M1 IM/MPA : TD Optimisation et Éléments Finis

Feuille 5 : Mise sous forme variationnelle.

Exercice 1

On notera $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables sur Ω, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de carré intégrable sur Ω.

On considère l'espace des fonctions de carré intégrable sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. On note $\|\cdot\|_{L^2}$ la norme canonique L^2 sur cet espace, i.e. pour tout $f \in L^2(\Omega)$, $\|f\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |f(x)|^2 dx$. On rappelle que $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$ est un espace vectoriel normé complet (voir Feuille de rappel pour le rappel de la définition d'un espace complet).

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_\Omega f(x)g(x)dx$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire sur $L^2(\Omega)$.

2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique définie positive.

3. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est continue sur $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$.

On retiendra en conclusion que $(L^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert : c'est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, complet pour la norme canoniquement associée au produit scalaire (ici $\|\cdot\|_{L^2}$).

Exercice 2

Mise sous forme variationnelle en dimension 1.

On considère le problème suivant $(\mathcal{P})$: *Trouver $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) + au'(x) + bu(x) &= f(x), \forall x \in]0,1[, & (1)\\ u(0) &= \alpha, & (2)\\ u(1) &= \beta, & (3) \end{aligned}$$

avec a et b sont deux constantes réelles positives et α et β deux constantes réelles et f une fonction continue sur $[0,1]$.

1. On considère la cas où $a = 0$ et $b = 0$.

(a) Supposons qu'une solution au problème $(\mathcal{P})$ existe. Montrer qu'elle est alors unique. *On pourra par exemple supposer que deux solutions existent et manipuler la formulation variationnelle vérifiée par la différence de ces deux solutions.*

(a) Peut-on donner l'expression d'une solution dans le cas où $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

(c) On pose $u^0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \beta x + \alpha(1-x)$. Montrer que $\tilde{u} := u - u^0$ est solution du problème $(\mathcal{P})$, avec $a = 0$, $b = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et le second membre f. Établir alors la formulation variationnelle vérifiée par $\tilde{u}$.

2. On considère maintenant le cas où $a = 0$, $b = 1$, $f : x \mapsto 1$ et $\alpha = \beta = 0$.

(a) Montrer que $u : x \mapsto 1 - \dfrac{e^x + e^{(1-x)}}{e+1}$ est solution de cette équation.

(b) Montrer que la solution est unique.

(c) En s'inspirant de la stratégie proposée en cours pour obtenir une formulation variationnelle, identifier une forme bilinéaire a et une forme linéaire l telle que si u est solution du problème précédent, alors

$$a(u, v) = l(v), \ \forall v \in V,$$

où l'on précisera un espace V possible.

3. On considère le cas où $a = 1$, $b = 0$, $f \equiv 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

(a) Montrer que $u : x \mapsto \dfrac{1}{e-1}\,(e^x - 1)$ est solution de cette équation.

(b) Montrer que la solution est unique.

(c) On pose $\tilde{u}^0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \beta x$. Montrer que $\tilde{u} := u - \tilde{u}^0$ est solution du problème $\mathcal{P}$, avec $a = 1$, $b = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et le second membre $\tilde{f} \equiv -\beta$. Établir alors la formulation variationnelle vérifiée par $\tilde{u}$.

Solution exercice 2

On considère le problème suivant $(\mathcal{P})$: *Trouver* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) + au'(x) + bu(x) &= f(x), \ \forall x \in]0,1[, & (4)\\ u(0) &= \alpha, & (5)\\ u(1) &= \beta, & (6) \end{aligned}$$

avec a *et* b *sont deux constantes réelles positives et* α *et* β *deux constantes réelles et* f *une fonction continue sur* $[0,1]$.

1. On considère la cas où $a = 0$ et $b = 0$.

(a) Supposons que l'on ait deux solutions u_1 et u_2 de $\mathcal{C}^2([0,1])$ qui vérifient (4)-(5)-(6). On en déduit que $w := u_2 - u_1 \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et vérifie

$$\begin{aligned} -w'' &= 0, \text{ sur }]0,1[&& (7)\\ w(0) &= 0, && (8)\\ w(1) &= 0. && (9) \end{aligned}$$

On multiplie la première équation par w et on intègre sur $[0,1]$. On trouve alors

$$\int_0^1 w''(x)w(x)dx = 0. \tag{10}$$

Une intégration par parties donne

$$\int_0^1 (w'(x))^2 dx = 0, \tag{11}$$

puisque $w(0) = 0$ et $w(1) = 0$.

Ce qui implique que $w' \equiv 0$ dans $L^2([0,1])$ et donc comme w est $\mathcal{C}^2([0,1])$, on en déduit que $w' \equiv 0$. Et donc w est une fonction constante. La constante est fixée par une des conditions aux bords par exemple, ce qui donne $w \equiv 0$.

(b) Si $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est solution, alors comme f est $\mathcal{C}^0([0,1])$, on peut écrire pour tout $x \in [0,1]$,

$$-\int_0^x u''(y)dy = \int_0^x f(y)dy. \tag{12}$$

Ce qui donne

$$-u'(x) + u'(0) = \int_0^x f(y)dy. \tag{13}$$

On peut réintégrer une nouvelle fois sur $[0,x]$, avec $x \in [0,1]$ et on trouve

$$u(x) - u(0) - u'(0)x = -\int_0^x \int_0^t f(y)dydt \tag{14}$$

Et donc

$$u(x) = u(0) + u'(0)x - \int_0^x \int_0^t f(y)dydt \tag{15}$$

On sait que $u(0) = \alpha$, on obtient donc

$$u(x) = \alpha + u'(0)x - \int_0^x \int_0^t f(y)dydt \tag{16}$$

La seconde condition de bord $u(1) = \beta$ va nous aider à fixer la deuxième valeur inconnue de cette égalité $u'(0)$. En effet, on a en utilisant l'expression trouvée pour u, $u(1) = \alpha + u'(0) - \int_0^1 \int_0^t f(y)dydt$. Et donc,

$$u'(0) = \beta - \alpha + \int_0^1 \int_0^t f(y)dydt. \tag{17}$$

En conclusion, on a pour tout $x \in [0,1]$,

$$u(x) = \alpha + (\beta - \alpha + \int_0^1 \int_0^t f(y)dydt)x - \int_0^x \int_0^t f(y)dydt \tag{18}$$

On a donc montré que si $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$, alors nécessairement u a pour expression (18).

Reste à montrer que si u est définie sur $[0,1]$ par (18), alors $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et $-u''(x) = f(x)$ sur $]0,1[$ et $u(0) = \alpha$ et $u(1) = \beta$.

Comme $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on sait que $x \mapsto \int_0^x f(y)dy$ est $\mathcal{C}^1([0,1])$ et $x \mapsto \int_0^x \int_0^t f(y)dydt$ est $\mathcal{C}^2([0,1])$. Donc u définie par (18) est $\mathcal{C}^2([0,1])$, comme somme de fonctions $\mathcal{C}^2([0,1])$. De plus, on voit que $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$ et en dérivant deux fois par rapport à la variable x, on trouve $-u'' = f$ sur $[0,1]$. On a donc montré que u convient et on a son expression.
Ce raisonnement nous montre que si u est solution alors on n'a pas le choix pour son expression. On pourrait utiliser cela pour montrer l'unicité.

(c) On pose $u^0 : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \beta x + \alpha(1-x)$. Montrons que $\tilde{u} := u - u^0$ est solution du problème $(\mathcal{P})$, avec $a = 0$, $b = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et le second membre f. Autrement dit si on note $(\mathcal{P}_{a,b,\alpha,\beta,f})$ le problème *Trouver* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) + au'(x) + bu(x) &= f(x), \forall x \in]0,1[, & (19)\\ u(0) &= \alpha, & (20)\\ u(1) &= \beta, & (21) \end{aligned}$$

Le but est de montrer que $\tilde{u} := u - u^0$ est solution du problème $(\mathcal{P}_{0,0,0,0,f})$, avec $a = 0$, $b = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et le second membre f, si u est solution du problème $(\mathcal{P}_{0,0,\alpha,\beta,f})$.

On a $\tilde{u} \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et $-\tilde{u}'' = -u'' = f$ sur $[0,1]$, puisque $u^{0''} \equiv 0$. De plus $u^0(0) = \alpha$ et $u^0(1) = \beta$, donc on a bien $\tilde{u}(0) = 0$ et $\tilde{u}(1) = 0$. Et donc $\tilde{u}$ est bien solution de $(\mathcal{P}_{0,0,\alpha,\beta,f})$.

Établissons alors la formulation variationnelle vérifiée par $\tilde{u}$.

On pose $V = \{v \in \mathcal{C}^2([0,1]),\text{ tel que } v(0) = v(1) = 0\}$.

Soit $v \in V$. On multiplie l'équation vérifiée par $\tilde{u}$ par v (qu'on appelle alors fonction test) et on intègre sur $[0,1]$ (autrement dit, on prend le produit scalaire $L^2([0,1])$ de $\tilde{u}''$ avec v). On obtient

$$-\int_0^1 \tilde{u}''(x)v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{22}$$

On effectue une intégration par partie, et en utilisant que $v \in V$ (en l'occurrence $v(0) = 0$ et $v(1) = 0$), on obtient

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx. \tag{23}$$

On pose alors $a : V \times V \to \mathbb{R}, (w_1, w_2) \mapsto \int_0^1 w_1'(x)w_2'(x)dx$ et $l : V \to V, w \mapsto \int_0^1 f(x)w(x)dx$.

La formulation variationnelle peut alors s'écrire : Trouver $u \in V$ telle que $\forall v \in V$, $a(u,v) = l(v)$. On peut alors aussi montrer que a est bilinéaire et l est linéaire (à faire !).

On remarque que l'on peut donner un sens à cette formulation variationnelle pour des fonctions moins régulières. On peut ainsi considérer la formulation variatinnelle plutôt sur

$$\tilde{V} := \left\{v \in \mathcal{C}^1([0,1]), \text{ tel que } v(0) = v(1) = 0\right\}.$$

Remarque pour les MPA. Pour avoir un cadre correct, il faut en fait choisir V comme étant un espace de Hilbert : l'espace qui conviendrait ici est

$$H_0^1([0,1]) = \left\{v \in L^2([0,1]), \text{ tel que } v' \in L^2([0,1]), \text{ et } v(0) = v(1) = 0\right\},$$

où la dérivée est prise au sens des distributions.

2. On considère maintenant le cas où $a = 0$, $b = 1$, $f : x \mapsto 1$ et $\alpha = \beta = 0$.

(a) Montrons que $u : x \mapsto 1 - \dfrac{e^x + e^{(1-x)}}{e+1}$ est solution de cette équation.

On a u est $\mathcal{C}^2([0,1])$ et on a $u'(x) = -\frac{1}{e+1}\left(e^x - e^{1-x}\right)$ et $u''(x) = -\frac{1}{e+1}\left(e^x + e^{1-x}\right)$. Et donc $\forall x \in [0,1]$, $-u''(x) + u(x) = 1$.

De plus, $u(0) = 0$ et $u(1) = 0$.

(b) Montrons que la solution est unique. Pour cela, on peut considérer deux solutions de $\mathcal{C}^2([0,1])$ de ce problème (équation différentielle et conditions de bords). Notons les u_1 et u_2. Posons $w := u_2 - u_1$. On a $-w'' + w = -u_2'' + u_2 + u_1'' - u_1 = 1 - 1 = 0$, $w(0) = 0$ et $w(1) = 0$.
En multipliant par w et en intégrant sur $[0,1]$, on obtient

$$-\int_0^1 w''(x)w(x)dx + \int_0^1 (w(x))^2 dx = 0. \tag{24}$$

En intégrant par partie le premier terme et en utilisant les conditions de bords, on obtient

$$\int_0^1 (w'(x))^2 dx + \int_0^1 (w(x))^2 dx = 0. \tag{25}$$

Comme ces deux termes sont positifs, on en déduit que $w \equiv 0$ dans $L^2([0,1])$, et donc $w \equiv 0$ puisque $w \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Et on a donc unicité d'une solution $\mathcal{C}^2([0,1])$.

(c) En s'inspirant de la stratégie proposée en cours pour obtenir une formulation variationnelle, identifions une forme bilinéaire a et une forme linéaire l telle que si u est solution du problème précédent, alors

$$a(u,v) = l(v), \ \forall v \in V,$$

où l'on précisera un espace V possible.

On pose $V := \left\{v \in \mathcal{C}^2([0,1]), \text{ tel que } v(0) = v(1) = 0\right\}$. On multiplie par une fonction test $v \in V$, on intègre sur $[0,1]$ et on obtient

$$-\int_0^1 \tilde{u}''(x)v(x)dx + \int_0^1 \tilde{u}(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx. \tag{26}$$

Une intégration par partie sur le premier terme donne

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x)v'(x)dx + \int_0^1 \tilde{u}(x)v(x)dx = \int_0^1 v(x)dx. \tag{27}$$

On pose alors $a : V \times V \to \mathbb{R}, (w_1, w_2) \mapsto \int_0^1 w_1'(x)w_2'(x)dx + \int_0^1 w_1(x)w_2(x)dx$ et $l : V \to \mathbb{R}, w \mapsto \int_0^1 w(x)dx$.

On peut faire les mêmes remarques que dans la question précédente. On peut alors aussi montrer que a est bilinéaire et l est linéaire (à faire !).

3. On considère le cas où $a = 1$, $b = 0$, $f \equiv 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.

(a) Montrons que $u : x \mapsto \dfrac{1}{e-1}(e^x - 1)$ est solution de cette équation.
On a tout d'abord $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$,

$$u'(x) = \frac{1}{e-1}e^x, \tag{28}$$

et

$$-u''(x) = \frac{1}{e-1}e^x \tag{29}$$

Donc $-u''(x) + u'(x) = 0$.
De plus $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$. Donc u est bien solution.
(b) Montrons que la solution est unique.

Supposons que l'on ait deux solutions u_1 et u_2 dans $\mathcal{C}^2([0,1])$. Posons $w = u_2 - u_1$. On a alors $w(0) = 0$, $w(1) = 0$ et

$$-w''(x) + w'(x) = 0. \tag{30}$$

En multipliant par w et en intégrant par parties sur $[0,1]$ pour le premier terme, on trouve

$$\int_0^1 (w'(x))^2 dx + \int_0^1 w(x)w'(x)dx = 0. \tag{31}$$

Le deuxième terme peut s'intégrer directement, et on obtient

$$\int_0^1 (w'(x))^2 dx + \frac{1}{2}\left((w(1))^2 - (w(0))^2\right) = 0. \tag{32}$$

D'où

$$\int_0^1 (w'(x))^2 dx = 0. \tag{33}$$

Ce qui implique que $w'(x) = 0$ puisque $w \in \mathcal{C}^2([0,1])$, et donc $w(x) = 0$ grâce aux conditions de bords.
Il y a donc unicité de la solution.

(c) On pose $\tilde{u}^0 : [0,1] \to \mathbb{R},\, x \mapsto \beta x$. Montrons que $\tilde{u} := u - \tilde{u}^0$ est solution du problème $\mathcal{P}_{1,0,0,0,\tilde{f}}$ (on garde les notations introduites en question 1. (c)), avec $\tilde{f} \equiv -\beta$. Comme $\tilde{u}^0 \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et pour tout $x \in [0,1]$, ${\tilde{u}^0}'(x) = \beta$ et ${\tilde{u}^0}''(x) = 0$, on a pour tout $x \in [0,1]$, $-\tilde{u}''(x) + \tilde{u}'(x) = \beta$ et on a également $\tilde{u}(0) = 0$ et $\tilde{u}(1) = 0$. Ce qui est le résultat voulu.

Établissons alors la formulation variationnelle vérifiée par $\tilde{u}$.

On multiplie par une fonction test $v \in V := \{v \in \mathcal{C}^2([0,1]),\, v(0) = v(1) = 0\}$, on obtient

$$\int_0^1 \tilde{u}'(x)v'(x)dx + \int_0^1 \tilde{u}'(x)v(x)dx = \beta \int_0^1 v(x)dx. \tag{34}$$

On peut toujours faire les mêmes remarques que précédemment. On remarque de plus que a n'est pas symétrique. On peut alors aussi montrer que a est bilinéaire et l est linéaire (à faire !).

Exercice 3

Mise sous forme variationnelle en dimension 1, bis.

On considère le problème suivant $(\mathcal{P})$: *Trouver* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x),\ \forall x \in]0,1[, && (35)\\ u'(0) &= 0, && (36)\\ u'(1) &= 0, && (37) \end{aligned}$$

avec f *une fonction continue sur* $[0,1]$.

1. Étudier l'unicité de la solution.

2. On remplace l'équation $u'(1) = 0$ par $u(1) = 0$.

(a) Que dire de l'unicité dans ce cas ?

(b) Écrire une formulation variationnelle dans ce cas.

Solution exercice 3

1) Soit u_1 et u_2 deux solutions du problème $(\mathcal{P})$. Alors $u = u_1 - u_2$ vérifie le système,

$$-u''(x) = 0, \quad x \in]0,1[, \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0.$$

En utilisant la condition aux limites $u'(0) = 0$, une première intégration en la variable x de l'équation précédente entre 0 et $x \in [0,1]$ donne

$$\int_0^x -u''(y)dy = 0 \quad \text{soit} \quad -u'(x) = -u'(0) = 0.$$

Une seconde intégration en la variable x de cette équation donne

$$\int_0^x -u'(y)dy = 0 \quad \text{soit} \quad u(x) = u(0) = \textit{constante}.$$

Comme la constante $u(0)$ n'est pas spécifiée ou autrement dit quelconque, on en déduit que deux solutions du problème u_1 et u_2 diffèrent par une constante. Donc la solution du problème $(\mathcal{P})$ n'est pas unique, ou autrement dit la solution du problème $(\mathcal{P})$ est unique à une constante additive près, puisque toute fonction constante est solution du problème $(\mathcal{P})$.

2a) Montrons que la solution du nouveau problème est unique. Soit u_1 et u_2 deux solutions. Alors $u = u_1 - u_2$ vérifie le système,

$$-u''(x) = 0, \quad x \in]0,1[, \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

En utilisant la condition aux limites $u'(0) = 0$, une première intégration en x de l'équation précédente donne

$$\int_0^x -u''(y)dy = 0 \quad \text{soit} \quad -u'(x) = -u'(0) = 0.$$

En utilisant la condition aux limites $u(1) = 0$, une seconde intégration en x de cette équation donne

$$\int_x^1 -u'(y)dy = 0, \quad \text{soit} \quad u(x) = u(1) = 0,$$

ce qui implique que $u_1 = u_2$. Donc la solution est unique.

2b) Soit X l'espace défini par

$$X := \{\varphi \in \mathcal{C}^1([0,1]) \mid \varphi(1) = 0\}.$$

On choisit X de cette manière car lorsque cherchera à résoudre le problème via sa formulation variationnelle, la fonction u appartiendra à X (la condition aux limites $u(1) = 0$ est ainsi automatiquement satisfaite). Soit $\varphi \in X$. Multiplions par φ l'équation (4) du problème $(\mathcal{P})$, et intégrons en x le résultat sur le domaine $[0,1]$ en utilisant une intégration par parties. On obtient

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx - u'(1)\varphi(1) + u'(0)\varphi(0) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx,$$

En utilisant la condition aux limites $u'(0) = 0$ et les propriétés de l'espace X, on obtient finalement,

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in X, \tag{38}$$

qui est la formulation variationnelle du problème. On remplace alors le problème $(\mathcal{P})$ par le problème suivant : Trouver $u \in X$ tel que la formulation variationnelle (38) soit satisfaite. Et on identifie la forme bilinéaire $a : X \times X \to \mathbb{R}, (w_1, w_2) \mapsto \int_0^1 w_1'(x)w_2'(x)dx$, $l : X \to \mathbb{R}, w \mapsto \int_0^1 f(x)w(x)dx$. On peut alors aussi définir a et l et montrer que a est bilinéaire et l est linéaire (à faire !).

Exercice 4
***Mise sous forme variationnelle en dimension 2**

On se place dans $\Omega =]0, L[\times]0, L[\subset \mathbb{R}^2$. On considère $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.

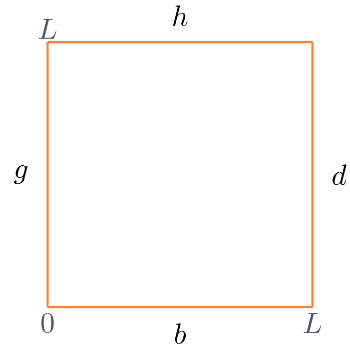

FIGURE 1. Le carré, nom des bords (haut, bas, gauche, droit).

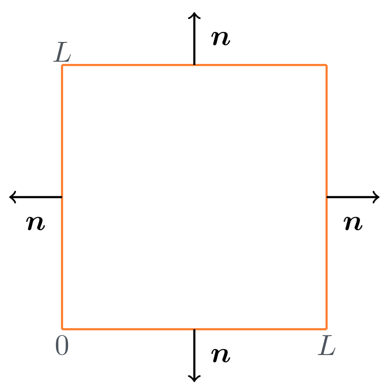

FIGURE 2. Illustration des normales extérieures aux bords.

1. Montrer que

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\varphi dx_1 dx_2 = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int_h \frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi ds - \int_b \frac{\partial u}{\partial x_1}\varphi ds,$$

et

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\varphi dx_1 dx_2 = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_d \frac{\partial u}{\partial x_2}\varphi ds - \int_g \frac{\partial u}{\partial x_2}\varphi ds.$$

2. En déduire que

$$\int_\Omega \Delta u\, \varphi dx_1 dx_2 = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi dx_1 dx_2 + \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n\, \varphi ds,$$

si n désigne la normale extérieure au bord de Ω (voir illustration). Ici on a noté $\cdot$ le produit scalaire euclidien de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

On admettra que ce résultat est valable pour des ouverts Ω bien plus généraux et des espaces de fonctions plus généraux. On retiendra la formule sous le nom de formule de Green.

3. On considère maintenant l'équation aux dérivées partielles (EDP) sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: *Trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \ \textit{sur } \Omega, && (39) \\ u &= 0, \ \textit{sur } \partial\Omega. && (40) \end{aligned}$$

(a) En généralisant l'approche du cours présentée en dimension un, et en utilisant la formule de Green, déterminer une forme bilinéaire a et une forme linéaire l permettant d'écrire une formulation variationnelle.

Cet exercice peut se généraliser à une dimension $d > 2$ et d'autres EDP. On fait là encore appel aux espaces de Sobolev pour donner un cadre Hilbertien propre.

(b) Soient $(k, l) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On choisit $f : (x, y) \to (k^2 + l^2)\pi^2 \sin(k\pi x)\sin(l\pi y)$.

Montrer que $u : (x, y) \to \sin(k\pi x)\sin(l\pi y)$ est solution du problème posé.

(c) Peut-on montrer l'unicité de la solution ?