**M1 IM/MPA : TD Optimisation et Éléments Finis**

## Feuille 6 : Approximation par Éléments Finis.

### Ex 1. Approximation en dimension 1.

On considère le problème suivant $(\mathcal{P}_{a,b,\alpha,\beta,f})$ : *Trouver* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) + au'(x) + bu(x) &= f(x), \forall x \in ]0,1[, && (1)\\ u(0) &= \alpha, && (2)\\ u(1) &= \beta, && (3) \end{aligned}$$

*avec* $a$ *et* $b$ *sont deux constantes réelles positives et* $\alpha$ *et* $\beta$ *deux constantes réelles et* $f$ *une fonction continue sur* $[0,1]$.

On considère le cas où $a = 0$, $b = 1$, $f : x \mapsto 1$ et $\alpha = \beta = 0$. On a vu la formulation variationnelle associée dans la Feuille de TD4. On considère une subdivision uniforme $(x_i)_{i\in\{0,..,N+1\}}$ de $[0,1]$ de pas $h$. On note pour tout $i \in \{1,..,N\}$, $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ et l'espace $\mathcal{V}_h$ suivant :

$$\mathcal{V}_h := \left\{ u \in \mathcal{C}^0([0,1]), \text{ pour tout } i \in \{0,...,N\}, u_{/I_i} \in \mathbb{P}_1, u(0) = u(1) = 0 \right\},$$

(a) Ecrire la formulation variationnelle discrète.

(b) Montrer que trouver $u_h \in \mathcal{V}_h$ solution du problème variationnel discret revient à résoudre un système linéaire que l'on précisera.

(c) Montrer que la matrice associée au système linéaire est inversible.

(d) Détailler le calcul des éléments de la matrice du système linéaire.

### Ex 2. Approximation en dimension 1, bis.

On considère le problème suivant $(\mathcal{P})$ : *Trouver* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *tel que*

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \forall x \in ]0,1[, && (4)\\ u'(0) &= 0, && (5)\\ u(1) &= 0, && (6) \end{aligned}$$

*avec* $f$ *une fonction continue sur* $[0,1]$.

On a vu la formulation variationnelle associée dans la Feuille de TD4. On considère une subdivision uniforme $(x_i)_{i\in\{0,..,N+1\}}$ de $[0,1]$ de pas $h$. On note pour tout $i \in \{1,..,N\}$, $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ et l'espace $\tilde{\mathcal{V}}_h$ suivant :

$$\tilde{\mathcal{V}}_h := \left\{ u \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ \text{ pour tout } i \in \{0, ..., N\}, u_{/I_i} \in \mathbb{P}_1, u(1) = 0 \right\},$$

1. Écrire la formulation variationnelle discrète associée dans l'espace $\tilde{\mathcal{V}}_h$.

2. Que dire de la dimension de $\tilde{\mathcal{V}}_h$ (on pourra raisonner formellement comme dans le cours).

3. Sur le même principe qu'en cours donner les fonctions de base de Lagrange de $\tilde{\mathcal{V}}_h$ associées aux degrés de liberté et les fonctions de base élémentaires.

4. Former le système linéaire et donner l'expression de la matrice (on calculera les termes avec la même méthode que dans le cours et on pointera sur les différences avec celui-ci).

**Ex 3. Quelques aspects de l'approximation en dimension 2**

On se place dans $\Omega = ]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$. On considère maintenant l'équation aux dérivées partielles (EDP) sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ : *Trouver* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f,\ \textit{sur}\ \Omega, && (7)\\ u &= 0,\ \textit{sur}\ \partial\Omega. && (8) \end{aligned}$$

(a) Rappeler la formulation variationnelle obtenue dans la Feuille de TD4 et rappelée dans le cours.

(b) On se place dans le cadre de la discrétisation éléments finis présentée dans le cours en choisissant une approximation $\mathbb{P}_1$. On considère un triangle quelconque de la discrétisation que l'on note $T$ et défini par ses trois sommets $(A_1, A_2, A_3)$ (voir figure 1). Le triangle de référence est noté $\hat{T}$, comme dans le cours. On note ses sommets $(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3)$ (voir figure 2). On cherche à déterminer l'expression de $F_T$, la transformation affine qui envoie $\hat{T}$ sur $T$. Pour cela, on écrit que pour $\hat{X} = (\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{T}$, $F_T(\hat{X}) = M\hat{X} + b$, avec $M$ matrice de $M_2(\mathbb{R})$, et $b \in \mathbb{R}^2$. On se souviendra (ou on admettra) que $\frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)| (= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}\|)$ est l'aire du triangle $T$. On supposera que cette aire est strictement positive.

En écrivant que[1] $F_T(\hat{A}_i) = A_i$, pour $i \in \{1,2,3\}$, donner l'expression de $M$ et $b$ en fonction des coordonnées des points $A_1$, $A_2$ et $A_3$.

(c) Montrer que $M$ est inversible.

(d) Montrer que $F_T$ est inversible et donner l'expression de son inverse.

(e) Donner l'expression de la différentielle[2] de $F_T$.

(f) Déterminer les 3 fonctions élémentaires $\hat{\varphi}$ de $\mathbb{P}_1$ qui vérifient $\hat{\varphi}_i(\hat{A}_j) = \delta_{ij}$ pour $(i,j) \in \{1, ..., 3\}^2$.

1. On utilise ici l'abus de notation qui consiste à assimiler le sommet géométrique à ses coordonnées dans la base canonique.

2. Ici, on consière qu'on différentie sur le triangle ouvert $\mathring{\hat{T}}$

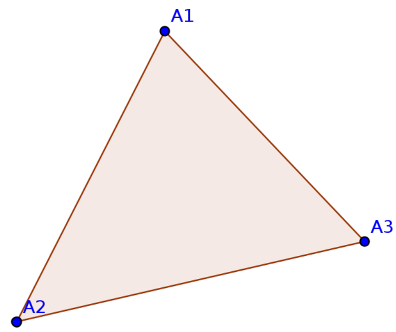


FIGURE 1. Triangle T

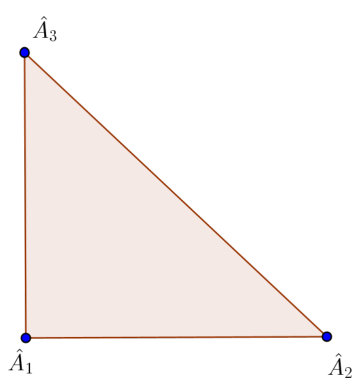


FIGURE 2. Triangle $\hat{T}$