M1 IM/MPA : TD Optimisation et Éléments Finis

Feuille 1 : Formalisation de problèmes d'optimisation et premiers exemples.

Exercice 1
Design d'un building.
Pour économiser les coûts de l'énergie lors du chauffage ou la climatisation, un architecte envisage de construire un immeuble rectangulaire partiellement enterré. La superficie totale de tous les sols est souhaitée supérieure à $20000\,m^2$. On ne souhaite qu'un appartement par étage (un appartement peut être dans la partie enterrée). Les largeurs et longueurs limites des étages de l'immeuble sont de $50\,m$. Après concertation des experts, il a été décidé que le ratio entre longueur et largeur du plan doit être égal au nombre d'or φ et que chaque appartement doit être haut de $3.5\,m$. Les coûts de chauffage et de climatisation sont estimés par an à 100 euros par m^2 de la surface exposée de l'immeuble. On supposera que le coût d'excavation est proportionnel au volume à excaver. Le propriétaire a précisé que les coûts annuels ne doivent pas excéder 225000 euros. Formuler le problème de la détermination de la dimension de l'immeuble pour minimiser les coûts d'excavation.
On note

- d la profondeur de la partie de l'immeuble sous terre,
- h la hauteur de la partie de l'immeuble à l'air libre,
- l la longueur horizontale de l'immeuble,
- w la largeur de l'immeuble,
- n le nombre d'appartements.

1. Faire un dessin simple où l'on fera apparaître les quantités d, h, l, w.

2. Exprimer les variables d'optimisation et la fonction coût à minimiser.

3. Exprimer toutes les contraintes extraites du texte.

4. Formuler le problème d'optimisation complet.

5. Est-ce un problème d'optimisation en dimension finie ? Avec ou sans contraintes ? quadratique ?

Exercice 2
Un problème de portfolio.

Un manager de portfolio pour une compagnie d'investissement cherche à prendre des décisions d'investissement de telle façon à ce que les investisseurs aient au moins 10% de rentabilité en minimisant les risques majeurs de pertes. Pour les 6 dernières années, les rentabilités annuelles de 4 types d'investissements majeurs sont données par le tableau suivant :

Année	1	2	3	4	5	6	Moyenne
Blue chip (grosses sociétés côtées)	18.24	12.12	15.23	5.26	2.62	10.42	10.6443
Technologie	12.24	19.16	35.07	23.46	-10.62	-7.43	11.98
Biens immobiliers	8.23	8.96	8.35	9.16	8.05	7.29	8.34
Obligations	8.12	8.26	8.34	9.01	9.11	8.95	8.6317

Le manager du portfolio doit décider quel pourcentage du capital total investir dans chaque type d'investissement (tout le capital sera investit). L'objectif est de minimiser les risques de perte. Une mesure du risque est le montant de fluctuation de la rente par rapport à sa valeur moyenne. On définit la variance de l'investissement j comme suit :

$$\nu_{jj} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(r_{jk}-\mu_j)^2, \tag{1}$$

où n est le nombre total d'observations, r_{jk} la rentabilité de l'investissement j pour la k-ième observation (l'année dans l'exemple) et μ_j la valeur moyenne de l'investissement j, où $j \in \{1,...,p\}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ le nombre de type d'investissement. La variance mesure donc le risque au sein d'un même investissement.

Pour mesurer le risque entre les différents types d'investissements, on définit la co-variance entre 2 investissements i et j ($(i,j) \in \{1,.,p\}^2$), comme suit :

$$\nu_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(r_{ik}-\mu_i)(r_{jk}-\mu_j). \tag{2}$$

On définit alors la matrice de covariance, comme $V = (\nu_{ij})_{(i,j)\in\{1,..,p\}^2}$, et le risque R comme $R = ^t xVx$, avec $x \in \mathbb{R}^p$.

1. Donner les 4 variables d'optimisation.

2. Ecrire le problème d'optimisation complet.

3. Est-ce un problème d'optimisation quadratique ? en dimension finie ? avec ou sans contraintes ?

Exercice 3
Produit scalaire euclidien et matrices.
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. On rappelle que l'on peut écrire sous forme matricielle le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$: pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle u,v\rangle = ^t uv = ^t vu = \langle v,u\rangle$. On notera $\|\cdot\|$ la norme canoniquement associée à ce produit scalaire.

1. Montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\langle Au,v\rangle = \langle u, ^t Av\rangle$.

2. Qu'en déduire si A est symétrique ?

3. Montrer que, si A est symétrique, alors pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\langle A(u+v), u+v\rangle = \langle Au,u\rangle + \langle Av,v\rangle + 2\langle Au,v\rangle.$$

4. Comment montre-t-on qu'une matrice symétrique $A \in M_n(\mathbb{R})$ est définie positive ?

5. Soit A une matrice symétrique définie positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On note $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les n valeurs propres de A rangées par ordre croissant. Montrer que pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, $\langle Aw, w\rangle \geq \lambda_1 \|w\|^2$ et que pour tout $w \in \mathbb{R}^n$, $\|Aw\| \leq \lambda_n \|w\|$.
On pourra utiliser la décomposition de w sur une base de vecteurs propres de A.

On se donne maintenant une matrice rectangulaire $A \in M_{np}(\mathbb{R})$ (avec $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, avec $n \geq p$). On suppose que A est de rang maximal p et donc que l'application linéaire canoniquement associée à A est injective.

6. Montrer que si pour $x \in \mathbb{R}^p$, ${}^tAAx = 0$, alors $x = 0$. On pourra étudier $\langle {}^tAAx, x\rangle$.

7. En déduire que ${}^tAA \in M_{pp}(\mathbb{R})$ est inversible.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto -(x-4)^2 - (y-4)^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (g_1(x,y) = x + y - 4, g_2(x,y) = x + 3y - 9)$. On note

$$K := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\, g_1(x,y) \leq 0,\, g_2(x,y) \leq 0\right\}.$$

On s'intéresse au problème de maximisation suivant :

$$\max_{(x,y)\in K} f(x,y).$$

Montrer que ce problème admet une solution.

Exercice 5
Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique euclidien sur $\mathbb{R}^d$. On considère la fonctionnelle

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, v \mapsto \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle + \langle b, v\rangle,$$

avec A une matrice symétrique définie positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^d$. On note $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_d$ les d valeurs propres de A rangées par ordre croissant.

1. Écrire mathématiquement le problème d'optimisation consistant à minimiser la fonctionnelle $\mathcal{J}$ sur $\mathbb{R}^d$. Est-ce un problème d'optimisation quadratique ? en dimension finie ? avec ou sans contraintes ?

2. Calculer le gradient et la Hessienne de $\mathcal{J}$ en tout point de $\mathbb{R}^d$.

3. Montrer que $\mathcal{J}$ est α-convexe, avec $\alpha > 0$ à déterminer.

4. Qu'en déduire sur le problème d'optimisation considéré en 1.

5. On se donne les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + 3y,$$

$$f_2(x,y) = x^2 + xy + 2y^2,$$
$$f_3(x,y) = x^2 + xy - 2y^2$$

et définies sur $\mathbb{R}^3$

$$f_4(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 - 17x_2^2 - x_3x_2 + 7x_3^2,$$
$$f_5(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_1x_2x_3 - 2x_1x_3 - 17x_2^2 - x_3x_2 + 7x_3^2,$$
$$f_6(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 - 17x_2^2 - x_3x_2 + 7x_3^2,$$
$$f_7(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 - 17x_2^2 - x_3x_2 + 7x_3^2 + \frac{1}{2}x_1 + 4x_2,$$

a) Parmi les fonctions définies ci-dessus, lesquelles sont des formes quadratiques ? des fonctionnelles quadratiques ?

b) Pour chaque forme quadratique ou fonctionnelle quadratique, identifier les éléments pertinents parmi : $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = \frac{1}{2}{}^t xAx + {}^t bx + c$.

c) Parmi les fonctionnelles quadratiques, identifier celles qui sont convexes ou α-convexes avec $\alpha > 0$.

Exercice 6
Approcher un jeu de valeurs.

On cherche à trouver une surface qui approche au mieux le jeu de valeurs observé suivant :

Numéro du Point	x	y	z_{obs}
1	0	1	1.26
2	0.25	1	2.19
3	0.5	1	0.76
4	0.75	1	1.26
5	1	2	1.86
6	1.25	2	1.43
7	1.5	2	1.29
8	1.75	2	0.65
9	2	2	1.6

Pour trouver une surface qui convienne, on commence par partir d'un a priori sur la forme de cette dernière. Ici, on considère la forme générale :

$$z = c_1x^2 + c_2y^2 + c_3xy, \tag{3}$$

avec $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$.

Le but est maintenant de déterminer les valeurs optimales des paramètres c_1, c_2, c_3 pour minimiser la somme des carrés des erreurs entre les valeurs de z observées et les valeurs de z calculées en utilisant la forme générale.

1. Déterminer les variables d'optimisation.

2. Déterminer la fonction objectif (ou fonction coût).

3. Écrire le problème d'optimisation. On pourra noter $z_{obs,i}$ la i-ème observation et (x_i, y_i) les points qui y sont associés pour $i \in \{1, ..., 9\}$.

4. Est-ce un problème d'optimisation quadratique ? en dimension finie ? avec ou sans contraintes ?

5. Montrer que que pour tout $c \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{J}(\mathbf{c}) = \|\mathbf{z_{obs}} - A\mathbf{c}\|^2$, où $\mathbf{z_{obs}} = \begin{pmatrix} z_{obs,1} \\ z_{obs,2} \\ \vdots \\ z_{obs,9} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ et déterminer A. **Un tel problème est dit problèmes aux moindres carrés.**

6. Retrouver que la fonction coût associée, que l'on notera $\mathcal{J}$, est quadratique.