Université Côte d'Azur Master Maths 1^e année 2021-2022

PROCESSUS STOCHASTIQUES
EXAMEN TERMINAL

Durée : *3 heures*

Calculatrices, calculettes, notes de cours et téléphones portables sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. La clareté de la rédaction sera prise en compte dans la notation.
Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1 *(5 points)* Dans un laboratoire de biologie, on réalise l'expérience suivante. Une souris est enfermée dans un “labyrinthe” contenant trois pièces qui communiquent toutes les trois entre elles. On enregistre tous les dix secondes la pièce dans laquelle se trouve la souris.

— La pièce 1 contient un répulsif et, à chaque instant discret, la souris quitte la pièce pour aller vers une autre choisie uniformément au hasard.

— La pièce 2 est neutre et la souris a une probabilité de $1/3$ de rester sur place ou d'aller dans une autre pièce.

— La pièce 3 contient de la nourriture et, à chaque instant, la souris a une probabilité de $2/3$ de rester sur place et sinon quitte la pièce pour aller vers une autre choisie uniformément au hasard.

On modélise ainsi les positions successives de la souris par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

1. Expliquer pourquoi P est bien une matrice de transition sur l'espace d'état $E = \{1, 2, 3\}$ et tracer le graphe associé.
2. Donner les classes de communication de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et leur nature.
3. La chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une (ou plusieurs) probabilité(s) invariante(s) ? Si oui, la (les) calculer.
4. On suppose que la souris se trouve initialement dans la pièce 2. La proportion de temps passé par la souris dans la pièce 3 converge-t-elle $\mathbb{P}_2$-p.s. ? Si oui, calculer la limite. Que se passe-t-il si la souris est initialement dans une autre pièce ?
5. La probabilité que la souris se trouve dans la pièce 1 converge-t-elle lorsque n tend vers $+\infty$? Si oui, vers quelle limite ?

Exercice 2 *(6 points)* On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur l'espace d'état $E = \{1, \dots, 5\}$ et de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Expliquer pourquoi P est bien une matrice de transition et tracer le graphe associé.

(2) Donner les classes de communication de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et leur nature.

(3) On s'intéresse à la probabilité que le processus touche 4 avant 5.

  (a) Montrer que les variables aléatoires

$$T_4 = \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = 4\}, \quad T_5 = \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = 5\} \quad \text{et} \quad T_{45} = \min(T_4, T_5).$$

  sont des temps d'arrêt pour le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Expliquer pourquoi le temps T_{45} est presque sûrement fini quel que soit l'état initial de la chaîne de Markov.

(b) On considère le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} u(1) \\ u(2) \\ u(3) \\ u(4) \\ u(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le processus $(u(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une martingale uniformément intégrable.

(c) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x\left[u(X_{T_{45}})\right] = u(x)$. En déduire, pour tout $x \in E$, la valeur de $\mathbb{P}_x\left(T_4 < T_5\right)$.

Exercice 3 *(9 points)* Une urne contient a boules noires et b boules blanches, $(a, b) \in \mathbb{N}^*$. On tire une boule au hasard, selon la loi uniforme, dans l'urne. On remet alors cette boule dans l'urne accompagnée d'une autre boule de la même couleur et on itère la procédure. On note N_n le nombre de boules noires et M_n la proportion de boules noires après le $n^{\text{ème}}$ tirage ($N_0 = a$ et $M_0 = N_0/(a + b)$). On peut donc construire explicitement le processus $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi respective $\mathcal{U}(\{1, \ldots, a + b + n\})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$N_{n+1} := N_n + \mathbf{1}_{\{U_n \le N_n\}} \quad \text{et} \quad M_n = N_n/(a + b + n).$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable N_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}^U_{n-1} = \sigma(U_0, U_1, \ldots, U_{n-1})$. En déduire que

$$\forall i \in \{a, \ldots, a + n\}, \quad \begin{cases} \mathbb{P}\left(N_{n+1} = i + 1 \,\middle|\, N_n = i\right) = \frac{i}{a+b+n} \\ \mathbb{P}\left(N_{n+1} = i \,\middle|\, N_n = i\right) = 1 - \frac{i}{a+b+n} \end{cases}$$

(2) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}^N$-martingale.

(3) Montrer qu'il existe une variable M_∞ à valeurs dans $[0; 1]$ telle que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M_∞ p.s. et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \ge 1$.

(4) Montrer que, pour tout $k \ge 1$, le processus $\left(Z^{(k)}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; Z^{(k)}_n = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(N_n + i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(a + b + n + i)}.$$

est une martingale. En déduire la valeur de $\mathbb{E}\left[M^k_\infty\right]$.

(5) On appelle loi $Beta(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$, la loi continue de densité définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\alpha + \beta - 1)!}{(\alpha - 1)!(\beta - 1)!} x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1}\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

(a) Montrer que $f_{\alpha,\beta}$ est bien une densité de probabilité. *(On pourra raisonner par récurrence.)*

(b) Montrer que, si une variable X suit la loi $Beta(\alpha, \beta)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \; \mathbb{E}\left[X^k\right] = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha + i)}{\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha + \beta + i)}.$$

(6) Montrer que la fonction caractéristique de M_∞ s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \; \phi_{M_\infty}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[M^k_\infty\right] \frac{(it)^k}{k!}.$$

En déduire la loi de M_∞.