M1 - Optimisation et Éléments Finis 26/04/2023

NOM : PRÉNOM :

Examen (3h)

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants entre eux. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans le barême. ***Attention : une réponse non justifiée n'a pas de valeur ! Justifiez vos réponses.***

∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼

Partie Optimisation

∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼

Exercice 1

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^3$ et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne canoniquement associée. On rappelle des résultats que l'on pourra utiliser sans démonstration :

- *si $||| \cdot |||$ est la norme matricielle subordonnée à $\| \cdot \|$, on a pour tout $A \in M_3(\mathbb{R})$ symétrique, $|||A||| = \max_{i\in\{1,2,3\}} |\lambda_i|$, où les λ_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ sont les valeurs propres de la matrice A,*
- *pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $|ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$*

Par convention, on notera les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en colonne.

On se concentre dans cet exercice sur un cadre général défini par une fonctionnelle

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, u \mapsto \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle - \langle b, u\rangle,$$

avec $A \in M_3(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^3$ et un ensemble

$$\mathcal{Q} = \left\{u \in \mathbb{R}^3,\ \langle d, u\rangle = 0\right\},$$

avec $d \in \mathbb{R}^3$, $d \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. On note également $g : u \mapsto \langle d, u\rangle$, définie sur $\mathbb{R}^3$.

I. Cadre général.

1. Y a-t-il existence et unicité d'un point de minimum de $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{Q}$? On **justifiera** sa réponse.

2. Soit $u^* \in \mathcal{Q}$ un point de minimum de $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{Q}$.

(a) Montrer que la condition nécessaire d'optimalité en u^* s'écrit $Au^* - b + \lambda^* d = 0$ où on précisera l'assertion concernant λ^*.

(b) Montrer que (u^*, λ^*) est alors solution de $B\begin{pmatrix} u^* \\ \lambda^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, avec $B = \begin{pmatrix} A & d \\ {}^t d & 0 \end{pmatrix}$.

3. Dans cette question, on va étudier un algorithme de minimisation particulier s'appliquant dans le cadre général proposé par l'exercice que l'on souhaite donc utiliser pour approcher un point de minimum de $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{Q}$ que l'on notera $u^* \in \mathcal{Q}$.
On notera également λ^* le multiplicateur de Lagrange associé au problème de minimisation comme en question 2. (a).
On considère l'algorithme suivant

Trouver pour tout $k \in \mathbb{N}$, (λ_k, u_k) suivant l'algorithme suivant :

Initialisation : $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$ et $u_0 \in \mathbb{R}^3$ donnés.

Itération : pour $k \in \mathbb{N}$,
— u_{k+1} est calculé à partir de u_k et λ_k comme

$$u_{k+1} = u_k - \rho_1(Au_k - b + \lambda_k d)$$

— λ_{k+1} est calculé à partir de λ_k et u_{k+1} comme

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho_1\rho_2\langle d, u_{k+1}\rangle.$$

Dans les questions qui suivent, on cherche à montrer que l'algorithme converge, i.e. que $u_k \to u^*$, lorsque $k \to +\infty$. On procède par étapes dans les questions suivantes. On notera Id_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{k+1} - u^* &= (Id_3 - \rho_1 A)(u_k - u^*) - \rho_1(\lambda_k - \lambda^*)d \text{ et que} \qquad (1) \\ \lambda_{k+1} - \lambda^* &= \lambda_k - \lambda^* + \rho_1\rho_2\langle d, u_{k+1} - u^*\rangle. \qquad (2) \end{aligned}$$

(b) On note $\alpha := |||Id_3 - \rho_1 A|||$. Montrer que l'on peut choisir $\rho_1 > 0$ tel que $\alpha < 1$.

Dans la suite, on fixe ρ_1 comme dans la question 3. (b), i.e. pour que $\alpha < 1$.

(c) En utilisant l'équation (2) obtenue en question (a), montrer que

$$(\lambda_{k+1} - \lambda^*)^2 \leq (\lambda_k - \lambda^*)^2 + (\rho_1\rho_2)^2\|d\|^2\|u_{k+1} - u^*\|^2 + 2\rho_1\rho_2(\lambda_k - \lambda^*)\langle d, u_{k+1} - u^*\rangle \qquad (3)$$

(d) En utilisant l'équation (1) obtenue en question (a), montrer que

$$2\rho_1(\lambda_k - \lambda^*)\langle d, u_{k+1} - u^*\rangle = 2\langle (Id_3 - \rho_1 A)(u_k - u^*), u_{k+1} - u^*\rangle - 2\|u_{k+1} - u^*\|^2 \qquad (4)$$

(e) En utilisant les questions (d) et (c), montrer que

$$\beta\|u_{k+1} - u^*\|^2 + \frac{1}{\rho_2}(\lambda_{k+1} - \lambda^*)^2 + \alpha\|u_{k+1} - u^*\|^2 \leq \frac{1}{\rho_2}(\lambda_k - \lambda^*)^2 + \alpha\|u_k - u^*\|^2, \qquad (5)$$

avec $\beta = 2 - 2\alpha - \rho_1^2\rho_2\|d\|^2$.
(f) Montrer qu'on peut choisir $\rho_2 > 0$ tel que $\beta > 0$.

Dans la suite, on fixe ρ_2 comme en question (f), i.e. pour que $\beta > 0$.

(g) En notant pour $k \in \mathbb{N}$, $v_k = \frac{1}{\rho_2}(\lambda_k - \lambda^*)^2 + \alpha\|u_k - u^*\|^2$, montrer que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente.

(h) En déduire que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ puis $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers respectivement u^* et λ^*.

II. Application

Soit alors

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2x$$

et

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + 2z = 0\right\}.$$

On considère le problème de minimisation de f sur K.

1. Montrer que f et K définis ci-dessus rentrent bien dans le cadre général proposé en **I**, i.e. identifier $\mathcal{J}$, $\mathcal{Q}$, A, b, d et vérifier qu'ils ont les propriétés éventuellement requises.

2. Écrire un code Python ou Scilab permettant de mettre en oeuvre l'algorithme proposé en **I**.3. sur la fonctionnelle f et l'espace K considérés dans cet exercice.

3. Proposez un autre algorithme que celui proposé en **I**.3. pour approcher le point de minimum. Détaillez-le. Savez-vous si cet algorithme converge dans ce cas précis ? Justifiez votre réponse.

∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼

Partie Éléments finis.

∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼∼

Exercice 2

On considère le problème suivant $(\mathcal{P})$: *Trouver $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \forall x \in]0,1[, & (6)\\ u(0) &= 0, & (7)\\ u'(1) &= 0, & (8) \end{aligned}$$

avec f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles.

1. (a) Comment s'appelle la condition au bord (7) ? La condition au bord (8) ?

   (b) Montrer que $u : x \mapsto \left(\int_0^1 f(t)dt\right) x - \int_0^x \left(\int_0^s f(t)dt\right) ds$ est solution du problème $(\mathcal{P})$.

   (c) Montrer l'unicité d'une solution au problème $(\mathcal{P})$.

(d) En s'inspirant de la stratégie proposée en cours et TD pour obtenir une formulation variationnelle, identifier une forme bilinéaire a et une forme linéaire l telle que si u est solution du problème précédent, alors

$$a(u,v) = l(v),\ \forall v \in \mathcal{V},$$

avec $\mathcal{V} = \{v \in W,\ v(0) = 0\}$, où on précisera W. *On veillera à montrer que a est bilinéaire et l est linéaire.*

(e) Énoncer le théorème de Lax Milgram dans le cas général.

On admettra dans la suite que l'espace $\tilde{\mathcal{V}}$ que l'on utilise en réalité pour écrire le problème variationnel ($\mathcal{V} \subset \tilde{\mathcal{V}}$) et grâce auquel on peut montrer directement des résultats d'existence et unicité de la solution est donné et qu'on ne demande pas son expression.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère une subdivision uniforme $(x_i)_{i\in\{0,..,N+1\}}$ de $[0,1]$ dont le pas est noté $h > 0$. On note pour tout $i \in \{0,..,N\}$, $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ et $\mathcal{V}_h$ l'espace suivant :

$$\mathcal{V}_h := \left\{ w \in \mathcal{C}^0([0,1]) \,|\, \text{ pour tout } i \in \{0,...,N\}, w_{/I_i} \in \mathbb{P}_1(I_i), w(0) = 0 \right\},$$

où pour tout $i \in \{0,...,N\}$, $\mathbb{P}_1(I_i)$ est l'ensemble des polynômes de degré au plus 1 sur I_i.

On admettra que $\mathcal{V}_h \subset \tilde{\mathcal{V}}$.

(a) Écrire la formulation variationnelle discrète.

(b) On cherche maintenant à déterminer une base de l'espace $\mathcal{V}_h$. Pour cela, à la base éléments finis de Lagrange $\mathbb{P}_1$ vue en cours et notée $(\varphi_i)_{i\in\{1,...,N\}}$, on rajoute une fonction de base, celle associée au noeud $x_{N+1} = 1$ que l'on note φ_{N+1}. Celle-ci vaut donc 1 en x_{N+1} et 0 ailleurs. Donner l'expression des $(\varphi_i)_{i\in\{1,...,N\}}$ ainsi que celle de φ_{N+1}.

(c) Montrer rigoureusement que $(\varphi_i)_{i\in\{1,...,N+1\}}$ est une base de l'espace $\mathcal{V}_h$. Quelle est la dimension de $\mathcal{V}_h$?

(d) Montrer que trouver $u_h \in \mathcal{V}_h$ solution du problème variationnel discret revient à résoudre un système linéaire que l'on précisera et dont la matrice est inversible.

(e) Expliciter et calculer numériquement les valeurs des termes diagonaux de cette matrice en utilisant l'élément de référence.

3. On souhaite estimer l'erreur commise entre u et u_h dans la norme considérée sur $\tilde{\mathcal{V}}$, que l'on notera $\|\cdot\|$. Quels sont les ingrédients de la preuve ?

4. Donner les étapes de construction d'un code de calcul pour résoudre numériquement le problème par une méthode d'éléments finis $\mathbb{P}_1$.