M1, Optimisation et éléments finis

Maillage et intégration numérique

L'objectif de cette partie est de manipuler informatiquement la notion de maillage et règle de quadrature pour l'approximation des intégrales. Pour cela, il faut comprendre et de tester le contenu des fichiers *maillage_ uniforme_ 1D.sci* et *formules_ integration_ 1D.sci* décrit ci-dessous.

Le fichier *maillage_ uniforme_ 1D.sci* contient la fonction *UniformMesh1d* qui prend en paramètre deux réels a et b et un entier anb_cells. Elle permet de construire une subdivision uniforme de l'intervalle $[a, b]$ en anb_cells cellules. Les informations relatives à cette subdivision sont stockées à l'aide de deux entiers (nb_sommt : le nombre de sommets, nb_cells : le nombre de cellules) et de deux tableaux

- *Sommets* de taille ($nb\_sommt \ \times\ 1$) : coordonnés de chaque sommet,
- *Cellules* de taille ($nb\_cells \ \times\ 2$) : numéro des sommets de chaque cellule.

Le fichier *formules_ integration_ 1D.sci* contient la fonction *Quadrature1d* qui prend en paramètre un entier $degre\_quadrature$. Elle permet d'obtenir les caractéristiques d'une règle de quadrature sur $[0, 1]$ de degré au moins $degre\_quadrature$. Elle renvoie un entier n et deux tableaux

- *omega* de taille $n \times 1$ contient les poids de la règle de quadrature,
- *xi* de taille $n \times 1$ contient les coordonnées des points de la règle de quadrature.

Une règle de quadrature sur $[0, 1]$ permet d'approcher l'intégrale sur $[0, 1]$ d'une fonction f de la manière suivante

$$\int_0^1 f(t)\, dt \sim \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(\xi_i),$$

où ω_i, $i = 1, .., n$ sont les poids de la règle de quadrature et ξ_i, $i = 1, .., n$ sont les points de la règle de quadrature. On dit que la règle de quadrature a un degré d'exactitude égal à d si la formule ci-dessus est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à d. Par linéarité, puisque les $(t^\ell)_{0 \leqslant \ell \leqslant d}$ forment une base de l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à d, pour vérifier le degré d'exactitude d'une règle de quadrature, il suffit de vérifier que

$$\int_0^1 t^\ell\, dt = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \xi_i^\ell, \quad \forall 0 \leqslant \ell \leqslant d.$$

La règle est alors de degré d'exactitude supérieur ou égal à d. Elle est de degré exactement d si de plus

$$\int_0^1 t^{d+1}\, dt \neq \sum_{i=1}^{n} \omega_i \xi_i^{d+1}.$$

L'approximation de l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est alors obtenue en utilisant le maillage et un changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{nb\_sommt-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(x)\,dx,\\ &= \sum_{j=1}^{nb\_sommt-1} (s_{j+1}-s_j)\int_0^1 f\Big(t(s_{j+1}-s_j)+s_j\Big)\,dt.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de quadrature sur $[0, 1]$, nous obtenons alors l'approximation

$$\int_a^b f(x)\,dx \sim \sum_{j=1}^{nb\_sommt-1} (s_{j+1}-s_j)\sum_{i=1}^{n}\omega_i f\Big(\xi_i(s_{j+1}-s_j)+s_j\Big).$$

Ceci s'appelle une règle de quadrature composée.

Exercice 1 : Exactitude des règles de quadrature

Observer le contenu du fichier *formules_integration_1D.sci.*

Produire un script scilab *TestRegleQuadrature.sce* qui vérifie que les règles de quadrature sur $[0, 1]$ fournies dans le fichier *formules_integration_1D.sci* sont exactes pour les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à *degre_quadrature*.

Exercice 2 : Règle composée

Observer le contenu du fichier *maillage_uniforme_1D.sci.* A l'aide de ces règles de quadrature et de la fonction *UniformMesh1d*, calculer une approximation de $I = \int_0^\pi \sin(x)\,dx$ en utilisant une règle composée. Vérifier que l'approximation obtenue est correcte en calculant la valeur exacte de l'intégrale.

Vous pouvez également vérifier l'ordre de convergence de l'approximation vers la valeur exacte lorsque h tend vers 0. Pour cela, avec une règle de quadrature donnée, il faut calculer les approximations obtenues pour différentes valeur de h et tracer le logarithme de l'erreur (entre ces approximations et la valeur exacte) en fonction du logarithme de h. Vous devez obtenir une droite dont la pente vous donnera l'ordre de convergence.