Feuille du Chapitre 2 : Modèle à une période

EXERCICE 1. Reprendre le modèle à $|\mathcal{S}| = |\mathcal{A}| = 2$ du chapitre 1 et expliciter la/les stratégies optimales pour une fonction $g : \{0, 1\} \to \mathbb{R}$.

EXERCICE 2 (Réplicabilité dans le modèle de Cox). On appelle Modèle de Cox (ou modèle Binomial) le modèle de marché dans lequel

$$\xi : \Omega \to \{u, d\}$$

avec

$$\mathbb{P}(\xi = u) \in]0, 1[$$

(On rappelle qu'il y a deux actifs : l'actif sans risque de prix S^0 et l'actif risqué de prix S, que ξ donne les variations du prix de l'actif risqué sur une période, c'est à dire que $S_1 = S_0\xi$ et que $r > 0$ est le taux de rénumération de l'actif sans risque, c'est à dire que $S_1^0 = (1 + r)S_0^0$. Finalement, pour simplifier on note $S_0^0 = 1$.)

On dit que le modèle est réplicable, si, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, il existe une richesse initiale W_0 et une stratégie $\phi \in \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{P}(W_1^\phi = f(\xi)) = 1.$$

Montrer que sous l'hypothèse

$$d < 1 + r < u$$

le modèle est réplicable.

EXERCICE 3. Montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions d'utilités :

(1) $U_1(x) = -\exp(-\gamma x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$.
(2) $U_2(x) = x^\gamma$, $x \in \mathbb{R}$, $\gamma \in]0, 1[$.
(3) $U_3(x) = -x^{-\gamma}$, $x >$, $\gamma > 0$.
(4) $U_4(x) = \ln(x)$, $x > 0$.

EXERCICE 4. On considère la fonction d'utilité

$$U(x) = x^\gamma, \quad x > 0,$$

avec γ paramètre dans $]0, 1[$. Pour $x > 0$ et pour ξ variable aléatoire à valeurs positives et intégrable, on note $\mathcal{D}(x) = \{\phi : \mathbb{P}\{(1 + r)x + \phi(\xi - (1 + r)) \geq 0\} = 1\}$.

(1) Pour $x > 0$, montrer que $\phi \in \mathcal{D}(x)$ si et seulement si $\phi/x \in \mathcal{D}(1)$.
(2) En déduire que

$$\sup_{\phi \in \mathcal{D}(x)} \mathbb{E}\Big[U\big((1 + r)x + \phi(\xi - (1 + r))\big)\Big] = x^\gamma \sup_{\phi \in \mathcal{D}(1)} \mathbb{E}\Big[U\big((1 + r) + \phi(\xi - (1 + r))\big)\Big].$$

EXERCICE 5. Soit X et Y deux variables aléatoires. On dit que X est préférable à Y pour le critère moyenne-variance $\mathbb{E}[X] \geq \mathbb{E}[Y]$ et $var(X) \leq var(Y)$.

On se donne deux rendements aléatoires X et Y, chacun de loi gaussienne. Montrer que X est préférable à Y pour le critère moyenne-variance si et seulement si X est préférable à Y pour n'importe quelle fonction d'utilité sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 6. On considère un marché financier Bernoulli à une période avec $d < 1 + r < u$. On fixe par ailleurs une richesse initiale $w > 0$, une fonction d'utilité U définie sur $[0, +\infty)$, ainsi qu'un produit financier dont le flux à échéance est $f(S_1)$.

(1) Montrer qu'il existe p et ψ tels que

$$f(S_1) = W_1^{p,\psi}.$$

(2) En déduire que, pour toute stratégie ϕ,
$$W_1^{w,\phi} - f(S_1) = W_1^{w-p,\phi-\psi}.$$

(3) Montrer que $\mathbb{P}(\{W_1^{w,\phi} - f(S_1) \geq 0\}) = 1$ si et seulement si $\phi - \psi \in \mathcal{D}(w-p)$, où $\mathcal{D}(w-p) = \{\theta \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\{W_1^{w-p,\theta} \geq 0\}) = 1\}$.

(4) En déduire qu'optimiser $\mathbb{E}[U(W_1^{w,\phi} - f(S_1))]$ par rapport à ϕ tel que $\mathbb{P}(\{W_1^{w,\phi} - f(S_1) \geq 0\}) = 1$ revient à optimiser $\mathbb{E}[U(W_1^{w-p,\phi-\psi})]$ par rapport ϕ tel que $\phi - \psi \in D(w-p)$.

(5) On suppose que w désigne la richesse initiale d'un agent financier. Il vend, à l'instant 0, le produit financier de flux $f(S_1)$ à échénace. Il reçoit, en contrepartie, c. Sa richesse est donc $w + c$. Montrer que
$$\sup_{\phi:\mathbb{P}(\{W_1^{w+c,\phi} - f(S_1) \geq 0\})} \mathbb{E}[U(W_1^{w+c,\phi} - f(S_1))] = \sup_{\phi-\psi \in \mathcal{D}(w+c-p)} \mathbb{E}[U(W_1^{w+c-p,\phi-\psi})].$$

(6) En déduire que, pour l'agent financier, la vente du produit est intéressante si et seulement si $c \geq p$. En conclure que p doit être le juste prix du produit financier.