujours $N_n$ le nombre de boules noires et $M_n$ la proportion de boules noires après le $n^{\text{ème}}$ tirage, mais les conditions initiales sont donc $N_0 = a$ et $M_0 = a/(a+b)$.

(a) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours une $\mathcal{F}^N$-martingale qui converge vers une variable aléatoire $M_\infty$ p.s. et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$.

Le même raisonnement qu'à la question précédente aboutit au résultat demandé.

(b) On appelle loi $Beta(\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$, la loi continue de densité définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_{\alpha,\beta}(x)=\frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Montrer que pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$, $\int_{\mathbb{R}} f_{\alpha+1,\beta}(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{\mathbb{R}} f_{\alpha,\beta+1}(x)\,\mathrm{d}\,x$. En déduire que $f_{\alpha,\beta}$ est bien une densité de probabilité.

Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^*$. On pose, pour simplifier les notations, $c_{\alpha,\beta}=\frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!(\beta-1)!}$. Pour obtenir l'égalité demandée, il suffit d'effectuer une intégration par partie en posant $u(x)=x^\alpha$ et $v'(x)=(1-x)^{\beta-1}$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_{\alpha+1,\beta}(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{[0;1]} f_{\alpha+1,\beta}(x)\,\mathrm{d}\,x=&c_{\alpha+1,\beta}\left(\left[-x^\alpha\frac{(1-x)^\beta}{\beta}\right]_0^1+\int_{[0;1]}\frac{\alpha}{\beta}x^{\alpha-1}(1-x)^\beta\right)\\ =&\int_{[0;1]}c_{\alpha,\beta+1}x^{\alpha-1}(1-x)^\beta\\ =&\int_{\mathbb{R}} f_{\alpha,\beta+1}(x)\,\mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

Une récurrence montre alors que $\int_{\mathbb{R}} f_{\alpha,\beta}(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{\mathbb{R}} f_{1,\alpha+\beta-1}(x)\,\mathrm{d}\,x=1$.

(c) Montrer que, si $M$ suit la loi $Beta(\alpha,\beta)$, alors, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}\left[M^k\right]=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+\beta+i)}.$$

Fixons $\alpha,\beta,k\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[M^k\right]&=\int_{[0;1]}x^k f_{\alpha,\beta}(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_{[0;1]}c_{\alpha,\beta}x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\,x\\ &=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+\beta+i)}\int_{[0;1]}c_{\alpha+k,\beta}x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\,x\\ &=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha+\beta+i)}.\end{aligned}$$

La dernière égalité venant du fait que la fonction $x\to c_{\alpha+k,\beta}x^{\alpha+k-1}(1-x)^{\beta-1}$ est la densité de probabilité $f_{\alpha+k,\beta}$.

(d) Montrer que, pour tout $k\geq 1$, le processus $\left(Z_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ Z_n^{(k)}=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(N_n+i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(a+b+n+i)}.$$

est une martingale. En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left[M_\infty^k\right]$.

On montre que $\left(Z_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec un calcul proche de celui de la question (1a). Le processus est, de plus borné p.s. (par 1), il converge donc p.s. et dans $\mathbb{L}^1$ vers une v.a. $Z_\infty^{(k)}$. On a ainsi, par convergence $\mathbb{L}^1$,

$$\mathbb{E}\left[Z_\infty^{(k)}\right]=\mathbb{E}\left[Z_0^{(k)}\right]=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(a+i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(a+b+n+i)}.$$

De plus, les v.a. $Z_n^{(k)}$ se réécrivent :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ Z_n^{(k)}=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(M_n+\frac{i}{a+b+n})}{\prod_{i=0}^{k-1}(1+\frac{i}{a+b+n})}.$$

et ainsi $\left(Z_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge p.s. vers $M_\infty^k$. Par unicité de la limite, $Z_\infty^{(k)}=M_\infty^k$ p.s. et donc

$$\mathbb{E}\left[M_\infty^k\right]=\frac{\prod_{i=0}^{k-1}(a+i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(a+b+i)}.$$

(e) Montrer que la fonction caractéristique de $M_\infty$ s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi_{M_\infty}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[M_\infty^k\right] \frac{(it)^k}{k!}.$$

En déduire la loi de $M_\infty$.

L'égalité est obtenue en développant l'exponentielle en série entière et en utilisant le théorème de Fubini, ce qui est possible car $M_\infty$ est p.s. bornée. Comme la fonction caractéristique caractérise la loi, on voit que, dans ce cas, la loi de $M_\infty$ est caractérisée par la suite des moments $(M_\infty^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et il en est de même pour toute loi à support borné. Or, on a vu à la question précédente que les moments $(M_\infty^k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont ceux de la loi $Beta(a,b)$. La variable $M_\infty$ suit donc cette loi.

**Exercice 9.** Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$ et $\alpha$ un réel dans $]0,1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires vérifiant $X_0 = x_0 \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \alpha X_n + (1-\alpha)\mathbf{1}_{U_{n+1}\leq X_n}.$$

(1) Montrer que, p.s., $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \in [0,1]$.

Le résultat est immédiat par récurrence.

(2) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à sa filtration naturelle. De plus, il est borné ; donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in \mathbb{L}^1$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X\right] = \alpha X_n + (1-\alpha)\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{U_{n+1}\leq X_n} \mid \mathcal{F}_n^X\right].$$

Comme $X_n$ est $\mathcal{F}_n^X$-mesurable et que $U_{n+1}$ est indépendante de $\mathcal{F}_n^X$,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{U_{n+1}\leq X_n} \mid \mathcal{F}_n^X\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{u\leq X_n} \mathbb{P}_{U_{n+1}}(\mathrm{d}\,u) \int_0^{X_n} \mathrm{d}\,u = X_n,$$

ce qui conclut la démonstration.

(3) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $X_\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$.

Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné par 1, il est donc uniformément borné dans tous les $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$. Les théorèmes de convergence permettent alors de conclure directement.

(4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)^2\right] = (1-\alpha)^2\mathbb{E}\left[X_n(1-X_n)\right]$.

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(X_{n+1}-X_n)^2 = (1-\alpha)^2\left(\mathbf{1}_{U_{n+1}\leq X_n} - X_n\right)^2.$$

Ainsi en conditionnant par $\sigma(X_n)$, $U_{n+1}$ étant indépendant de cette variable,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)^2\right] &= (1-\alpha)^2\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\mathbf{1}_{U_{n+1}\leq X_n} - X_n\right)^2 \mid X_n\right]\right] \\
&= (1-\alpha)^2\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbf{1}^2_{U_{n+1}\leq X_n} \mid X_n\right] - 2X_n\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{U_{n+1}\leq X_n} \mid X_n\right] + X_n^2\right] \\
&= (1-\alpha)^2\mathbb{E}\left[X_n - 2X_n^2 + X_n^2\right] = (1-\alpha)^2\mathbb{E}\left[X_n(1-X_n)\right].
\end{aligned}$$

(5) Montrer que $\mathbb{E}\left[X_\infty(1-X_\infty)\right] = 0$. En déduire la loi de $X_\infty$.

D'après la question 3, comme on a convergence dans $\mathbb{L}^2$, de $X_n$ vers $X_\infty$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_n(1-X_n)\right] = \mathbb{E}\left[X_\infty(1-X_\infty)\right].$$

Mais, d'après la question 4, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)^2\right] = (1-\alpha)^2\mathbb{E}\left[X_n(1-X_n)\right]$$

et

$$\|X_{n+1}-X_n\|_2 \leq \|X_{n+1}-X_\infty\|_2 + \|X_\infty - X_n\|_2$$

tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $\infty$. Ainsi, on a bien, par unicité de la limite, $\mathbb{E}\left[X_\infty(1-X_\infty)\right] = 0$.

Comme, de plus, $X_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la convergence a également lieu p.s., on a également $X_\infty \in [0,1]$ et donc $X_\infty(1-X_\infty) \geq 0$ p.s. Or, une v.a. positive d'espérance nulle est nulle p.s., ainsi, p.s. $X_\infty \in \{0,1\}$. Finalement, par convergence $\mathbb{L}^1$ et conservation de l'espérance pour les martingales, on a $\mathbb{E}[X_\infty] = \mathbb{E}[X_0] = x_0$. Donc, la v.a. $X_\infty$ suit la loi $\mathcal{B}(x_0)$.

*** Exercice 10.** *Théorème des trois séries de Kolmogorov.*
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :
*Si il existe $a > 0$ tel que les trois séries suivantes convergent :*

$$\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(|X_k| > a)\,, \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}\left[X_k \mathbf{1}_{|X_k|\leq a}\right] \quad \text{et} \quad \sum_{k\geq 1} \mathbb{V}\left[X_k \mathbf{1}_{|X_k|\leq a}\right]$$

*alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}$-p.s.*

(1) Pour tout entier $k > 0$, on définit $Y_k = X_k \mathbf{1}_{|X_k|\leq a} - \mathbb{E}\left[X_k \mathbf{1}_{|X_k|\leq a}\right]$. Montrer que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, défini par $M_n = \sum_{k=1}^n Y_k$, est une martingale pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$, puis que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge $\mathbb{P}$-p.s.

Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, les v.a. $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont bornées donc intégrables. L'ensemble $\mathbb{L}^1$ étant un espace vectoriel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n$ est dans $\mathbb{L}^1$. Et finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X\right] = \mathbb{E}\left[Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X\right] + \mathbb{E}\left[M_n \mid \mathcal{F}_n^X\right] = \mathbb{E}[Y_{n+1}] + M_n = M_n.$$

Le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une martingale. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par indépendance des v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et donc des v.a. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\mathbb{E}\left[M_n^2\right] = \mathbb{V}[M_n] = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}[Y_k] = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}\left[X_k \mathbf{1}_{|X_k|\leq a}\right] \leq \sum_{k=1}^\infty \mathbb{V}\left[X_k \mathbf{1}_{|X_k|\leq a}\right].$$

Cette dernière série étant finie par hypothèse, la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc uniformément bornée dans $\mathbb{L}^2$ et donc dans $\mathbb{L}^1$. D'après le théorème de convergence de Doob, il existe donc une v.a. $M_\infty \in \mathbb{L}^1$ telle que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} M_\infty$.

(2) Montrer que la série de terme général $X_k \mathbf{1}_{|X_k|>a}$ est convergente.

La série $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(|X_k| > a)$ est convergente. Ainsi, d'après le premier lemme de Borel-Cantelli, p.s. seul un nombre fini de v.a. $X_k$ , $k \in \mathbb{N}$, son plus grandes que $a$. La série de terme général $X_k \mathbf{1}_{|X_k|>a}$ admet donc p.s. un nombre fini de termes non nuls et est convergente.

(3) Conclure.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n X_k \mathbf{1}_{|X_k|>a} + M_n + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[X_k \mathbf{1}_{|X_k|\leq a}\right]$$

D'après les questions précédentes, les deux premiers termes convergent p.s. et la convergence du troisième est une hypothèse de l'énoncé. La somme $\sum_{k=1}^n X_k$ converge donc p.s.

*Remarque : on peut montrer que cette condition suffisante pour la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une condition nécessaire.*

## 3. Théorème d'arrêt

**Exercice 11.** Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille de v.a. uniformément bornée dans $\mathbb{L}^p$, $p \in ]1, +\infty]$, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. Montrer par un contre exemple que ce n'est pas vrai si $p = 1$.

— *U.B. dans $\mathbb{L}^p$, $p \in ]1, +\infty]$ implique U.I. :* En posant $q$ tel que $1/p + 1/q = 1$ et en appliquant successivement l'inégalité de Hölder, puis l'inégalité de Markov généralisée, on voit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $K > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_n| \mathbf{1}_{|X_n|\geq K}\right] &\leq \|X_n\|_p \left\|\mathbf{1}_{|X_n|\geq K}\right\|_q \\ &= \|X_n\|_p \left(\mathbb{P}(|X_n| \geq K)\right)^{1/q} \\ &\leq \|X_n\|_p \left(\frac{\mathbb{E}[|X_n|^p]}{K^p}\right)^{1/q}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $K > 0$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n| \mathbf{1}_{|X_n|\geq K}\right] \leq \frac{\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_p \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_n|^p]\right)^{1/q}}{K^{p/q}} < \infty.$$

Et ce majorant tend bien vers 0 lorsque $K$ tend vers l'infini.

— *U.B. dans $\mathbb{L}^1$ n'implique pas U.I. :* On considère la suite de v.a. indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Ainsi pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[|X_n|] = \mathbb{E}[X_n] = 1$ et la suite est bien uniformément bornée dans $\mathbb{L}^1$. Mais pour tout $K > 0$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[|X_n|\mathbf{1}_{|X_n|\geq K}\right] = 1,$$

il n'y a donc pas convergence vers 0 lorsque $K$ tend vers l'infini et la suite n'est pas U.I.

**Exercice 12.** *Marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$.*
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$ et trois entiers $a < x < b$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = x + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

avec la convention usuelle que $\sum_{k=1}^{0} = 0$. On note alors $T_a = \inf\{n \geq 0,\ S_n = a\}$ le temps d'atteinte de $a$, $T_b$ le temps d'atteinte de $b$ par le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $T_{a,b} = T_a \wedge T_b$ le temps d'atteinte de l'ensemble $\{a, b\}$.

(1) Soit $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n = S_n^2 - n \quad \text{et} \quad Z^t = e^{tS_n}/(\cosh t)^n.$$

Montrer que les processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(Z_n^t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des martingales pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n^X$ et $|S_n| \leq n + |x|$. Les trois processus sont donc adaptés à la filtration et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$, $M_n$ et $Z_n^t$ sont bornés et donc intégrables. De plus, les $X_n$ étant iid, de moyenne nulle et de variance 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X\right] = \mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X\right] + \mathbb{E}\left[S_n \mid \mathcal{F}_n^X\right] = \mathbb{E}[X_{n+1}] + S_n = S_n$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X\right] &= \mathbb{E}\left[(S_n + X_{n+1})^2 - (n+1) \mid \mathcal{F}_n^X\right] \\
&= \mathbb{E}\left[S_n^2 \mid \mathcal{F}_n^X\right] + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n^X\right] + \mathbb{E}\left[2S_nX_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X\right] - (n+1) \\
&= S_n^2 + \mathbb{E}\left[X_{n+1}^2\right] + 2S_n\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X\right] - (n+1) \\
&= S_n^2 + \mathbb{E}\left[X_1^2\right] + 2S_n\mathbb{E}[X_{n+1}] - (n+1) \\
&= S_n^2 + 1 + 0 - (n+1) = M_n
\end{aligned}$$

et finalement, comme $\mathbb{E}\left[e^{tX_1}\right] = \cosh t$,

$$\mathbb{E}\left[Z_{n+1}^t \mid \mathcal{F}_n^X\right] = \frac{e^{tS_n}}{(\cosh t)^{n+1}}\mathbb{E}\left[e^{tX_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n^X\right] = \frac{e^{tS_n}}{(\cosh t)^{n+1}}\mathbb{E}\left[e^{tX_1}\right] = Z_n^t.$$

(2) On admet dans cette question que $\mathbb{P}(T_{a,b} < \infty) = 1$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(T_a < T_b)$. (*On pourra remarquer que le processus $\left(S_{T_{a,b}\wedge n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale bornée.*)

D'après le résultat de l'exercice 2, le processus $\left(S_{T_{a,b}\wedge n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours une martingale. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a \leq S_{T_{a,b}\wedge n} \leq b$$

car on arrête la martingale lorsqu'elle touche $a$ ou $b$. La martingale est ainsi bornée et donc uniformément intégrable. D'après le théorème d'arrêt de Doob utilisé avec le temps d'arrêt $T_{a,b}$, on a donc :

$$\mathbb{E}\left[S_{T_{a,b}\wedge T_{a,b}}\right] = \mathbb{E}\left[S_{T_{a,b}\wedge 0}\right] \text{ soit } \mathbb{E}\left[S_{T_{a,b}}\right] = \mathbb{E}[S_0] = x.$$

Par ailleurs, comme $\mathbb{P}(T_{a,b} < \infty) = 1$,

$$\mathbb{E}\left[S_{T_{a,b}}\right] = \mathbb{E}\left[a\mathbf{1}_{T_a<T_b} + b(1 - \mathbf{1}_{T_a<T_b})\right] = a\mathbb{P}(T_a < T_b) + b(1 - \mathbb{P}(T_a < T_b)).$$

En résolvant l'équation on obtient donc :

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{b-x}{b-a}.$$

(b) En utilisant la martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que $\mathbb{E}[T_a \wedge T_b] = (b-x)(x-a)$. Que pouvez-vous dire de $\mathbb{E}[T_a]$ ?

Cette fois, la martingale arrêtée en $T_{a,b}$ n'est pas bornée car $T_{a,b}$ ne l'est pas. Nous allons donc utiliser une autre technique. D'après le corollaire du théorème d'arrêt,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left[M_{n\wedge T_{a,b}}\right] = \mathbb{E}[M_0] = x^2 \quad \text{i.e.} \quad \mathbb{E}\left[S^2_{n\wedge T_{a,b}}\right] - x^2 = \mathbb{E}\left[n \wedge T_{a,b}\right].$$

Le processus $\left(S^2_{n\wedge T_{a,b}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné par $\max(a^2, b^2)$ et converge p.s. vers $S^2_{T_{a,b}}$. D'après le théorème de convergence dominée, on a donc :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[S^2_{n\wedge T_{a,b}}\right] - x^2 = \mathbb{E}\left[S^2_{T_{a,b}}\right] - x^2 = a^2\mathbb{P}(T_a < T_b) + b^2(1 - \mathbb{P}(T_a < T_b)) - x^2$$
$$= a^2\frac{b-x}{b-a} + b^2\frac{x-a}{b-a} - x^2 = (b-x)(x-a).$$

Par ailleurs, la suite de v.a. $n \wedge T_{a,b}$ est positive et croissante convergeant p.s. vers $T_{a,b}$. Donc, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[n \wedge T_{a,b}\right] = \mathbb{E}\left[T_{a,b}\right].$$

On a donc bien le résultat recherché.

*(3) Montrer que, pour tout $t > 0$ la martingale $\left(Z^t_{T_b\wedge n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément intégrable. En déduire que $\mathbb{E}\left[(\cosh t)^{-T_b}\mathbf{1}_{T_b<\infty}\right] = e^{-t(b-x)}$ puis que $\mathbb{P}(T_b < \infty) = 1$.

Fixons $t > 0$. Alors, comme $\cosh t > 1$ et $x \leq b$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq Z^t_{T_b\wedge n} \leq e^{tb}.$$

Le processus est borné et donc uniformément intégrable, il converge donc p.s. vers une v.a. $Z^t_{T_b,\infty}$. Ainsi, d'après le théorème d'arrêt de Doob appliqué au temps d'arrêt $T_b$,

$$\mathbb{E}\left[Z^t_{T_b}\right] = \mathbb{E}\left[Z^t_{T_b\wedge T_b}\right] = \mathbb{E}\left[Z^t_{T_b\wedge 0}\right] = \mathbb{E}\left[Z^t_0\right] = e^{tx}.$$

De plus,

$$\mathbb{E}\left[Z^t_{T_b}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{tb}}{(\cosh t)^{T_b}}\mathbf{1}_{T_b<\infty}\right] + \mathbb{E}\left[Z^t_{T_b,\infty}\mathbf{1}_{T_b=\infty}\right].$$

Or, comme $\cosh t > 1$, p.s.,

$$0 \leq Z^t_{T_b,\infty}\mathbf{1}_{T_b=\infty} = \lim_{n\to\infty} Z^t_{T_b\wedge n}\mathbf{1}_{T_b=\infty} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{e^{tb}}{(\cosh t)^n} = 0$$

et finalement :

$$\mathbb{E}\left[\frac{e^{tb}}{(\cosh t)^{T_b}}\mathbf{1}_{T_b<\infty}\right] = e^{tx}.$$

La suite $\left(\left(\cosh(1/n)\right)^{-T_b}\mathbf{1}_{T_b<\infty}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, croissante et converge vers

$$\left(\cosh 0\right)^{-T_b}\mathbf{1}_{T_b<\infty} = \mathbf{1}_{T_b<\infty}$$

lorsque $n$ tend vers l'infini. Donc, d'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\cosh(1/n)\right)^{-T_b}\mathbf{1}_{T_b<\infty}\right] = \mathbb{P}(T_b < \infty)$$

Comme, par ailleurs,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\cosh(1/n)\right)^{-T_b}\mathbf{1}_{T_b<\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} e^{-(b-x)/n} = 1,$$

on a bien montré que $T_b$ était fini presque sûrement.

**Exercice 13.** *Marche aléatoire simple non symétrique sur $\mathbb{Z}$.*
On fixe un nombre $p \in ]0,1[\setminus\{1/2\}$ et on note $q = 1-p$. On considère alors $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{P}(U_1 = 1) = p$ et $\mathbb{P}(U_1 = -1) = q$ et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = x + \sum_{k=1}^{n} U_k \text{ et } X_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$$

avec la convention usuelle que $\sum_{k=1}^{0} = 0$.

(1) Montrer que $\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma(U_1, \ldots, U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme pour tout $k \leq n$, $X_k = \left(\frac{q}{p}\right)^{\sum_{i=1}^k U_i}$, la variable $X_k$ est $\mathcal{F}_k^U$-mesurable et donc $\mathcal{F}_n^U$-mesurable. Réciproguement, pour tout $k \leq n$,

$$U_k = S_k - S_{k-1} = \frac{\ln X_k}{\ln \frac{q}{p}} - \frac{\ln X_{k-1}}{\ln \frac{q}{p}}$$

(Remarquons que comme $p \neq 1/2$, $\ln q/p \neq 0$.) Ainsi, la variable $U_k$ est $\mathcal{F}_k^X$-mesurable et donc $\mathcal{F}_n^X$-mesurable.

(2) Montrer que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour sa filtration naturelle.

Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à sa filtration naturelle. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|S_n| \leq n$, donc

$$0 \leq X_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{n+x} \vee \left(\frac{p}{q}\right)^{n-x}$$

et $X_n \in \mathbb{L}^1$. Finalement, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^X\right] = X_n \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{U_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n^X\right] = X_n \mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{U_{n+1}}\right] = X_n\left(\frac{q}{p}p + \frac{p}{q}q\right) = X_n.$$

Le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien une martingale.

(3) Soit $a < x < b$. On note $T_a$ le temps d'atteinte de $a$, $T_b$ le temps d'atteinte de $b$ par le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $T_{a,b} = T_a \wedge T_b$. Montrer que $\mathbb{P}$-p.s. $\lim_{n\to\infty} |S_n| = +\infty$. En déduire que $\mathbb{P}(T_{a,b} < \infty) = 1$.

D'après la loi forte des Grands Nombres,

$$\frac{S_n}{n} = \frac{x}{n} + \overline{U}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}[U_1] = 2p - 1 \neq 0.$$

Ainsi, p.s. $|S_n| \sim |2p-1|n$ et donc tend vers $+\infty$. Nécessairement, $T_a$ ou $T_b$ et donc $T_a \wedge T_b$ sont finis presque sûrement.

(4) En utilisant la martingale $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer $\mathbb{P}(T_a < T_b)$.

De la même manière que dans l'exercice précédent, on peut remarquer que la martingale $\left(X_{T_{a,b}\wedge n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq X_{T_{a,b}\wedge n} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^a \vee \left(\frac{q}{p}\right)^b.$$

Cette martingale est donc U.I et, d'après le théorème d'arrêt appliqué au temps d'arrêt $T_{a,b}$ :

$$\mathbb{E}\left[X_{T_{a,b}}\right] = \mathbb{E}\left[X_{T_{a,b}\wedge T_{a,b}}\right] = \mathbb{E}\left[X_{T_{a,b}\wedge 0}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^x.$$

Or,

$$\mathbb{E}\left[X_{T_{a,b}}\right] = \left(\frac{q}{p}\right)^a \mathbb{P}(T_a < T_b) + \left(\frac{q}{p}\right)^b (1 - \mathbb{P}(T_a < T_b)).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(T_a < T_b) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

(5) Montrer que le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M_n = S_n - n(p-q)$$

est une martingale. Utiliser ensuite le corollaire du théorème d'arrêt avec cette martingale pour calculer $\mathbb{E}[T_{a,b}]$ puis $\mathbb{E}[T_b]$.

On étuide ici uniquement le cas $x = 0$ pour simplifier la présentation. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n$ est intégrable et $\mathcal{F}^U$-mesurable, $M_n$ l'est également. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathbb{E}\left[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^U\right] = \mathbb{E}\left[U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n^U\right] - (p-q) + M_n = \mathbb{E}[U_{n+1}] - (p-q) + M_n = M_n.$$

Ainsi, le processus $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une $\left(\mathcal{F}_n^U\right)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale. D'après le corollaire du théorème d'arrêt, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathbb{E}\left[M_{T_{a,b}\wedge n}\right] = \mathbb{E}[M_0] = 0$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathbb{E}\left[S_{T_{a,b}\wedge n}\right] = (p-q)\mathbb{E}\left[T_{a,b} \wedge n\right].$$

En utilisant, comme dans l'exercice 12, le théorème de convergence dominé pour passer à la limite dans la partie gauche de l'égalité et le théorème de convergence monotone pour passer à la limite dans la partie droite, on obtient $\mathbb{E}\left[S_{T_{a,b}}\right] = (p-q)\mathbb{E}\left[T_{a,b}\right]$. De plus,

$$\mathbb{E}\left[S_{T_{a,b}}\right] = a\mathbb{P}(T_a < T_b) + b(1-\mathbb{P}(T_a < T_b)) = a\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a} + b\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[T_{a,b}\right] = \frac{1}{(p-q)\left(\left(\frac{q}{p}\right)^b - \left(\frac{q}{p}\right)^a\right)}\left(a\left(\frac{q}{p}\right)^b + (b-a)\left(\frac{q}{p}\right)^x - b\left(\frac{q}{p}\right)^a\right).$$

Remarquons maintenant que $T_{-n,b}$ est une suite croissante de v.a. positives convergeant presque sûrement vers $T_b$. D'après le théorème de convergence monotone, on a donc $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[T_{-n,b}\right] = \mathbb{E}[T_b]$. En reprenant la valeur de l'espérance de $T_{-n,b}$, on obtient :

$$\mathbb{E}[T_b] = \begin{cases} \infty & \text{si } p < q \\ \frac{b}{p-q} & \text{si } p > q \end{cases}.$$

**Exercice 14.** *Modèle de Wright-Fisher.*
On souhaite modéliser l'évolution d'une population de $N$ gènes ($N$ étant un entier fixé). On suppose qu'il y a deux types de gènes différents : A et B. On passe de la génération $n$ à la génération $n+1$ de la façon suivante : pour chaque gène de la génération $n+1$, on choisit de manière équiprobable son parent dans la génération $n$, ceci indépendamment des autres gènes. Le gène fils a alors le même type que le gène père. Finalement, on note $X_n$ le nombre de gènes du type A à la génération $n$. Ainsi, on peut construire formellement la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : on se donne une collection de v.a.i.i.d. $(U_{n,k})_{n\in\mathbb{N}^*,k\in\{1,\ldots,N\}}$ de même loi uniforme sur $\{1,\ldots,N\}$ et on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_{\{U_{n,k}\leq X_n\}}. \tag{3}$$

Finalement, pour $x \in \{0,\ldots,N\}$, on note $\mathbb{P}_x$ la probabilité $\mathbb{P}\left(\,\cdot\,\middle|X_0 = x\right)$.

(1) Expliquer pourquoi la relation (3) modélise bien la situation présentée dans l'énoncé.

(2) Montrer que le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une chaîne de Markov sur l'espace d'état $E = \{0,\ldots,N\}$ dont les probabilités de transition sont :

$$\forall (i,j) \in E^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left(X_{n+1} = j \mid X_n = i\right) = \binom{N}{j}\left(\frac{i}{N}\right)^j\left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}.$$

(3) Donner les différentes classes de communication de la chaîne de Markov et la nature de celles-ci.

(4) On note $T_0 = \inf\{n\in\mathbb{N}, X_n = 0\}$ et $T_N = \inf\{n\in\mathbb{N}, X_n = N\}$. Montrer que $T_0$, $T_N$ et $T_0\wedge T_N$ sont des temps d'arrêt et expliquer pourquoi $T_0 \wedge T_N < \infty$, $\mathbb{P}_x$-p.s. quel que soit $x \in \{0,\ldots,N\}$.

(5) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour sa filtration naturelle.

(6) Montrer qu'il existe une variable $X_\infty$ telle que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\mathbb{P}-$p.s. vers $X_\infty$.

(7) Utiliser le théorème d'arrêt pour montrer que $\mathbb{P}_x(T_N < T_0) = \frac{x}{N}$. En déduire la loi de $X_\infty$.

(8) On introduit pour $n \in \mathbb{N}$, *l'hétérozygotie* à l'instant $n$ : $H_n = \frac{2X_n(N-X_n)}{N(N-1)}$. Cela correspond à la probabilité qu'un couple de gènes choisi uniformément dans la poulation totale à l'instant $n$ présente deux allèles différents.
   (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left[X_{n+1}(N-X_{n+1})|\mathcal{F}_n^X\right] = \frac{N-1}{N}X_n(N-X_n)$.
   (b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{E}_x\left[H_n\right] = \frac{2x(N-x)}{N(N-1)}\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$.