Feuille du Chapitre 1 : Rappels et Chaîne de Markov (contrôlées)

1. Rappels

1.1. Tribus.

Exercice 1. Rappeler la définition d'une tribu $\mathcal{E}$ sur un ensemble E. Rappeler la définition d'un espace mesurable. Donner des exemples simples d'espaces mesurables. Rappeler la définition d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Rappeler la définition d'une variable aléatoire $X : \Omega \to E$.

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soit X une variable aléatoire à valeur dans E. Montrer que

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}\}$$

est une sous-tribu de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que si $h : E \to E$ est une fonction mesurable, alors $h(X)$ est mesurable par rapport à $\sigma(X)$.

L'exercice précédent admet une réciproque, admise dans la proposition suivante :

Proposition. *Soit X, Y deux variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeur dans $(E, \mathcal{E})$. Alors X est mesurable par rapport à $\sigma(Y)$ si et seulement si il existe une fonction mesurable f de E dans E telle que $X = f(Y)$.*

1.2. Espérance conditionnelle. On rappel d'abord la définition et les propriétés de l'espérance conditionnelle :

Proposition. *Soit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R})$ une variable aléatoire et $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. Il existe une unique (presque surement) variable aléatoire $\mathcal{G}$ mesurable, notée $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et appelée espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ (c'est à dire que $\sigma(\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]) \subset \mathcal{G}$), telle que pour tout $A \in \mathcal{G}$,*

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A\big] = \mathbb{E}\big[X\mathbb{1}_A\big].$$

De plus, l'espérance conditionnelle vérifie les propriétés suivantes :

- *L'espérance conditionnelle est linéaire, positive, et vérifie les inégalités classiques (Jensen, Hölder,...)*
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[X]$,
- *Si Y est $\mathcal{G}$ mesurable, alors, presque surement,* $\mathbb{E}[XY|\mathcal{G}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$,
- *Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors* $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$.
- *Si $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ est une autre sous tribu de $\mathcal{F}$, alors* $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X|\mathcal{H}]$
- *Si f est une fonction mesurable, que X est indépendante de $\mathcal{G}$ et que Y est $\mathcal{G}$ mesurable telles que $f(X, Y) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors $\mathbb{E}[f(X, Y)|\mathcal{G}] = F(Y)$, où pour tout y,*

$$F(y) = \mathbb{E}[f(X, y)].$$

Par ailleurs si $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, on note

$$\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X|\sigma(Y)],$$

et par la proprosition précédente, il existe une fonction mesurable h telle que $\mathbb{E}[X|Y] = h(Y)$.

Exercice 4. Soit $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et Y une variable aléatoire indépendante de X. On définit

$$Z = \exp(-\frac{\sigma^2}{2}Y^2 + XY).$$

(1) Calculer $\mathbb{E}[Z|Y]$.
(2) Montrer que $\mathbb{E}[Z] = 1$

2. Chaînes de Markov

Exercice 5. Soit $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ où $Y : \Omega \to F$ est une variable aléatoire dans un espace dénombrable F. Soit X une variable aléatoire à valeur dans un espace dénombrable $\mathcal{S}$ et soit $i \in \mathcal{S}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(X = i|\mathcal{G}) := \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{X=i\}}|\mathcal{G}] = \sum_{\substack{j\in F\\ \mathbb{P}(Y=j)>0}} \mathbb{P}(X = i|Y = j)\mathbb{1}_{Y=j}.$$

Exercice 6. Prouver la proposition suivante du cours concernant la forme canonique des chaînes de Markov.

Proposition. *Soit $f : \mathbb{N} \times \mathcal{S} \times [0,1] \to \mathcal{S}$ une fonction mesurable.*
Soient $X_0 : \Omega \to \mathcal{S}$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ une variable aléatoire et une suite de variables aléatoires telles que
(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$.
(2) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.
(3) X_0 et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ sous indépendantes.
Alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$X_{n+1} = f(n, X_n, U_{n+1})$$

est une chaîne de Markov de matrices de transition

$$((P(n,i,j))_{i,j\in\mathcal{S}})_{n\in\mathbb{N}} = ((\mathbb{P}(f(n,i,U_1) = j))_{i,j\in\mathcal{S}})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exercice 7. Prouver la proposition suivante qui montrer que toute chaîne de Markov peut s'écrire (en loi) sous la forme d'une chaîne de Markov canonique :

Proposition. *Toute chaine de Markov d'espace d'état $\mathcal{S}$ au plus dénombrable et de matrices de transition $((P(n,i,j))_{i,j\in\mathcal{S}})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une forme canonique.*

Indication : soit $n \in \mathbb{N}$ and $i \in \mathcal{S}$, soit $f(n,i,\cdot)$ la fonction quantile de la loi de poids $(P(n,i,j))_{j\in\mathcal{S}}$.

3. Chaînes de Markov contrôlées

3.1. Généralités.

Exercice 8. On suppose que $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est un Borélien de $\mathbb{R}^d$ et que $\mathcal{S}$ est au plus dénombrable.
Soit

$$f : \mathbb{N} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \to \mathcal{S}.$$

Montrer que f est mesurable si et seulement si pour tout $(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathcal{S}$, $f(n,i,\cdot) : \mathcal{A} \to \mathcal{S}$ est mesurable au sens classique, c'est à dire que pour tout $j \in \mathcal{S}$,

$$\{a \in \mathcal{A} : f(n,i,a) = j\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Exercice 9 (Forme canonique des chaînes de Markov contrôlées 1). On suppose $\mathcal{A}$ fini. Soit $P : \mathbb{N} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times \mathcal{S} \to [0,1]$ une collection de matrices de transition contrôlées et soit $(f_n : \mathcal{S} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de $\mathcal{S}$ à valeur de $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, l'ensemble des mesures de probabilités sur $\mathcal{A}$.

Montrer qu'il existe une fonction $G : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \times [0,1] \to \mathcal{A}$ telle que si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoire iid de loi $\mathcal{U}([0,1])$ indépendante de X_0, et que si $(X_n, A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définit par la relation de récurrence

$$A_n = G(f_n(X_n), V_n), \quad X_{n+1} \sim P(n, X_n, A_n, \cdot),$$

alors $(X_n, A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov contrôlée de matrices de transitions contrôlées P avec une suite de contrôles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de forme mixte markovienne.

Exercice 10 (Forme canonique des chaînes de Markov contrôlées 2). On suppose $\mathcal{A}$ fini. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on se donne $f_n : \mathcal{S} \to \mathcal{P}(\mathcal{A})$, où ici $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ désigne l'ensemble des probabilités sur $\mathcal{A}$. $F : \mathbb{N} \times \mathcal{S} \times \mathcal{A} \times [0,1] \to \mathcal{S}$ mesurable. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{U}([0,1])$ et indépendantes de X_0. Soit $G : \mathcal{P}(A) \times [0,1] \to \mathcal{A}$ la fonction définie à l'exercice précédent.

Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n, A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$A_n = G(f_n(X_n), V_n), \quad X_{n+1} = F(n, X_n, A_n, U_n)$$

est une chaîne de Markov contrôlée de matrices de transition contrôlées

$$(P(n,i,a,j) = \mathbb{P}(F(n,i,a,U_1) = j))_{n\in\mathbb{N}, i,j\in\mathcal{S}, a\in\mathcal{A}}$$

pour la filtration $(\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, V_0, U_0, \cdots V_n, U_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et telle que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'éxrite sous forme mixte markovienne.

3.2. Exemples.

Exercice 11 (Approvisionnement de stock). Un centre de livrasion s'approvisionne de la façon suivate :

- S_0 : stock initial
- A l'instant $n \in \mathbb{N}$, S_n représente l'état du stock (un entier dans $\{0, \cdots, N_S\}$) et A_n représente l'approvisionnement (un entier das $\{0, \cdots, N_A\}$).
- Entre n et $n+1$, D_{n+1} représente la demande aléatoire (indépendante des observations passées), de loi homogène (sur $\{0, \cdots, N_D\}$).
- La demande est satisfiate si $S_n + A_n \geq D_{n+1}$, sinon elle est satisfaite dans la mesure du possible.

Écrire la chaîne de Markov contrôlée associé. *Indication :* $S_{n+1} = \max(S_n + A_n - D_{n+1}, 0)$.

Exercice 12 (Bandit multi-bras). Un joueur observe les résultats de K machines à sous différentes. A chaque étape, il en choisit une et une seule et la joue, les $K-1$ autres ne sont pas jouées.

A chaque partie n, on consigne les états des machines à sous, ainsi, un seul de ces états parmis les $K-1$ est actualisé.

On suppose que la machine $i \in \{1, \cdots, K\}$ peut être dans les états S^i. La machine i passe d'un état $s_1 \in S^i$ à un état $s_2 \in S^i$ avec probabilité $p(i, s_1, s_2)$.

Écrire une matrice de transition contrôlée avec $S^1 \times \cdots \times S^K$ comme espace d'états et $\{1, \cdots, K\}$ comme espace d'actions qui modélise le problème précédent.

Exercice 13 (Selection d'un film sur Netflix). Un abonné sélectionne un film sur Netflix avec la règle suivante : il visualise les suggestions de façon séquentielle et ne peut choisir que le film dont il est en train de regarder la notice (pas de retour en arrière possible), c'est à dire que soit il choisit le film dont il est en train de regarder la notice, et alors la sélection s'arrête, soit il regarde la notice suivante, mais ne pourra pas revenir en arrière.

On note $\mathcal{S} = \{0,1\}$ l'espace d'état. L'état est 1 si le film consulté est le meilleurs choix (au regard des goûts de l'abonné) parmi tous ceux consultés jusqu'alors. L'état est 0 si ce n'est pas le cas.

On note $\mathcal{A} = \{0,1\}$ l'espace d'actions possible pour l'abonné : 1 si on choisit le film dont on est en train de consulter la notice, 0 sinon.

Montrer qu'on obtient une chaîne de Markov contrôlée de matrices de transition

$$P(n,i,a,1) = \frac{1}{n+1} = 1 - P(n,i,a,0), \quad i \in \{0,1\}, a \in \{0,1\}.$$