
Feuille de TP 1 : Simulations Chaîne de Markov (contrôlées)

---

1. Espérance conditionnelle

EXERCICE 1. On considère Y une variable L^2 et $\mathcal{B}$ une tribu. On définit la *variance conditionnelle de Y sachant $\mathcal{B}$* par

$$\mathbb{V}\left(Y|\mathcal{B}\right) = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}\left[Y|\mathcal{B}\right])^2|\mathcal{B}\right].$$

(1) Montrer que la variable aléatoire $\mathbb{V}\left(Y|\mathcal{B}\right)$ est une variable aléatoire p.s. positive ou nulle vérifiant :

$$\mathbb{V}\left(Y|\mathcal{B}\right) = \mathbb{E}\left[Y^2|\mathcal{B}\right] - \left(\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{B}\right]\right)^2.$$

(2) Montrer que $\mathbb{E}\left[\mathbb{V}\left(Y|\mathcal{B}\right)\right] = \mathbb{V}\left(Y\right) - \mathbb{V}\left(\mathbb{E}\left[Y|\mathcal{B}\right]\right)$, où $\mathbb{V}$ est la variance.

EXERCICE 2. *Finance.*
Un processus ARCH(1)[1] est un processus à temps discret $(X_n)_{n\geq 0}$ très utilisé dans les modélisations de séries temporelles financières (X_n est le prix de l'actif au temps n). Il est défini par une relation de la forme

$$X_n = \varepsilon_n \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2}$$

où $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 > 0$ sont deux paramètres fixés et $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. centrées de variance 1 indépendantes de X_0.

(1) Est-ce que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov ?
(2) Écrire un code en Python pour simuler $(X_n)_n$.
(3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}\left[X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^X\right] = 0$.
(4) On pose pour tout $n \geq 1$, $Y_n^2 = \mathbb{V}\left(X_n \,|\, \mathcal{F}_{n-1}^X\right)$ (la variance conditionnelle étant définie dans l'exercice 1). Montrer que

$$Y_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{n-1}^2.$$

(5) En déduire le comportement de $\mathbb{V}\left(X_n\right)$ quand n tend vers l'infini selon les valeurs de α_0 et α_1.
(6) Écrire une programme python pour vérifier ça.

2. Simulation de chaînes de Markov

2.1. Généralité.

EXERCICE 3. On commence par comprendre comment la simulation d'une chaîne de Markov fonctionne sur un exemple simple, avec $E = \{0, 1\}$ comme espace d'états. On suppose de fait que la matrice de transition est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, à chaque étape, la probabilité de rester sur place est p ; celle de changer est $1-p$.

(1) Écrire une fonction `transition` dépendant de l'état $i \in \{0, 1\}$ et du paramètre p renvoyant i avec probabilité p et $1 - i$ avec probabilité $1 - p$.
(2) En déduire une fonction `chaine`, dépendant de $i \in \{0, 1\}$, d'un instant $n \geq 0$ et du paramètre p et renvoyant une réalisation des états occupés par la chaîne entre les instants 0 et n, lorsque la chaîne est initialisée à l'état i.
(3) Représenter, pour $i = 0$, $n = 100$, $p = .3$ une réalisation de la chaîne entre 0 et 100. Effectuer d'autres représentations pour d'autres valeurs de p : p allant de .1 à .9. Commenter.

---

1. pour "AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity"

Exercice 4. Soit P une matrice de transition arbitraire sur l'espace d'états $E = \{0, \cdots, N-1\}$.

On rappelle que si $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite de v.a. iid de loi uniforme sur $]0,1[$ alors la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ définie ci-dessous forme une chaîne de Markov d'état initial i et de matrice de transition P :

$$X_0 = i, \quad X_{n+1} = \sum_{j=1}^{N} j \mathbf{1}_{\sum_{\ell=1}^{j-1} P_{X_n,\ell} \leq U_{n+1} < \sum_{\ell=1}^{j} P_{X_n,\ell}}, \quad n \geq 0.$$

(1) Sur le modèle de l'exercice 1, construire une fonction `transition` dépendant de l'état i dans E et de la matrice de transition P, permettant de simuler une réalisation de la position de la chaîne au bout d'un coup et à partir du point de départ i.

Remarquer que la matrice `P` est en entrée.

(2) En déduire une fonction `chaine`, dépendant de l'état i dans E, de la matrice de transition P, et d'un instant $n \geq 0$, simulant les $n+1$ premières positions de la chaîne initialisée en i.

(3) Tester sur l'exemple de l'exercice 1 avec $p = .3$, en prenant le soin de remplacer $E = \{0, 1\}$ par $E = \{1, 2\}$.

Exercice 5. On choisit maintenant

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On souhaite visualiser graphiquement la communication de deux états : vérifier par simulation que 1 et 2 communiquent, que 3 et 4 communiquent. Vérifier également que, partant que de 1 ou de 2, on n'y repasse qu'un nombre fini de fois, et que, partant de 3 ou 4, on ne reste que dans la classe $\{3, 4\}$. Pour cela, on utilisera la fonction `chaine` de l'exercice précédent.

2.2. Mesure invariante et théorème ergodique.

Exercice 6. On reprend le contexte de l'exercice 2.

(1) Construire une fonction `proportion` permettant de simuler la proportion du nombre de retour en i entre les instants 1 et n d'une chaîne de Markov sur $\{1, \ldots, N\}$, d'état initial $i \in \{1, \ldots, N\}$ et de matrice de transition P.

(2) Appliquer la fonction `proportion` à la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/4 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

en choisissant $n = 1000$, $i \in \{1, 4\}$. En notant $\mu(i)$ le retour de la fonction `proporition` pour $i \in \{1, 4\}$ comparer μ à μP.

3. Chaîne de Markov contrôlées

Exercice 7. On reprend l'exemple de l'approvisionnement de stock. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On appel S_n le stock à l'instant n. $S_n \in \{0, \cdots, N_S\}$. On appelle A_n l'approvisionnement à l'instant n, $A_n \in \{0, \cdots, N_A\}$. Entre l'instant n et l'instant $n+1$, il y a une demande aléatoire $D_{n+1} \in \{0, \cdots, N_D\}$. On rappelle qu'alors

$$S_{n+1} = \max(S_n + A_n - D_{n+1}, 0).$$

(1) On note $P = (p_0, \cdots, p_{N_D})$ le vecteur tel que $\mathbb{P}(D_1 = i) = p_i$. Écrire une fonction `approvisionnement` qui prend un état, un contrôle P et qui renvoie l'état suivant.

Notons également qu'une commande de $a \in \{0, \cdots, N_A\}$ coûte $a * r_A + r_{A_0}$, que stocker un stock $s \in \{0, \cdots, N_S\}$ coûte $s * r_S + r_{S_0}$, et qu'enfin vendre v unité rapporte $d * r_D$.

(2) Montrer que la richesse à l'instant n s'écrit

$$R_{n+1} = R_n + A_n r_A + r_{A_0} + S_n r_S + r_{S_0} + (S_{n+1} - S_n) r_D.$$

(3) Écrire une fonction `richesse` qui donne l'évolution de la richesse entre deux instants.

$N_S = 8$, $N_A = 5$, $N_D = 9$, $p_i = (10 - i)/55$, $r_{A_0} = r_{S_0} = 0$, $r_D = 1000$, $r_S = 100$, $r_A = 800$, $R_0 = 1000$.

(4) On veut expérimenter plusieurs stratégies. Écrire une fonction `strategie_max` qui implémente la stratégie : on remplis le stock systématiquement au maximum. Tracer l'état du stock et l'état de la richesse en fonction du temps. Évaluer le temps de ruine.

(5) Même question avec une stratégie `strategie_random` où le gérant s'approvisionne au hasard.

(6) Même question avec la stratégie `strategie_vide` : on attend d'être à cours de stock pour commander