Feuille du Chapitre 4 : Exemples

Exercice 1. On considère le jeu suivant. Le jeu se joue en deux étapes. Lors de la première étape, une pièce de monnaie est lancée. Le joueur observe le résultat. Il peut alors décider de quitter le jeu en empochant le résultat de la pièce, ou alors de rester. S'il reste, une deuxième pièce de monnaie est lancée. Le joueur empoche alors la moyenne des deux lancers comme gain.

Le problème, ici, est déterminer la stratégie optimale. Dans un premier temps, nous allons procéder à la modélisation du problème.

(1) On représente les lancers de chacune des deux pièces par deux variables aléatoires X_1 et X_2. Comment choisir ces deux variables ? Comment s'écrivent les gains respectifs aux instants 1 et 2 en fonction des variables X_1 et X_2 (suivant la stratégie décidée par le joueur) ?

(2) On modélise la décision du joueur sous la forme d'une variable aléatoire τ à valeurs dans $\{1, 2\}$, représentant l'instant où le joueur quitte le jeu. On choist $\{\tau = 1\} \in \sigma(X_1)$. Que dire de $\{\tau = 2\}$?

(3) Montrer que la gain moyen du joueur à l'issue du jeu, et pour une stratégie τ, s'écrit

$$g = \mathbb{E}\Big[X_1 \mathbf{1}_{\{\tau=1\}} + \frac{X_1 + X_2}{2}\mathbf{1}_{\{\tau=2\}}\Big].$$

(4) Montrer que g peut se réécrire sous la forme

$$g = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\big(X_1 - \frac{1}{2}\big)\mathbf{1}_{\{\tau=1\}}\Big].$$

(5) On écrit maintenant $\mathbf{1}_{\{\tau=1\}}$ sous la forme d'une fonction $\mathbf{1}_{\{\tau=1\}} = f(X_1)$. Ecrire g en fonction de f.

(6) En déduire la meilleure stratégie en fonction de X_1. Représenter ceci sous la forme d'un arbre.

Exercice 2. On reprend maintenant l'exercice précédent, mais on remplace les pièces par des dés (à six faces). On lance donc deux dés. Le gain, en quittant le jeu à la première étape, est égal au résultat du dé. Le gain, en quittant le jeu à la deuxième étape, est égal à la moyenne des résultats des deux dés.

(1) Que deviennent les variables X_1 et X_2 de l'Exercice 1 ?

(2) Montrer que les réponses aux questions (2) et (3) de l'Exercice 1 demeurent inchangées.

(3) Avec la même notation que dans la question (4) de l'Exercice 1, montrer que g s'écrit maintenant

$$g = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\Big[\big(X_1 - \frac{7}{2}\big)\mathbf{1}_{\{\tau=1\}}\Big].$$

(4) Sur le modèle de l'Exercice 1, en déduire la meilleure stratégie en fonction de X_1 et représenter à nouveau ceci sous la forme d'un arbre.

Exercice 3. On généralise maintenant l'Exercice 2. Le jeu contient dorénavant N étapes. Les règles sont de fait les suivantes :

(a) Si le joueur quitte le jeu à l'instant n, il empoche comme gain la moyenne de tous les lancers de 1 à n.

(b) Le joueur quitte au plus tôt le jeu à l'instant 1 ; au plus tard, il quitte le jeu à l'instant N.

On modélise donc les lancers des dés par N variables aléatoires $X_1, \cdots, X_N$ indépendantes et uniformément distribuées sur $\{1, \cdots, 6\}$. La décision du joueur est par ailleurs modélisée sous la forme d'un temps d'arrêt τ à valeurs dans $\{1, \cdots, N\}$. On notera $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Dans la suite de l'exercice, on procède par programmation dynamique pour trouver la meilleure stratégie.

(1) On se place à l'instant $N-1$. On suppose que le joueur est encore dans le jeu à cet instant là et que la somme des lancers précédents vaut s. Montrer que la décision du joueur est prise en comparant

$$\frac{s}{N-1} \quad \text{et} \quad \frac{s}{N} + \frac{7}{2N}.$$

Sachant que $s = \sum_{k=1}^{N-1} X_k$, et que le jeu s'arrête au temps N, soit le joueur s'arrête au temps $N-1$, et son gain est alors $\frac{s}{N-1}$, soit le joueur continue au temps N, et le jeu s'arrête forcément. Le gain moyen du joueur est alors $\frac{s+\mathbb{E}[X_N]}{N} = \frac{s+\frac{7}{2}}{N}$.

En déduire que son gain moyen optimal, conditionnellement à $S_{N-1} = s$, est

$$U_{N-1}(s) = \max\Big(\frac{s}{N-1}, \frac{s}{N} + \frac{7}{2N}\Big).$$

On rappelle que $(\chi_k)_{k\in\{0,\cdots,N-1\}}$ est une suite décroissante de variables aléatoires dans $\{0,1\}$, adaptées à $\mathcal{F}_k = \sigma(X_1,\cdots,X_k)$ telle que si $\chi_k = 0$ alors le joueur à quitté la partie avant la partir $k+1$ (on prendra toujours $\chi_0 = 1$). On note alors que le gain moyen suivant une stratégie $(\chi_0,\cdots,\chi_{N-1})$ est

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k}\sum_{k=1}^{\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k} X_k\right].$$

On cherche à optimiser ce gain sur toutes les stratégies.
On rappel que $\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k$ est le nombre de parties qui ont été jouées avant que le joueur s'arrête. Si $\sum_{k=0}^{N-2}\chi_k < N-1$, alors, nécessairement, comme la suite $(\chi_k)_k$ est décroissante, $\chi_{N-1} = 0$. Dans ce cas
Si $\sum_{k=0}^{N-2}\chi_k = N-1$, alors soit $\chi_{N-1} = 0$ (le joueur s'arrête avant la dernière partie), soit $\chi_{N-1} = 1$ et le joueur fait la dernière partie. Ainsi,

$$\frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k}\sum_{k=1}^{\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k} X_k = \mathbb{1}_{\chi_{N-1}=0}\frac{1}{\sum_{k=0}^{N-2}\chi_k}\sum_{k=1}^{\sum_{k=0}^{N-2}\chi_k} X_k + \mathbb{1}_{\chi_{N-1}=1}\frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{\sum_{k=1}^{N-2}\chi_k} X_k + X_N\right).$$

Donc, en conditionnant,

$$\sup_{(\chi_0,\cdots,\chi_{N-1})}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k}\sum_{k=1}^{\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k} X_k\right]$$
$$= \sup_{(\chi_0,\cdots,\chi_{N-2})}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\chi_{N-1}=0}\frac{1}{\sum_{k=0}^{N-2}\chi_k}\sum_{k=1}^{\sum_{k=0}^{N-2}\chi_k} X_k + \mathbb{1}_{\chi_{N-1}=1}\frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{\sum_{k=1}^{N-2}\chi_k} X_k + X_N\right)\right]$$

GrÃ¢ce au principe de programmation dynamique, on a alors pour $\zeta \in \{1,\cdots,N-1\}$ et $s \in \mathbb{R}_+$,

$$\sup_{(\chi_0,\cdots,\chi_{N-1})}\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k}\sum_{k=1}^{\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k} X_k\right] = \sup_{(\chi_0,\cdots,\chi_{N-2})}\mathbb{E}\left[V_{N-1}\left(\sum_{k=0}^{N-2}\chi_k, \sum_{k=1}^{\sum_{k=0}^{N-2}\chi_k} X_k\right)\right],$$

où

$$V_{N-1}(\zeta, s) = \max\left(\frac{1}{\zeta}s, \frac{1}{N}\left(s+\frac{7}{2}\right)\right).$$

Pour plus de facilités, on note $U_{N-1} = V_N(N-1, s)$.

Quelles sont les valeurs possibles de s ici ?

Ici, $s = \sum_{k=1}^{\zeta} x_i$ pour des $x_i \in \{1,\cdots,6\}$.

(2) Quelle serait, de façon consistante avec les notations de la question précédente, la définition de $U_N(s)$?

Ici, $U_N(s) = V_N(N,s)$. Dans la question précédante, ζ resprésentait le nombre de parties jouées. Ainsi, si $\zeta = N$, il a N parties jouées, et la somme des dés fait alors s. On en déduit que $U_N(s) = \frac{s}{N}$

En déduire que

$$U_{N-1}(s) = \max\Big(\frac{s}{N-1}, \mathbb{E}\big[U_N(s+X_N)\big]\Big).$$

(3) Expliquer pourquoi il convient de définir par récurrence :

$$U_n(s) = \max\Big(\frac{s}{n}, \mathbb{E}\big[U_{n+1}(s+X_{n+1})\big]\Big).$$

De la même façon, par principe de programmation dynamique, on a l'égalité précédente.

Quelles sont les valeurs possibles de s, ici ?

(4) Supposons que toutes les fonctions U_n, $n = 1, \cdots, U_N$, aient été calculées. Comment construire la stratégie optimale ?

Á chaque instant, on considè $U_n(S_n)$, où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On compare alors $\frac{1}{n+1}\mathbb{E}[U_n(S_n + X_{n+1})|S_n]$ et $\frac{S_n}{n}$. Si le maximum est atteint pour la deuxième quantité, on s'arrête, sinon on continue.

EXERCICE 4. On considère un marché financier binomial à N périodes. Les paramètres de hausse et de baisse u et d ainsi que le taux d'intérêt r vérifient :

$$d < 1 + r < u.$$

Les facteurs de croissance $\xi_1, \cdots, \xi_N$ sont, sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^\star$, des variables indépendantes de Bernoulli sur $\{u, d\}$ de probabilité de hausse $p^* = (1 + r - d)/(u - d)$. Enfin, $\mathcal{T}(0, N)$ désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $\{0, \cdots, N\}$ et K désigne le prix d'exercice de l'option. Dans la suite, la valeur de S_0 est fixée pour simplifier égale à 1. On rappelle la formule pour le prix d'une option américaine d'achat :

$$C = \sup_{\tau \in \mathcal{T}(0,N)} \mathbb{E}^*\Big[(1+r)^{-\tau}\big(S_\tau - K\big)_+\Big],$$

On rappelle que ce prix peut être obtenu via la programmation dynamique, qui s'écrit ici :

$$C = U_0(S_0),$$

où, U_N, U_{N-1}, $\cdots$, U_0 sont définies par récurrence descendante :

$$U_N(s) = (s - K)_+,$$
$$U_n(s) = \max\Big((s - K)_+, (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*\big[U_{n+1}(s\xi_{n+1})\big]\Big), \quad n = 0, \cdots, N-1.$$

Dans la suite, on définit :

$$\tau = \min\big\{n \in \{0, \cdots, N\} : (S_n - K)_+ = U_n(S_n)\big\}.$$

(1) Montrer que l'ensemble dans la définition de τ n'est pas vide.

$$(S_N - K)_+ = U_N(S_N),$$

donc N dans l'ensemble, quu n'est donc pas vide.

(2) Montrer que τ est un temps d'arrêt.

On rappelle qu'un temps d'arrêt $\tilde{\tau}$ pour une filtration $(\mathcal{F}_k)_k$ est une variable à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\tilde{\tau} = n) \in \mathcal{F}_n$. Notons que $(\tau = n)$ si pour tout $k \le n-1$, $(S_k - K)_+ \ne U_k(S_k)$ et $U_n(S_n) = (S_n - K)_+$, donc τ est un temps d'arrêt.

(3) Montrer que, sur $\{n < \tau\}$,

$$U_n(S_n) = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*\big[U_{n+1}(S_{n+1})|\mathcal{F}_n\big].$$

Par définition, comme $\tau > n$, pour tout $k \le n$, $(S_k - K)_+ \ne U_k(S_k)$. Or, par définition également, dans ce cas,

$$U_n(S_n) = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^*\big[U_{n+1}(S_{n+1})|\mathcal{F}_n\big].$$

(4) Pour $n = 0, \cdots, N-1$, on pose maintenant

$$V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+r)^k}\mathbf{1}_{\{\tau = k\}}U_k(S_k) + \frac{1}{(1+r)^n}\mathbf{1}_{\{\tau \ge n\}}U_n(S_n).$$

Montrer que $(V_n)_{n=0,\cdots,N}$ est une martingale.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^*[V_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+r)^k}\mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}U_k(S_k)|\mathcal{F}_n\right] + \frac{1}{(1+r)^n}\mathbb{E}^*\left[\mathbf{1}_{\{\tau \ge n+1\}}U_{n+1}(S_{n+1})|\mathcal{F}_n\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+r)^k}\mathbf{1}_{\{\tau=k\}}U_k(S_k) + \frac{1}{(1+r)^n}\mathbf{1}_{\{\tau > n\}}\mathbb{E}^*\left[U_{n+1}(S_{n+1})\right] \\
&= V_n
\end{aligned}$$

grâce à la question précédente.

(5) En déduire que

$$U_0(S_0) = \mathbb{E}^*\Big[(1+r)^{-\tau}(S_\tau - K)_+\Big].$$

On remarque que $\mathbb{E}^*[V_n] = \mathbb{E}^*[(1+r)^{-\tau}(S_\tau - K)_+]$. V étant une martingale, on a également $\mathbb{E}^*[V_n] = V_0 = U_0(S_0)$, CQFD.