Université Côte d'Azur — Master Maths 1^e année 2022-2023

PROCESSUS STOCHASTIQUES
EXAMEN TERMINAL

Durée : *3 heures*

Calculatrices, calculettes, notes de cours et téléphones portables sont interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. La clareté de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Le barème est donné à titre indicatif et pourra être modifié. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Exercice 1 *(6 points)* Dans un laboratoire de biologie, on réalise l'expérience suivante. Une souris est enfermée dans un labyrinthe contenant 5 pièces : la pièce 5 est un piège dont la souris ne peut pas sortir et la pièce 4 contient de la nourriture et la souris si elle y rentre dans cette pièce s'arrête pour y manger. On s'intéresse alors à la probabilité que la souris rentre dans la pièce avec nourriture avant d'être enfermée dans la pièce piègée. On modélise ainsi la suite des pièces visitées par la souris par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Expliquer pourquoi P est bien une matrice de transition sur l'espace d'état $E = \{1;2;3;4;5\}$ et tracer le graphe associé.
2. Donner les classes de communication de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et leur nature.
3. On s'intéresse à la probabilité que le processus touche 4 avant 5. Montrer que les variables aléatoires

$$T_4 = \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = 4\}, \quad T_5 = \inf\{n \in \mathbb{N},\ X_n = 5\} \quad \text{et} \quad T_{45} = \min(T_4, T_5).$$

   sont des temps d'arrêt pour le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Expliquer pourquoi le temps T_{45} est presque sûrement fini quel que soit l'état initial de la chaîne de Markov.
4. On considère l'espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 : $E_1 = \{u \in \mathbb{R}^5,\ Pu = u\}$.
   (a) Soit $u = (u(1), u(2), u(3), u(4), u(5)) \in E_1$. Montrer que le processus $(u(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale uniformément intégrable pour la filtration $\left(\mathcal{F}_n^X\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Décrire l'ensemble des éléments de E_1.
   (c) Montrer que, pour tout $x \in E$ et tout $u \in E_1$, $\mathbb{E}_x[u(X_{T_{45}})] = u(x)$. En déduire, pour tout $x \in E$, la valeur de $\mathbb{P}_x(T_4 < T_5)$. *On pourra choisir un* $u \in E_1$ *tel que* $u(5) = 0$.

Exercice 2 *(7 points)* Un enfant décide d'empiler ses dominos pour faire la plus haute tour possible. Il empile un domino toutes les dix secondes. Malheureusement, plus la construction est élevée, plus la tour risque de s'effondrer et l'enfant doit alors repartir de zéro. On modélise cette situation par une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représentant la hauteur de la tour après n tentatives de dépose de dominos. Cette chaîne est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on considère qu'elle admet les probabilités de transition suivantes :

$$\forall i \in \mathbb{N},\ p_{i,i+1} = \frac{1}{i+1} \text{ et } p_{i,0} = \frac{i}{i+1}.$$

(1) Représenter la chaîne par un graphe. Donner ses différentes classes de communication. (On ne demande pas leur nature)

(2) On note τ_0 le temps où la tour s'effondre : $\tau_0 = \min\{n \geq 1,\ X_n = 0\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_0(\tau_0 > n) = \frac{1}{n!}$. En déduire la probabilité que $\mathbb{P}_0(\tau_0 = \infty)$ et la nature de l'état 0.

(3) Montrer que $\mathbb{E}_0[\tau_0] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_0(\tau_0 \geq n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}_0[\tau_0]$.

(4) La chaîne de Markov admet-elle une (ou plusieurs) probabilité(s) invariante(s) ? Si oui, la (les) calculer.

(5) La chaîne de Markov est-elle apériodique ? L'enfant joue tout l'après-midi à construire et reconstruire sa tour. Le soir approchant, sa mère rentre dans sa chambre pour voir ce qu'il fait. Quelle est la probabilité qu'à ce moment-là la tour soit effondrée ?

Exercice 3 *(7 points)* Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$ et α un réel dans $]0,1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires vérifiant $X_0 = x_0 \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \alpha X_n + (1-\alpha)\mathbf{1}_{U_{n+1}\leq X_n}.$$

(1) Montrer que, p.s., $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \in [0,1]$.

(2) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale adaptée à la filtration $\left(\mathcal{F}_n^U\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(3) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite X_∞, $\mathbb{P}$-p.s. et dans $\mathbb{L}^p$ pour tout $p \geq 1$.

(4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}\left[(X_{n+1} - X_n)^2\right] = (1-\alpha)^2\mathbb{E}\left[X_n(1-X_n)\right]$.

(5) Montrer que $\mathbb{E}\left[X_\infty(1-X_\infty)\right] = 0$. En déduire la loi de X_∞.