Corrigé de l'examen du 26 avril 2012 (durée 2h)

Tous documents interdits. Soyez concis, mais justifiez scrupuleusement ce que vous faites.
Les trois parties sont indépendantes.

Exercice 1 : On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\{1,\dots,7\}$ de matrice de transition Q donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/9 & 7/9 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

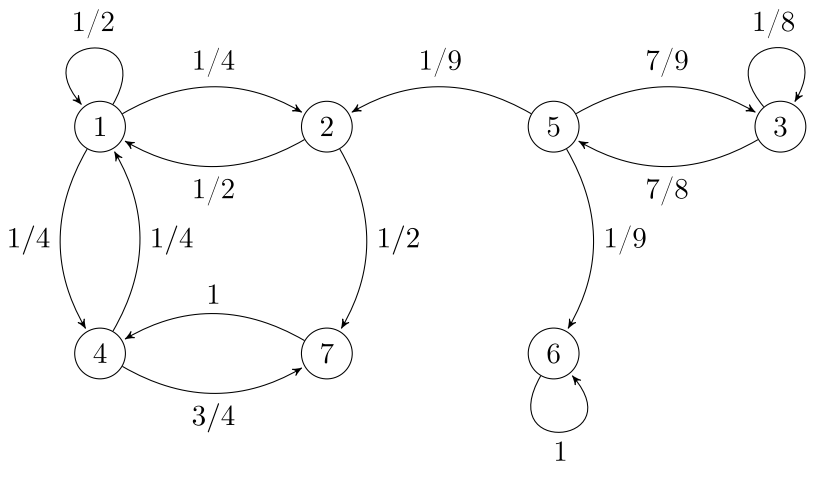
a) Dessiner le graphe de la chaîne de Markov associée en précisant les probabilités de transitions entre les différents états.

b) Déterminer les classes d'états récurrents et transitoires.

c) La chaîne est-elle irréductible ?

d) Calculer $\mathbb{P}_3(X_2 = 6)$ et $\mathbb{P}_1(X_2 = 7)$.

Solution de l'exercice 1.
a) Graphe :



b) On déduit du graphe qu'il y a deux classes récurrentes : $\{1,2,4,7\}$ et $\{6\}$, et une classe transiente : $\{3,5\}$.
c) Non, sinon elle n'admettrait qu'une seule classe.
d) Par la formule $\mathbb{P}_x(X_2 = y) = Q^2(x,y) = \sum_z Q(x,z)Q(z,y)$, on obtient

$$\mathbb{P}_3(X_2 = 6) = Q(3,5)Q(5,6) = \frac{7}{8} \times \frac{1}{9} = \frac{7}{72}, \quad \text{et}$$
$$\mathbb{P}_1(X_2 = 7) = Q(1,2)Q(2,7) + Q(1,4)Q(4,7) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{16}.$$

Exercice 2 : On définit une suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\geq 0}$ par

$$S_0 = x > 0 \text{ p.s.}, \quad \text{et pour } n \geq 1, \ S_n = S_{n-1} + \sigma\varepsilon_n S_{n-1},$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées de loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, et où σ est un réel tel que $|\sigma| < 1$. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la filtration naturelle de $(S_n)_{n\geq 0}$, *i.e.* $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$, pour tout $n \geq 0$.

a) Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale.

b) Montrer (par récurrence) que pour tout $n \geq 0$, $S_n > 0$.

c) En déduire que $(S_n)_{n\geq 0}$ converge p.s., quand n tend vers $+\infty$.

d) On pose, pour tout $n \geq 0$, $Z_n = \log S_n$. Montrer que $Z_n = Z_{n-1} + \log(1 + \sigma\varepsilon_n)$.

e) En déduire que

$$Z_n = \log x + \sum_{k=1}^{n} \log(1 + \sigma\varepsilon_k).$$

f) Calculer $\mathbb{E}(\log(1 + \sigma\varepsilon_1))$, et montrer que

$$\frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \frac{1}{2}\log(1 - \sigma^2).$$

g) En déduire alors que S_n converge p.s. quand n tend vers l'infini, vers une limite à déterminer.

Solution de l'exercice 2.

a) (S_n) est clairement adapté par définition de $(\mathcal{F}_n)$. Montrons que S_n intégrable pour tout $n \geq 0$. S_0 est intégrable car constante. Supposons par récurrence que S_{n-1} est intégrable. Alors comme $|\sigma| < 1$ et $|\varepsilon_n| \leq 1$ p.s., on a $|S_n| \leq 2|S_{n-1}|$, et donc S_n est intégrable. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_n + \sigma\varepsilon_{n+1}S_n|\mathcal{F}_n) \\
&= S_n + \sigma S_n \mathbb{E}(\varepsilon_{n+1}|\mathcal{F}_n) \qquad \text{car } S_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\
&= S_n + \sigma S_n \mathbb{E}(\varepsilon_{n+1}),
\end{aligned}$$

car ε_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$ par construction. Comme ε_{n+1} est centrée, *i.e.* $\mathbb{E}(\varepsilon_{n+1}) = 0$, on obtient $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n$, et donc $(S_n)_n$ est une martingale.

b) On a $S_1 = S_0(1+\sigma\varepsilon_1) = x(1+\sigma\varepsilon_1)$. Or $-1 < \sigma < 1$ et $\varepsilon_1 = \pm 1$ p.s., donc $1+\sigma\varepsilon_1 > 0$, et comme $x > 0$, S_1 est positive. Par récurrence, on suppose alors $S_n > 0$. Et comme $S_{n+1} = S_n(1+\sigma\varepsilon_{n+1})$, par la même preuve que pour S_1, S_n est positive.

c) Comme $(S_n)_n$ est une martingale positive, elle converge p.s., car elle est bornée dans L^1, *i.e.* $\sup_n \mathbb{E}|S_n| < \infty$.

d) $Z_n = \log S_n = \log(S_{n-1}(1 + \sigma\varepsilon_n)) = \log S_{n-1} + \log(1 + \sigma\varepsilon_n) = Z_{n-1} + \log(1 + \sigma\varepsilon_n)$.

e) Par récurrence immédiate, on obtient donc

$$Z_n = \log x + \sum_{k=1}^{n} \log(1 + \sigma\varepsilon_k).$$

f) Comme $1 + \sigma\varepsilon_1 > 0$ p.s., $\log(1 + \sigma\varepsilon_1)$ est bien définie p.s. et intégrable. On a alors

$$\mathbb{E}(\log(1 + \sigma\varepsilon_1)) = \frac{1}{2}\log(1+\sigma) + \frac{1}{2}\log(1-\sigma) = \frac{1}{2}\log(1-\sigma^2).$$

Par la loi des grands nombres, appliquée aux v.a. i.i.d. intégrables $\log(1 + \sigma\varepsilon_i)$, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \log(1 + \sigma\varepsilon_k) \to \mathbb{E}(\log(1 + \sigma\varepsilon_1)), \quad \text{p.s.}$$

et comme $\frac{\log x}{n} \to 0$, on obtient bien le résultat demandé.

g) Comme $|\sigma| < 1$, on a $0 < \sigma^2 < 1$ et $0 < 1 - \sigma^2 < 1$, donc Z_n converge p.s. vers $-\infty$ et S_n converge p.s. vers 0.

Exercice 3 : Soient $(X_n)_{n\geq 0}$, $(Y_n)_{n\geq 0}$, $(Z_n)_{n\geq 0}$ des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes les trois indépendantes entre elles, et de même loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. On pose $\xi_n = (X_n, Y_n, Z_n)$, et $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, avec $S_0 = (0,0,0)$ p.s.

a) Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
b) Que vaut $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^n X_k = 0)$ pour n impair ?
c) Montrer que $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0) = C_{2n}^n(\frac{1}{2})^{2n}$.
d) En déduire que $\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0,0)) = (C_{2n}^n(\frac{1}{2})^{2n})^3$.
e) Donner un équivalent quand $n \to \infty$ de $\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0,0))$. *On rappelle la formule de Stirling :* $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.
f) Montrer que $(0,0,0)$ est transitoire.

Solution de l'exercice 3.
a) Soient $s_0, \dots, s_{n+1} \in \mathbb{Z}^3$ tels que $\mathbb{P}(S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n) > 0$. Alors, comme $S_{n+1} = S_n + \xi_{n+1}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+1} = s_{n+1} \,|\, S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n) &= \mathbb{P}(S_n + \xi_{n+1} = s_{n+1} \,|\, S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n) \\ &= \mathbb{P}(s_n + \xi_{n+1} = s_{n+1} \,|\, S_0 = s_0, \dots, S_n = s_n) \\ &= \mathbb{P}(s_n + \xi_{n+1} = s_{n+1}),\end{aligned}$$

par indépendance de ξ_{n+1} et de $S_0, \dots, S_n$. On obtient de même que

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = s_{n+1} \,|\, S_n = s_n) = \mathbb{P}(s_n + \xi_{n+1} = s_{n+1}),$$

et donc $(S_n)_n$ est une chaîne de Markov.
b) Comme X_n est à valeurs dans $\{-1, +1\}$ p.s., on ne peut revenir en 0 qu'en un nombre pair de pas, et donc $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^n X_k = 0) = 0$ pour n impair.
c) Pour que $\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0$ il faut que n variables soient égales à $+1$ et n variables soient égales à -1. Il y a pour cela C_{2n}^n possibilités et comme les v.a. X_n sont i.i.d. on obtient $\mathbb{P}(\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0) = C_{2n}^n(\frac{1}{2})^{2n}$.
d) Comme $\{S_{2n} = (0,0,0)\} = \{\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0, \sum_{k=1}^{2n} Y_k = 0, \sum_{k=1}^{2n} Z_k = 0\}$, par indépendance des X_i, Y_i, Z_i on obtient

$$\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0,0)) = \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{2n} X_k = 0\Big)\mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{2n} Y_k = 0\Big)\mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{2n} Z_k = 0\Big),$$

ce qui donne le résultat par la question précédente.
e) Par la formule de Stirling, on a quand $n \to \infty$,

$$C_{2n}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

et en passant à la puissance 3, on obtient

$$\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0,0)) \sim \frac{1}{(\pi n)^{3/2}}.$$

f) L'espérance du nombre de retour en $(0,0,0)$ N_0 est

$$\mathbb{E}(N_0) = \mathbb{E}\Big(\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_{2n}=0\}}\Big) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_{2n} = (0,0,0))$$

et comme $\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0,0)) \sim \frac{1}{(\pi n)^{3/2}}$ qui est sommable, on a $\mathbb{E}(N_0) < \infty$. Le nombre de retour en $(0,0,0)$ est donc fini p.s., c'est-à-dire que $(0,0,0)$ est transitoire.