M1 IM/MPA : TD Optimisation et Éléments Finis

Feuille 4 : Problèmes d'optimisation avec contraintes.

*Les questions ou exercices avec * ne sont pas prioritaires pour les IM.*

Exercice 1
Cas de contraintes d'égalité

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + 2y + z - 1, 2x - y - 3z - 4)$. On note

$$K := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = (0, 0)\right\}.$$

On cherche à résoudre le problème de minimisation suivant :

$$\min_{(x,y,z)\in K} f(x, y, z).$$

1. Montrer que ce problème admet une solution.

2. Résoudre ce problème d'optimisation.

Exercice 2
Inégalité arithmético-géométrique

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto x_1 x_2 ... x_n$. On note $\Gamma = \left\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\right\}$.

1. Montrer que f admet un maximum global sur Γ et le déterminer.

2. En déduire l'inégalité arthmético-géométrique : pour tout $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Exercice 3
Cas de contraintes d'inégalité

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -(x-4)^2 - (y-4)^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (g_1(x, y) = x+y-4, g_2(x, y) = x + 3y - 9)$. On note

$$K := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g_1(x, y) \leq 0,\ g_2(x, y) \leq 0\right\}.$$

On cherche à résoudre le problème de maximisation suivant :

$$\max_{(x,y)\in K} f(x, y).$$

1. Montrer que ce problème admet une solution.

2. Résoudre ce problème d'optimisation.

Exercice 4 *Exemples de calculs de projections*

1. On se donne $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $i \in \{1, .., n\}$, $a_i \leq b_i$. On définit l'ensemble suivant

$$C := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\, a_i \leq x_i \leq b_i, i \in \{1, .., n\}\}.$$

a) Montrer que la projection orthogonale p_C sur C existe.

b) Montrer que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $(p_C(x_1, x_2, ..., x_n))_i = \min(\max(x_i, a_i), b_i)$, si $(p_C(x_1, x_2, ..., x_n))_i$ désigne la i-ème composante de $p_C(x_1, x_2, ..., x_n)$.

2*. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on note $K := \bar{B}(x_0, R)$, où $\bar{B}(x_0, R)$ désigne la boule fermée de centre x_0 et de rayon R.

Montrer que p_K la projection orthogonale sur K existe et que

$$\begin{array}{rrcl} p_K: & \mathbb{R}^n & \to & K, \\ & x & \mapsto & x, \text{ si } x \in K, \\ & & & x_0 + R\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}, \text{ si } x \notin K. \end{array}$$

Exercice 5 *Annales 2021*

Notations.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_d$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^d$ et $\| \cdot \|_d$ la norme associée.

On souhaite étudier la convergence d'un algorithme permettant d'approcher la solution d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contraintes d'égalité affines.

Soit $(d, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, avec $m < d$. Le cadre général porte sur une fonctionnelle

$$\mathcal{J} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, u \mapsto \frac{1}{2}\langle Au, u \rangle_d - \langle b, u \rangle_d + c,$$

avec $A \in M_d(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^d$, $c \in \mathbb{R}$, et un espace

$$\mathcal{Q} = \left\{u \in \mathbb{R}^d,\, Du - e = 0\right\},$$

avec $D \in M_{md}(\mathbb{R})$ de rang maximal, $e \in \mathbb{R}^m$.

1. *Étude du problème d'optimisation.*

a. Étudier l'existence et l'unicité d'un point de minimum de $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{Q}$.

b. Montrer que si $u^* \in \mathcal{Q}$ est un point de minimum de $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{Q}$ alors il existe $(\lambda_1^*, ..., \lambda_m^*) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\nabla\mathcal{J}(u^*) + {}^tD\lambda^* = 0,$$

avec $\lambda^* = \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \vdots \\ \lambda_m^* \end{pmatrix}$.

2. *Étude d'un algorithme d'approximation du point de minimum.*

On considère l'algorithme suivant pour approcher le point de minimum de la fonctionnelle $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{Q}$.

> Trouver pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\lambda_k, u_k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d$ suivant l'algorithme suivant :
>
> *Initialisation* : λ_0, $\rho > 0$ donnés.
>
> *Itération* : pour $k \in \mathbb{N}$,
> - u_k est calculé comme étant le point de minimum sur $\mathbb{R}^d$ de la fonction $\varphi_k : u \mapsto \mathcal{J}(u) + \langle \lambda_k, (Du - e) \rangle_m$, i.e. on définit u_k par $\varphi_k(u_k) = \min_{u \in \mathbb{R}^d} \varphi_k(u)$.
> - $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(Du_k - e)$.

a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Y a-t-il existence et unicité du point de minimum au problème de minimisation à résoudre à l'itération k i.e. du problème $\min_{u \in \mathbb{R}^d} \varphi_k(u)$.

On cherche maintenant à montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.
b. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(i) Écrire la condition nécessaire d'optimalité en u_k associée au problème de minimisation de φ_k sur $\mathbb{R}^d$ à chaque itération. En déduire, en utilisant la question 1.b., que ${}^tD(\lambda_k - \lambda^*) = -(\nabla \mathcal{J}(u_k) - \nabla \mathcal{J}(u^*))$.

(ii) Montrer que $\lambda_{k+1} - \lambda^* = \lambda_k - \lambda^* + \rho D(u_k - u^*)$.

(iii) Montrer que

$$\|\lambda_{k+1} - \lambda^*\|_m^2 \leq \|\lambda_k - \lambda^*\|_m^2 - \rho(2\lambda_{min} - \rho |||D|||^2)\|u_k - u^*\|_d^2,$$

où $|||D||| = \sup_{u \in \mathbb{R}^d, u \neq 0} \frac{\|Du\|_m}{\|u\|_d}$ et λ_{min} est la plus petite valeur propre de A.

c. En déduire que si $0 < \rho < \frac{2\lambda_{min}}{|||D|||^2}$, la suite $(\|\lambda_k - \lambda^*\|_m^2)_{k \in \mathbb{N}}$ converge.

d. Déduire de b. et c. que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers u^*.

3. Proposer un code de calcul en Scilab ou python permettant de résoudre le problème de minimisation en utilisant cet algorithme.

Exercice 6
Théorème de projection sur un convexe en dimension finie*.

Dans cet exercice, on cherche à démontrer le théorème suivant.

Théorème de projection sur un convexe en dimension finie. *Soient $d \in \mathbb{N}^*$, K une partie convexe fermée et non vide de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Alors, il existe un unique $x_K \in K$, tel que*

$$\|x - x_K\| = \min_{y \in K} \|x - y\|. \tag{1}$$

De plus, x_K est caractérisé par

$$\langle x - x_K, y - x_K \rangle \leq 0, \forall y \in K. \tag{2}$$

On dira alors que x_K est la projection de x sur K et on note $x_K = p_K(x)$. La projection p_K est de plus 1-lipschitzienne.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$.

1. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \|x - y\|$ est convexe, continue et "infinie à l'infini".

2. En déduire l'existence de x_K.

3. On cherche maintenant à montrer l'unicité du minimiseur. On suppose donc dans cette question qu'il existe deux points x_K et $\tilde{x}_K$ appartenant à $\mathbb{R}^d$ distincts, qui réalisent le minimum de f sur K.

(a) Montrer que

$$\|x_K - \tilde{x}_K\|^2 = 2\|x_K - x\|^2 + 2\|\tilde{x}_K - x\|^2 - 4\left\|x - \frac{x_K + \tilde{x}_K}{2}\right\|^2.$$

(b) Conclure en utilisant la convexité de K et la définition de x_K et $\tilde{x}_K$.

On note $p_K(x)$, l'unique solution du problème de minimisation.

4. On cherche maintenant à montrer la caractérisation.

(a) Supposons que x_K soit solution du problème de minimisation. Soit $y \in K$. En utilisant la convexité de K, montrer que

$$\langle x - x_K, y - x_K \rangle \leq t\|y - x_K\|^2, \tag{3}$$

pour tout $t \in]0, 1]$. En déduire la première partie de l'assertion.

(b) Réciproquement, supposer que $z \in K$ vérifie pour tout $y \in K$,

$$\langle x - z, y - z \rangle \leq 0, \tag{4}$$

et montrer que pour tout $y \in K$,

$$\|x - z\| \leq \|x - y\|. \tag{5}$$

Conclure.

5. Montrer enfin que p_K est 1-Lipschitzienne.

6. Montrer que si K est un sous-espace vectoriel de E, alors la caractérisation s'écrit :

$$\langle x - x_K, y \rangle = 0, \forall y \in K.$$

Solutions des exercices

Solution exercice 1

1) Le problème considéré est un problème d'optimisation sous contrainte en dimension finie. L'application $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$ définie sur $\mathbb{R}^3$ est une fonction continue car polynomiale en ses variables. De plus f est infinie à l'infini sur $\mathbb{R}^3$. En effet, on peut le prouver directement. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K telle que $\|u_n\| \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Montrons que $f(u_n) \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}^3$, on peut donc écrire $u_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$ et on sait que $\|u_n\| \to +\infty$, donc en particulier $\|u_n\|^2 \to +\infty$. Or $f(u_n) = f(x_n, y_n, z_n) = x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = \|u_n\|^2$, d'où le résultat.

Étudions maintenant l'espace des contraintes K. L'application

$$(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (x + 2y + z - 1, 2x - y - 3z - 4)$$

définie sur $\mathbb{R}^3$ est continue. On peut grâce à cela montrer que l'ensemble des contraintes est un ensemble fermé. En effet, on remarque que l'on peut écrire K comme l'image réciproque du singleton $\{(0, 0)\}$ par g :

$$K = g^{-1}(\{(0, 0)\}).$$

L'ensemble K est donc l'image réciproque d'un fermé par une application continue, il est donc fermé. De plus, il est non vide : on peut par exemple remarquer que $(0, \frac{7}{5}, -\frac{9}{5}) \in K$.

Géométriquement, l'ensemble $g = 0$, correspond à l'intersection de deux plans affines non parallèles (l'un défini par $g_1 = 0$ et l'autre par $g_2 = 0$), c'est à dire à une droite.

Grâce à un théorème vu en cours, on sait que ce problème admet au moins une solution.

On remarque également que K est un ensemble convexe puisque g est affine. En effet, si $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in K$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in K$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $tu_1 + (1 - t)u_2 = (tx_1 + (1 - t)x_2, ty_1 + (1 - t)y_2, tz_1 + (1 - t)z_2) \in K$ puisque

$$tx_1 + (1-t)x_2 + 2(ty_1 + (1-t)y_2) + tz_1 + (1-t)z_2 - 1 \quad = \quad t\underbrace{(x_1 + 2y_1 + z_1 - 1)}_{=0 \text{ car } u_1 \in K} + (1-t)\underbrace{(x_2 + 2y_2 + z_2 - 1)}_{=0 \text{ car } u_2 \in K}$$

et

$$2(tx_1 + (1-t)x_2) - (ty_1 + (1-t)y_2) - 3(tz_1 + (1-t)z_2) - 4 \quad = \quad t\underbrace{(2x_1 - y_1 - 3z_1 - 4)}_{=0 \text{ car } u_1 \in K} + (1-t)\underbrace{(2x_2 - y_2 - 3z_2 - 4)}_{=0 \text{ car } u_2 \in K}$$

L'ensemble K est donc convexe.

On peut de plus montrer que f est α-convexe sur tout $\mathbb{R}^3$ avec $\alpha > 0$. On peut par exemple utiliser le fait que f est une fonctionnelle quadratique, elle est $\mathcal{C}^2$ sur tout $\mathbb{R}^3$ et on a $Hess_u f = Id$. En particulier, f est donc 1-convexe sur $\mathbb{R}^3$. Et elle est donc aussi 1-convexe sur K (ensemble convexe). Elle est donc strictement convexe sur K. On sait donc que le problème d'optimisation sur K admet au plus une solution (i.e. soit aucune solution, soit une solution). Comme on a montré plus haut que le problème admet au moins une solution, on sait donc qu'il existe une unique solution à ce problème d'optimisation sur K.

2) On cherche à appliquer le théorème III.1.6. puisque l'on reconnaît le cas de contraintes d'égalité. Les fonctions f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur tout $\mathbb{R}^3$. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Montrons que le système $\{\nabla g_1(u), \nabla g_2(u)\}$

forme un système libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$0 = \lambda_1 \nabla g_1(u) + \lambda_2 \nabla g_2(u)$$

Cela équivaut à

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{array}{l} \lambda_1 = -2\lambda_2 \\ \lambda_2 = 2\lambda_1 \\ \lambda_1 = 3\lambda_2 \end{array}$$

Ce qui implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Donc le système $\{\nabla g_1(u), \nabla g_2(u)\}$ est libre. Par conséquent, on peut appliquer le théorème III.1.6. Si $u^* = (x, y, z) \in K$ est un point de minimum de f sur K, alors il existe deux multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla f(x, y, z) + \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z) = 0.$$

Ce qui s'écrit

$$2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \tag{6}$$
$$2y + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \tag{7}$$
$$2z + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0. \tag{8}$$

Comme $u^* = (x, y, z) \in K$, on trouve

$$\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - 3z = 4 \end{array} \iff \begin{array}{l} 5x + 5y = 7 \ (\dagger) \\ 5x - 5z = 9 \ (\ddagger). \end{array}$$

En injectant ($\dagger$) dans (7) et ($\ddagger$) dans (8), on obtient

$$\begin{array}{l} 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ -2x + 2\lambda_1 - \lambda_2 = -\frac{14}{5}, \\ 2x + \lambda_1 - 3\lambda_2 = \frac{18}{5} \end{array} \iff \begin{array}{l} 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{14}{5}, \\ 5\lambda_2 = -\frac{18}{5} \end{array} \iff \begin{array}{l} x = \frac{16}{15}, \\ \lambda_1 = -\frac{52}{75}, \\ \lambda_2 = -\frac{18}{25}. \end{array} \tag{9}$$

En utilisant (9) et ($\dagger$)-($\ddagger$) il vient $y = \frac{1}{3}$ et $z = -\frac{11}{15}$. Donc la solution du problème de minimisation initial avec contraintes est $(x = \frac{16}{15}, y = \frac{1}{3}, z = -\frac{11}{15})$.

On peut aussi remarquer que l'on aurait pu se contenter de prouver qu'il existe au moins une solution et d'en déduire l'unicité simplement par le fait que l'on trouve une seule solution au système d'équation.

Solution exercice 2

1) Le problème considéré est un problème d'optimisation sous contrainte en dimension finie avec des contraintes mixtes (d'égalité et inégalité). On peut noter que

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall i \in \{1, ..., n\}, h_i(x) \leq 0, \text{ et } g(x) = 0\},$$

si pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto -x_i$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=1}^n x_i - 1$. L'ensemble Γ est un ensemble fermé (image réciproque d'un fermé par une application continue) et borné car si

$x \in \Gamma$, alors $\forall i \in \{1, ...n\}$, $0 \leq x_i \leq 1$. C'est donc un ensemble compact (il est même convexe). De plus l'application f est continue (car c'est un polynôme en ses variables) sur $\mathbb{R}^n$ et donc sur Γ. Donc f possède un maximum global sur Γ (toute application continue sur un compact admet un maximum global).

2) Supposons que a soit un point de maximum global de f sur Γ. Tout d'abord on a $a \in]0, +\infty[^n$, puisque si un des a_i pour $i \in \{1, ..., n\}$ est nul, alors $f(a) = 0$. Et comme $a \in \mathbb{R}_+^n$, on sait que f est positive. On aurait donc $\max_{x\in\Gamma} f(x) = \min_{x\in\Gamma} f(x)$ et donc $f \equiv 0$, ce qui n'est pas vrai. Ce qu'on vient donc de prouver, c'est que les contraintes d'inégalité en a pour l'ensemble Γ sont toutes inactives en a.

De plus, les applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \prod_{i=1}^n x_i$, g et h_i pour $i \in \{1, ..., n\}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. On sait donc par un théorème du cours qu'il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(a) + \lambda \nabla g(a) = 0,$$

soit

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \qquad \prod_{k=1, k\neq i}^{n} a_k + \lambda = 0.$$

Ou encore

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \ \frac{f(a)}{a_i} = -\lambda$$

Mais $f(a) > 0$ (car $a \in (]0, +\infty[)^n$) implique que $f(a) \neq 0$ et donc $\lambda \neq 0$ d'après l'équation précédente. On en déduit que les a_i sont tous égaux à une constante c donnée par $c = -f(a)/\lambda$. Par ailleurs on a $\sum_{i=1}^n a_i - 1 = 0$, soit $nc - 1 = 0$, d'où $c = \frac{1}{n}$. Donc finalement, sur Γ, f atteint son maximum en $(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n})$. En d'autres termes,

$$\forall x \in \Gamma, \quad f(x) \leq f\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^n.$$

Si on considère maintenant $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, en considérant $\tilde{x} = \frac{x}{\sum_{i=1}^n x_i}$, on obtient $\tilde{x} \in \Gamma$ et en appliquant l'inégalité précédente à $\tilde{x}$ on obtient

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \forall x \in (\mathbb{R}_+)^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Le cas $x = 0_{\mathbb{R}^n}$ ne pose pas de problème puisque dans ce cas, l'inégalité est encore vérifiée.

Solution exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -(x-4)^2 - (y-4)^2$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (g_1(x, y) = x+y-4, g_2(x, y) = x + 3y - 9)$. On note

$$K := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ g_1(x, y) \leq 0, \ g_2(x, y) \leq 0\right\}.$$

On cherche à résoudre le problème de maximisation suivant :

$$\max_{(x,y)\in K} f(x, y).$$

1. Montrons que ce problème admet une solution.
Comme c'est un problème de maximisation, pour appliquer le cours, on se ramène à un problème de minimisation, en passant par $-f$.

On a :

— K est fermé, comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Cette fois ci, on remarque que $K = g^{-1}(]-\infty, 0]\times]-\infty, 0])$ et g est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $]-\infty, 0]\times]-\infty, 0]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. De plus K est non vide puisque $(0,0) \in K$. On remarque que g_1 et g_2 sont des applications affines, on a donc en particulier pour tout $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $t \in [0,1]$, $g_i(tu_1 + (1-t)u_2) = tg_i(u_1) + (1-t)g_i(u_2)$. Donc si $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \in K \times K$, on en déduit que

$$g_i(tu_1 + (1-t)u_2) = t\underbrace{g_i(u_1)}_{\leq 0} + (1-t)\underbrace{g_i(u_2)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Donc $tu_1 + (1-t)u_2 \in K$. Donc K est un ensemble convexe.

— $-f$ est infinie à l'infini. En effet, ici $-f$ est définie sur tout $\mathbb{R}^2$ et on peut par exemple calculer la Hessienne de $-f$, on voit que c'est $2Id$, $-f$ est donc 2-convexe sur $\mathbb{R}^d$ et sur l'ensemble convexe K également. On sait donc que $-f$ est infinie à l'infini sur $\mathbb{R}$, par théorème du cours.

On sait donc par le théorème I.4.2. du cours que $-f$ admet un minimum sur K et donc f admet un maximum sur K.

De plus le fait que f soit strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ (car 2-convexe sur$\mathbb{R}^2$) et que K soit convexe permet d'affirmer qu'elle est strictement convexe sur K et donc qu'il existe au plus un point de minimum sur K. Et donc en combinant avec le fait qu'il y en a au moins un, on a la conclusion. Il existe un unique point de minimum sur K.

2. On cherche à résoudre ce problème d'optimisation et on va appliquer le théorème III.1.10. On a déjà que $f \in \mathcal{C}^1$.

On ne sait pas a priori dire si en un point donné les contraintes sont actives ou pas. Par contre, dans tous les cas g_1 et g_2 sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Donc toutes les familles de vecteurs $(\nabla g_1(x))$, $(\nabla g_2(x))$, $(\nabla g_1(x), \nabla g_2(x))$ sont libres pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Donc quelque soit le cas de figure on est en mesure d'appliquer le théorème du cours relatifs aux contraintes d'inégalités.

On écrit alors les conditions nécessaires d'optimalité qui nous donnent que si $(x^*, y^*) \in K$ est minimum sous contrainte de $-f$ sur K, alors il existe $(\lambda_1^*, \lambda_2^*) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x}(x^*, y^*) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x}(x^*, y^*) = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y}(x^*, y^*) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial y}(x^*, y^*) = 0. \tag{11}$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
2(x^*-4)+\lambda_1+\lambda_2 &= 0, & (12)\\
2(y^*-4)+\lambda_1+3\lambda_2 &= 0. & (13)
\end{aligned}
$$

On étudie alors toutes les possibilités suivant si les contraintes sont actives ou pas.

— Si les deux contraintes sont actives à l'optimum, alors

$$
\begin{aligned}
x^*+y^*-4 &= 0, & (14)\\
x^*+3y^*-9 &= 0. & (15)
\end{aligned}
$$

On peut résoudre ce système et on trouve $(x^*, y^*) = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. Les conditions nécessaires d'optimalité s'écrivent alors :

$$
\begin{aligned}
-5+\lambda_1+\lambda_2 &= 0, & (16)\\
-3+\lambda_1+3\lambda_2 &= 0. & (17)
\end{aligned}
$$

Et donc $(\lambda_1, \lambda_2) = (6, -1)$. Ce qui n'est pas possible puisque l'on doit avoir $\lambda_2 \geq 0$.

— Si g_1 est active au point de minimum, mais pas g_2, alors

$$
\begin{aligned}
x^*+y^*-4 &= 0, & (18)\\
x^*+3y^*-9 &< 0. & (19)
\end{aligned}
$$

On sait aussi par le théorème III.1.10 que $\lambda_2 = 0$. En utilisant la condition nécessaire d'optimalité, on trouve donc également :

$$
\begin{aligned}
2(x^*-4)+\lambda_1 &= 0, & (20)\\
2(y^*-4)+\lambda_1 &= 0. & (21)
\end{aligned}
$$

Et donc $x^* = y^*$. La contrainte active donne ensuite $x^* = y^* = 2$. Puis $\lambda_1 = 4$ en utilisant l'une des deux équations de la condition nécessaire d'optimalité. On a donc une solution du système $(x^*, y^*, \lambda_1, \lambda_2) = (2, 2, 4, 0)$.

— Si g_2 est active au point de minimum, mais pas g_1, alors

$$
\begin{aligned}
x^*+y^*-4 &< 0, & (22)\\
x^*+3y^*-9 &= 0. & (23)
\end{aligned}
$$

On sait aussi par le théorème que $\lambda_1 = 0$. En utilisant la condition nécessaire d'optimalité, on trouve donc également :

$$
\begin{aligned}
2(x^*-4)+\lambda_2 &= 0, & (24)\\
2(y^*-4)+3\lambda_2 &= 0. & (25)
\end{aligned}
$$

Et donc

$$2(y^*-4)-6(x^*-4)=0. \tag{26}$$

D'où

$$3x^*-y^*-8=0. \tag{27}$$

En combinant (23) et (27), on trouve une seule valeur possible de $(x^*, y^*) = (\frac{33}{10}, \frac{19}{10})$ qui viole la condition $x^* + y^* - 4 < 0$.

— Si les deux conditions sont inactives au point de minimum, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. On trouve donc $x^* = 4$ et $y^* = 4$, qui violent les deux contraintes.

Le seul point pouvant convenir est dont $(2, 2)$. Par la question 1. , on sait donc que c'est un maximum qui est de plus un maximum global (f est concave).

Solution exercice 4

1. On se donne $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $i \in \{1, .., n\}$, $a_i \leq b_i$. On définit l'ensemble suivant

$$C := \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ a_i \leq x_i \leq b_i, i \in \{1, .., n\}\}.$$

a) Montrons que C est un convexe fermé.

Soient $(x, y) \in C$, $t \in [0, 1]$. On utilise la définition de C pour obtenir $ta_i + (1-t)a_i \leq tx + (1-t)y \leq tb_i + (1-t)b_i$ et donc $tx + (1-t)y \in C$. On en déduit que C est convexe.

Pour montrer que C est fermé, on peut par exemple remarquer que C est le pavé $\Pi_{i=1}^n [a_i, b_i]$ qui est un produit cartésien d'ensembles fermés (ici les segments $[a_i, b_i]$ pour $i \in \{1, ..., n\}$). On peut aussi tout redémontrer : prendre une suite de C qui converge dans $\mathbb{R}^n$ et montrer qu'elle converge dans C.

La projection est donc bien définie par le théorème de projection sur un convexe fermé rappelé dans le cours.

b) Soit P l'application définie en composantes comme suit : pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $(P(x_1, x_2, ..., x_n))_i = \min(\max(x_i, a_i), b_i)$, si $(P(x_1, x_2, ..., x_n))_i$ désigne la i-ème composante de $P(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Autrement dit

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n, \\ & x & \mapsto & ((P(x_1, x_2, ..., x_n))_i)_{i \in \{1, ..., n\}} \end{array}$$

Avec pour $i \in \{1, ..., n\}$, $(P(x_1, x_2, ..., x_n))_i = \begin{cases} a_i, \text{ si } x_i \leq a_i, \\ x_i, \text{ si } a_i \leq x_i \leq b_i, \\ b_i, \text{ si } x_i \geq b_i. \end{cases}$

Ce qui donne pour $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$,

$$\begin{array}{rcl} (x - P(x))_i & = & x_i - a_i, \text{ si } x_i \leq a_i, \\ & & 0, \text{ si } a_i \leq x_i \leq b_i, \\ & & x_i - b_i, \text{ si } x_i \geq b_i. \end{array}$$

Soit $y \in C$, on a :

— si $x_i \leq a_i$, $|x_i - (P(x))_i| = a_i - x_i \leq y_i - x_i = |x_i - y_i|$,

— si $a_i \leq x_i \leq b_i$, $|x_i - (P(x))_i| = 0 \leq |x_i - y_i|$,

— si $x_i \geq b_i$, $|x_i - (P(x))_i| = |b_i - x_i| = x_i - b_i \leq x_i - y_i = |x_i - y_i|$

Donc, pour tout $y \in C$, on a $|x_i - (P(x))_i| \leq |x_i - y_i|$. On obtient alors

$$\|x - P(x)\| \leq \|x - y\|, \forall y \in C.$$

Il faut aussi montrer que $P(x) \in C$, ici c'est le cas puisque pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $(P(x))_i \in [a_i, b_i]$ (voir les expressions trouvées plus haut !).

On en conclut que $P(x)$ est le point de minimum de $y \mapsto \|x - y\|$ sur C et c'est donc bien la projection sur le convexe fermé C.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $R > 0$, on note $K := \bar{B}(x_0, R)$, où $\bar{B}(x_0, R)$ désigne la boule fermée de centre x_0 et de rayon R.

Montrons que p_K la projection orthogonale sur K existe et que

$$\begin{array}{rrcl} p_K : & \mathbb{R}^n & \to & K, \\ & x & \mapsto & x, \text{ si } x \in K, \\ & & & x_0 + R\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}, \text{ si } x \notin K. \end{array}$$

Tout d'abord la boule fermée est bien convexe et fermée. La projection sur K est donc bien définie.

Définissons l'application p_K comme proposé plus haut. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a tout d'abord $p_K(x) \in K$, puisqu'on a bien $\|p_K(x) - x_0\| \leq R$. Montrons que pour tout $y \in K$, on a :

$$\|x - p_K(x)\| \leq \|x - y\|.$$

On aura ainsi montré que p_K est bien la projection voulue.

Commençons par le cas où $x \notin K$.

Définissons $\tilde{y} = x_0 + \lambda\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}$ où λ est fixé tel que $\langle y - \tilde{y}, x - x_0\rangle = 0$. **Faire un dessin pour bien se représenter ce que signifie $p_K(x)$ et $\tilde{y}$.** On obtient

$$\langle y - \tilde{y}, x - x_0\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle y - x_0 - \lambda\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}, x - x_0\rangle. \tag{28}$$

Ce qui donne

$$\lambda = \frac{\langle y - x_0, x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|(x - x_0) + \underbrace{(x_0 - \tilde{y})}_{-\lambda\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}} + \tilde{y} - y\|^2 & (29) \\ &= \|(1 - \frac{\lambda}{\|x - x_0\|})(x - x_0) + \tilde{y} - y\|^2 & (30) \end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité de $y - \tilde{y}$ et $x - x_0$, on obtient

$$\|x - y\|^2 = (1 - \frac{\lambda}{\|x - x_0\|})^2\|x - x_0\|^2 + \underbrace{\|\tilde{y} - y\|^2}_{\geq 0} \tag{31}$$

On a également, si $x \notin K$,

$$\begin{aligned}
\|x - p_K(x)\|^2 &= \|x - x_0 - R\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\|^2 && (32)\\
&= (1 - \frac{R}{\|x - x_0\|})^2\|x - x_0\|^2 && (33)
\end{aligned}$$

On a aussi comme $\lambda = \frac{\langle y - x_0, x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|}$,

$$\lambda \leq \|y - x_0\| \leq R, \tag{34}$$

il suffit pour l'inégalité de gauche d'utiliser une inégalité de Cauchy-Schwarz et pour celle de gauche d'utiliser que $y \in K$. Et comme $x \notin K$, on a $\|x - x_0\| \geq R \geq \|y - x_0\|$, et donc

$$\lambda \leq \|x - x_0\|.$$

D'où $1 - \frac{\lambda}{\|x - x_0\|} \geq 0$.

De même, comme $x \notin K$, on a $1 - \frac{R}{\|x - x_0\|} \geq 0$.

En combinant toutes ces égalités et inégalités, on trouve :

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &\geq (1 - \frac{\lambda}{\|x - x_0\|})\|x - x_0\| && (35)\\
&\geq (1 - \frac{R}{\|x - x_0\|})\|x - x_0\| && (36)\\
&= \|x - p_K(x)\| && (37)
\end{aligned}$$

Si $x \in K$, alors comme $x - p_K(x) = 0$, on a pour tout $y \in K$, $\|x - p_K(x)\| \leq \|x - y\|$.

On en conclut que p_K est donc bien la projection sur K.

Solution exercice 5

voir fichier à part.

Solution exercice 6

Soit $x \in \mathbb{R}^d$.

1. Montrons que la fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \|x - y\|$ est convexe, continue et "infinie à l'infini".

f est continue comme composée de fonctions continues. De plus, $h : x \mapsto \|x\|$ est convexe puisque $\forall t \in [0, 1]$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\|tx_1 + (1 - t)x_2\| \leq t\|x_1\| + (1 - t)\|x_2\|.$$

Puis $g : y \mapsto x - y$ est affine, donc en particulier $\forall t \in [0, 1]$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $g(ty_1 + (1 - t)y_2) = x - (ty_1 + (1 - t)y_2) = tx + (1 - t)x - (ty_1 + (1 - t)y_2) = t(x - y_1) + (1 - t)(x - y_2) = tg(y_1) + (1 - t)g(y_2)$.

Donc comme $f = h \circ g$, on a $\forall t \in [0,1]$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} f(ty_1 + (1-t)y_2) &= h(g(ty_1 + (1-t)y_2)) && (38)\\ &= h(tg(y_1 + (1-t)g(y_2))) && (39)\\ &\leq th(g(y_1)) + (1-t)h(g(y_2)) && (40)\\ &\leq tf(y_1) + (1-t)f(y_2) && (41)\end{aligned}$$

On peut aussi directement utiliser le résultat que l'on vient de démontrer. La composition d'une fonction convexe avec une fonction affine est convexe.

Reste à montrer qu'elle est "infinie à l'infini".

On peut par exemple utiliser que si $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|y\| \leq \|y - x\| + \|x\|,$$

par inégalité triangulaire.
Et donc Si $x \in \mathbb{R}^d$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|,$$

Et donc si $\|y\| \to +\infty$, on a $f(y) \to +\infty$.

f est donc "infinie à l'infini".
2. On déduit l'existence de $x_K \in K$ par le théorème du cours puisque K est un fermé non vide, f continue et "infinie à l'infinie".

3. Supposons qu'il existe x_K et $\tilde{x}_K$ deux points de minimum distincts.

(a) Montrons que

$$\|x_K - \tilde{x}_K\|^2 = 2\|x_K - x\|^2 + 2\|\tilde{x}_K - x\|^2 - 4\left\|x - \frac{x_K + \tilde{x}_K}{2}\right\|^2.$$

On peut pour cela, soit développer le membre de droite et on retrouve le résultat, soit on utilise l'égalité $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$, avec $a = x_K - x$ et $b = \tilde{x}_K - x$.

(b) Comme x_K et $\tilde{x}_K$ sont deux éléments de K, on a $\frac{x_K + \tilde{x}_K}{2} \in K$ et donc par définition du minimum, $\|x - \frac{x_K+\tilde{x}_K}{2}\| \geq \|x - x_K\|$ et $\|x - \frac{x_K+\tilde{x}_K}{2}\| \geq \|x - \tilde{x}_K\|$. Donc $4\|x - \frac{x_K+\tilde{x}_K}{2}\|^2 \geq 2\|x - x_K\|^2 + 2\|x - \tilde{x}_K\|^2$.

Donc $\|x_K - \tilde{x}_K\|^2 \leq 2\|x_K - x\| + 2\|\tilde{x}_K - x\|^2 - 2\|x - x_K\|^2 - 2\|x - \tilde{x}_K\|^2$,
ce qui donne $\|x_K - \tilde{x}_K\|^2 \leq 0$, donc $x_K = \tilde{x}_K$.

4. On cherche maintenant à montrer la caractérisation.
(a) Supposons que x_K soit solution du problème de minimisation. Soit $y \in K$. Montrons que

$$\langle x - x_K, y - x_K \rangle \leq t\|y - x_K\|^2, \qquad (42)$$

pour tout $t \in]0,1]$.

Comme K est convexe, on a pour tout $t \in [0,1]$, $ty + (1-t)x_K \in K$. Et donc

$$\|x - x_K\| \leq \|x - (ty + (1-t)x_K)\|. \tag{43}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|x - (ty + (1-t)x_K)\|^2 &= \|(x - x_K) - t(y - x_K)\|^2 && (44) \\ &= \|x - x_K\|^2 + t^2\|y - x_K\|^2 - 2t\langle x - x_K, y - x_K\rangle && (45) \\ & && (46) \end{aligned}$$

En utilisant alors (43), on obtient

$$\|x - x_K\|^2 \leq \|x - x_K\|^2 + t^2\|y - x_K\|^2 - 2t\langle x - x_K, y - x_K\rangle \tag{47}$$

Et donc

$$2t\langle x - x_K, y - x_K\rangle \leq t^2\|y - x_K\|^2, \tag{48}$$

En divisant par $t \in]0,1]$ et en faisant tendre t vers 0^+, on trouve :

$$(x - x_K, y - x_K) \leq 0, \; \forall y \in K. \tag{49}$$

(b) Réciproquement, supposons que $z \in K$ vérifie pour tout $y \in K$,

$$\langle x - z, y - z\rangle \leq 0. \tag{50}$$

Montrons que pour tout $y \in K$,

$$\|x - z\| \leq \|x - y\|. \tag{51}$$

On a pour tout $y \in K$,

$$\begin{aligned} \|x - z\|^2 &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\langle x - y, y - z\rangle && (52) \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2\langle x - z + z - y, y - z\rangle && (53) \\ &= \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 + 2(x - z, y - z) + 2\langle z - y, y - z\rangle && (54) \\ &= \|x - y\|^2 \underbrace{-\|y - z\|^2}_{\leq 0} \underbrace{+2\langle x - z, y - z\rangle}_{\leq 0}. && (55) \end{aligned}$$

Et donc pour tout $y \in K$,

$$\|x - z\|^2 \leq \|x - y\|^2. \tag{56}$$

On en déduit que z est minimum de f sur K et par unicité $x_K = z$.

5. Montrons que p_K est 1-Lipschitzienne (i.e. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\|$).

En utilisant la caractérisation du projeté, on sait en particulier que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\langle x - p_K(x), p_K(y) - p_K(x)\rangle \leq 0, \tag{57}$$

et

$$\langle y - p_K(y), p_K(x) - p_K(y)\rangle \leq 0. \tag{58}$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient

$$\langle x - y - p_K(x) + p_K(y), p_K(y) - p_K(x)\rangle \leq 0. \tag{59}$$

Et donc,

$$\langle x - y, p_K(y) - p_K(x)\rangle + \|p_K(y) - p_K(x)\|^2 \leq 0. \tag{60}$$

D'où

$$\|p_K(y) - p_K(x)\|^2 \leq \langle x - y, p_K(x) - p_K(y)\rangle \tag{61}$$

Alors, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|p_K(y) - p_K(x)\|^2 \leq \|x - y\|\|p_K(x) - p_K(y)\|. \tag{62}$$

Si $\|p_K(x) - p_K(y)\| \neq 0$, on divise par cette quantité l'inégalité et on a l'inégalité voulue.
Si $\|p_K(x) - p_K(y)\| = 0$, alors l'inégalité voulue est est encore vraie.
6. Montrons que si K est un sous-espace vectoriel de E, alors la caractérisation s'écrit :

$$\langle x - x_K, y\rangle = 0, \; \forall y \in K.$$

Soit $y \in K$, on a alors $y + x_K \in K$, puisque K est un espace vectoriel et donc en utilisant la caractérisation on obtient

$$\langle x - x_K, y + x_K - x_K\rangle \leq 0, \; \forall y \in K. \tag{63}$$

Ce qui donne

$$\langle x - x_K, y\rangle \leq 0, \; \forall y \in K. \tag{64}$$

De plus si $y \in K$, alors $-y \in K$, donc en appliquant l'inégalité précédente à $-y$, on a aussi

$$\langle x - x_K, y\rangle \geq 0, \; \forall y \in K. \tag{65}$$

D'où

$$\langle x - x_K, y\rangle = 0, \; \forall y \in K. \tag{66}$$