M1 IM/MPA : TP Optimisation et Éléments Finis

Feuille 1 : Premiers exemples et révisions.

Ex 1 Révision de la méthode de Newton.

1. Mettre en œuvre la méthode de Newton pour approcher le(s) zéro(s) de la fonction $f : x \mapsto \exp(-x) - x$. Commentez.

2. Mettre en œuvre la méthode de Newton pour approcher le(s) zéro(s) de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$. Commentez.

3. On cherche à approcher le(s) zéro(s) de la fonction $f : (x, y) \mapsto (\exp(x) - y, x^2 + y^2 - 16)$.
   a) Donner une interprétation graphique du problème. En quoi cela aide-t-il ?

   b) Mettre en œuvre la méthode de Newton. Commentez.

Ex 2 En dimension 1, révision... et un premier algorithme possible de recherche d'extrema

On se donne f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2 au voisinage d'un point donné $x^* \in \mathbb{R}$. On donnera les bonnes hypothèses de régularité à f pour cela.

On donne alors trois expressions de fonction définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^2 + 1},$$

$$f_2 : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4,$$

$$f_3 : x \mapsto x(-\cos(1) - \sin(1) + \sin(x)).$$

2. Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, répondre aux question suivantes :

a. Représenter graphiquement f_i et sa dérivée f_i'.

b. La fonction f_i a-t-elle des minima et maxima locaux sur $\mathbb{R}$? sur $[-5, 5]$? Si oui, les indiquer approximativement à l'aide du graphe.

c. La fonction f_i possède-t-elle un maximum (resp. minimum) global sur $\mathbb{R}$? sur $[-5, 5]$? Si oui, l'indiquer sur le graphe.

d. Que dire des points où f_i' s'annule ? Donner un énoncé rigoureux de votre observation se basant sur la question 1.

e. Tracer f_i''. Quel est le signe de f_i'' en les points de maxima et minima locaux ?
Donner un énoncé rigoureux de votre observation.

3. À l'aide de la question 2. et de l'exercice 1., proposer une méthode numérique qui pourrait permettre de trouver les minima (ou maxima) locaux sur $\mathbb{R}$. La mettre en œuvre sur f_1 ou f_2. Commentez.

Ex 3 Quelques formes quadratiques.

On définit les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$

$$f_1 : (x, y) \mapsto x^2 + xy + 2y^2,$$
$$f_2 : (x, y) \mapsto x^2 + xy - 2y^2,$$
$$f_3 : (x, y) \mapsto 6x^2 + 3xy + 2y^2,$$
$$f_4 : (x, y) \mapsto -2x^2 + xy - \frac{7y^2}{2}.$$

1. Ces fonctions sont elles des formes quadratiques ? Si oui, déterminer les matrices associées.

2. Pour chaque forme quadratique, déterminer les valeurs propres des matrices correspondantes.

3. Tracer la/les surfaces correspondantes pour ces même fonctions ou quelques lignes de niveau. Ce que vous observez est-il en accord avec les résultats de 2. ? Expliquez.

Ex 4 En dimension 2.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

1. Cette fonction admet elle un minimum ? Si oui, en quel point et quelle est sa valeur ?

On est intéressé à comprendre comment atteindre ce minimum en partant d'un point du plan.

2. Faire une représentation graphique de g.

3. Tracer la ligne de niveau correspondant à $g = 2$. Quel est la nature géométrique de ce contour ? Tracer également d'autres contours, comme par exemple ceux correspondants à $g = 1$ et $g = 3$.

4. Calculer le gradient de g en un point $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ donné. Comment est dirigé le gradient par rapport au plan tangent à la surface en ce point.

5. Tracer sur un même graphique les lignes de niveaux, et quelques gradients en des points de chaque ligne de niveau. Commentez l'effet de suivre la direction et le sens de l'opposé du gradient de g en un point donné par rapport à une direction quelconque.