Feuille du Chapitre 3 : Modèle à n périodes

EXERCICE 1. Sur la modèle de la représentation de $U_0(i)$, donner une représentation de $U_n(i)$ pour chaque $n \in \{0, \cdots, N-1\}$. On sommera les coûts à partir de l'instant n.

EXERCICE 2. Montrer, pour une stratégie optimale comme donnée dans l'énoncé de la Proposition 2.6 du cours que la suite $(U_n(X_n))_{0\le n\le N}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\le n\le N}$ sous-jacente, si on suppose que le coût instantané $r \equiv 0$.
Indication : On écrira l'identité $U_n(i) = r(n, i, a_n(i)) + \sum_{j\in S} U_{n+1}(j)P(n, i, a_n(i), j)$ sous la forme d'une espérance conditionnelle sachant $\mathcal{F}_n$ calculée sur l'évènement $\{X_n = i\}$.

EXERCICE 3. En choisissant $S = \{-1, 1\}$, $A = \{-1, 1\}$ $N = 1$, $r_0(s, a) = \frac{1}{2}a^2$, $g(s) = \frac{1}{2}s^2$, et $P(i, j, a) = \mathbf{1}_{\{j=a\}}$, étudier les stratégies optimales.

EXERCICE 4. On considère $S = \{-1, 1\}$, $A = \{0, 1\}$, $r(s, a) = s^2 + a$ et $P(s, 1, 1-s) = p$ et $P(s, 0, s) = 1$. On pose $g(s) = s$.

(1) Écrire la récurrence de Bellman.
(2) Calculer la fonction valeur.

EXERCICE 5. On considère un système informatique, dont la protection est un entier entre 0 et 1 : 0 si la protection est nulle, 1 si la protection est présente. L'état est 0 ou 1 : 0 s'il est sain et 1 s'il est infecté.

A chaque instant, on peut payer un coût fixe c (et donc la récompense est négative $-c$) pour mettre la protection au niveau 1 et on paye $10 \times c$ si l'ordinateur est infecté (la récompense est alors de $-10 \times c$).

Si la protection est 1, la probabilité d'être infecté est p si l'état est 0 ou 1. Si la protection est 0, la probabilité d'être infecté est q si l'état 0 et est 1 si l'état est 1.

(1) En identifiant la protection à l'action, écrire le modèle.
(2) Donner la forme des accroissements dans Bellman.
(3) Résoudre Bellman sur $N = 2$ avec une récompense finale égale à αc si $X_2 = 0$ et βc si $X_2 = 1$.