M1 IM - Analyse Numérique.

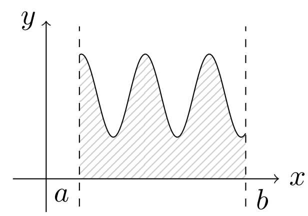
TP

Intégration numérique.

Question 1 : *Implémentation des formules de quadratures usuelles.*

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tels que $a < b$ et une fonction f définie sur $[a,b]$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Notre objectif est de trouver une valeur numérique approchée I_h l'intégrale I de f sur $[a,b]$:

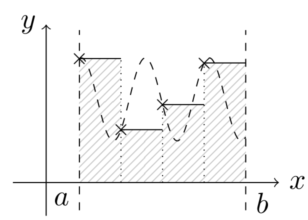
$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Nous allons considérer les règles de quadrature composées classiques rappelées ci-dessous. Considérons un entier $n \geqslant 1$ et une subdivision uniforme $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$, i.e. $x_i = a + ih$, $i = 0,..,n$ avec $h = (b-a)/n$. Les régles de quadrature composées classiques sont définies de la manière suivante :

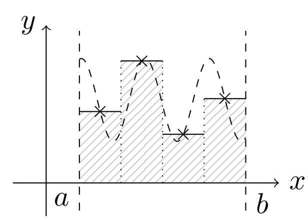
(i) Méthode des rectangles à gauche

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$



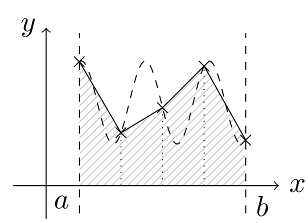
(ii) Méthode du point milieu

$$I_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big)$$



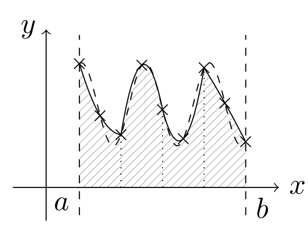
(iii) Méthode des trapèzes

$$I_n = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2} \right)$$



(iv) Méthode de Simpson

$$I_n = \frac{b-a}{6n} \left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\Big(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\Big) + f(b) \right)$$



L'objectif de ce tp est de construire des fonctions Scilab qui permettent de calculer numériquement des intégrales à l'aide des formules de quadratures composées définies ci-dessus.

1) Construire, pour chacune des règles de quadrature ci-dessus, une fonction Scilab qui prend en paramètre une fonction f, deux réels a, b et un entier n, et renvoie, suivant les cas, la valeur approchée de $\int_a^b f$ calculée avec la formule de quadrature correspondante.

2) Tester vos programmes sur $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx$ et des polynômes choisi de manière à illustrer le degré d'exactitude des différentes règles de quadrature.

Exercices d'application.

Exercice 1 : *Estimation de la taille des individus dans une population donnée.*
On considère une population avec un grand nombre N d'individus. La distribution de la densité de population n peut être représentée par une fonction cloche, caractérisée par la valeur moyenne de la hauteur $\bar{h}$ et l'écart type σ :

$$n(s) = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-(s-\bar{h})^2/(2\sigma^2)). \tag{1}$$

Alors,

$$\mathcal{N}_{[h,h+\Delta h]} = \int_h^{h+\Delta h} n(s)ds \tag{2}$$

représente le nombre d'individus dont la taille est entre h et $h+\Delta h$, pour $\Delta h > 0$. On considère une population de 200 individus, avec $\bar{h} = 1.7$ et $\sigma = 0.1$.

1) Tracer le graphe de n sur l'intervalle $[0, 2.5]$.

2) On souhaite calculer le nombre d'individus entre 1.8 m et 1.9 m. Utiliser la formule de Simpson avec 100 sous-intervalles pour calculer ce nombre.

3) En déduire le pourcentage de la population correspondant.

Exercice 2 : *Ordre d'approximation des règles de quadrature.*
On souhaite comparer les approximations de l'intégrale

$$I(f) = \int_0^{2\pi} x\exp(-x)\cos(2x)dx = -\frac{10\pi - 3 + 3\exp(2\pi)}{25\exp(2\pi)} \tag{3}$$

obtenues par les différentes méthodes programmées dans la **Question 1**.

1) Pour les méthodes numériques implémentées dans la **Question 1**, tracer le graphe du logarithme de la valeur absolue de l'erreur $e = I_n - I$ en fonction du logarithme de h. Expliquer comment l'on peut observer à partir de ces courbes l'ordre de chacune des méthodes.

2) Faire calculer puis afficher à l'écran l'ordre de chacune des méthodes.

Exercice 3 :
On souhaite intégrer numériquement la fonction $f : x \mapsto \exp(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

1) Effectuer le calcul exact de cette intégrale.

2) Calculer numériquement cette intégrale à l'aide de la méthode des trapèzes composée avec 4, 8 puis 16 sous-intervalles de même taille. Vérifier numériquement que l'ordre de cette approximation est 2.

3) Reprendre la question précédente mais en utilisant la méthode de Simpson composée (l'ordre est alors 4).