Processus de Décisions Markoviens (MDP) et application

François Delarue

Rémi Catellier

Table des matières

Chapitre 2

Modèle à 1 période

1. Principe général

2. Allocation optimale

2.1. Problème d'optimisation. Le problème de l'allocation optimale est maintenant donné par

$$\sup_{\phi} \mathbb{E}\big[U\big(W_1^{w,\phi}\big)\big],$$

où w désigne le capital initial de l'investisseur et ϕ désigne l'allocation choisie. On rappelle la formule $W_1^{w,\phi} = (1+r)w + \phi(\xi - (1+r))$.

En réalité, cette définition n'est propre que dans le cas où U est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ tout entier (et où l'espérance est bien définie). Pour remédier à ce problème, on peut restreindre l'ensemble des allocations possibles. Nous illustrons ce principe dans le cas où U n'est définie que sur $[0, +\infty)$:

Définition 2.1. Etant donné un capital initial $w \in \mathbb{R}$, on dit que la stratégie ϕ est admissible si

$$\mathbb{P}\big(\{W_1^{w,\phi} \geq 0\}\big) = 1.$$

On désigne par $\mathcal{D}(w)$ la collection des stratégies admissibles.

Par exemple, si $w \geq 0$, $0 \in \mathcal{D}(w)$.

On en déduit la définition suivante :

Définition 2.2. Lorsque U n'est définie que sur $[0, +\infty)$, on appelle problème d'allocation optimale, pour un capital initial w (pris en général positif ou nul) le problème de maximisation :

$$\sup_{\phi \in \mathcal{D}(w)} \mathbb{E}\big[U\big(W_1^{w,\phi}\big)\big].$$

Le problème de la bonne définition de l'espérance peut être résolu de plusieurs façons. Une façon systématique est d'observer que :

Lemme 2.3. *Si ξ est intégrable, alors, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(w)$, $\mathbb{E}[U(W_1^{w,\phi})]$ est bien définie, comme un élément de $[-, \infty, \infty)$.*

Démonstration. Comme U est une fonction concave, il existe deux réels a, b tels que $U(x) \leq ax + b$. En remplaçant $W_1^{w,\phi}$, on en déduit le résultat. $\square$

2.2. Modèle de Cox. On appelle modèle de Cox le cas où

$$\mathbb{P}\big(\{\xi = u\}\big) = 1 - \mathbb{P}\big(\{\xi = d\}\big) = p \in]0, 1[,$$

pour deux réels $0 < d < u$.

Proposition 2.4. *Supposons $1 + r \in]d, u[$. Pour une fonction d'utilité $U : [0, +\infty) \to R$, le problème d'allocation optimale (pour une richesse initiale a une unique solution.*

La condition sur r est comprise de la façon suivante : $d < 1 + r$ dit que l'actif risqué est réellement risqué ; $u > 1 + r$ dit que l'actif risqué présente un intérêt.

DÉMONSTRATION. On commence par observer que $\phi \in \mathcal{D}(w)$ si et seulement si

$$(1+r)w + \phi\big[u - (1+r)\big] \geq 0,$$
$$(1+r)w + \phi\big[d - (1+r)\big] \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\phi \in \Big[-\frac{u-(1+r)}{(1+r)w}, \frac{(1+r)-d}{(1+r)w}\Big]$$

Autrement dit, $\mathcal{D}(w)$ est un segment. Par ailleurs,

$$\mathbb{E}\big[U(W_1^{w,\phi})\big] = pU\big((1+r) + \phi(u-(1+r))\big) + (1-p)U\big((1+r) + \phi(d-(1+r))\big).$$

Nous sommes réduits à maximiser une fonction strictement concave sur un compact. □

2.3. Exercices.

EXERCISE 1. On considère la fonction d'utilité

$$U(x) = x^\gamma, \quad x > 0,$$

avec γ paramètre dans $]0,1[$. Pour $x > 0$ et pour ξ variable aléatoire à valeurs positives et intégrable, on note $D(x) = \{\phi : \mathbb{P}\{(1+r)x + \phi(\xi - (1+r)) \geq 0\} = 1\}$.

(1) Pour $x > 0$, montrer que $\phi \in D(x)$ si et seulement si $\phi/x \in D(1)$.
(2) En déduire que

$$\sup_{\phi \in D(x)} \mathbb{E}\Big[U\big((1+r)x + \phi(\xi - (1+r))\big)\Big] = x^\gamma \sup_{\phi \in D(1)} \mathbb{E}\Big[U\big((1+r) + \phi(\xi - (1+r))\big)\Big].$$

EXERCISE 2. On se donne deux rendements aléatoires X et Y, chacun de loi gaussienne. Montrer que X est préférable à Y pour le critère moyenne variance si et seulement si X est préférable à Y pour n'importe quelle fonction d'utilité sur $\mathbb{R}$.

EXERCISE 3. On considère un marché financier Bernoulli à une période avec $d < 1+r < u$. On fixe par ailleurs une richesse initiale $w > 0$, une fonction d'utilité U définie sur $[0,+\infty)$, ainsi qu'un produit financier dont le flux à échéance est $f(S_1)$.

(1) Montrer qu'il existe p et ψ tels que

$$f(S_1) = W_1^{p,\psi}.$$

(2) En déduire que, pour toute stratégie ϕ,

$$W_1^{w,\phi} - f(S_1) = W_1^{w-p,\phi-\psi}.$$

(3) Montrer que $\mathbb{P}(\{W_1^{w,\phi} - f(S_1) \geq 0\}) = 1$ si et seulement si $\phi - \psi \in D(w-p)$, où $D(w-p) = \{\theta \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(\{W_1^{w-p,\theta} \geq 0\}) = 1\}$.
(4) En déduire qu'optimiser $\mathbb{E}[U(W_1^{w,\phi} - f(S_1))]$ par rapport à ϕ tel que $\mathbb{P}(\{W_1^{w,\phi} - f(S_1) \geq 0\}) = 1$ revient à optimiser $\mathbb{E}[U(W_1^{w-p,\phi-\psi})]$ par rapport ϕ tel que $\phi - \psi \in D(w-p)$.
(5) On suppose que w désigne la richesse initiale d'un agent financier. Il vend, à l'instant 0, le produit financier de flux $f(S_1)$ à échénace. Il reçoit, en contrepartie, c. Sa richesse est donc $w + c$. Montrer que

$$\sup_{\phi : \mathbb{P}(\{W_1^{w+c,\phi} - f(S_1) \geq 0\})} \mathbb{E}[U(W_1^{w+c,\phi} - f(S_1))] = \sup_{\phi - \psi \in D(w+c-p)} \mathbb{E}[U(W_1^{w+c-p,\phi-\psi})].$$

(6) En déduire que, pour l'agent financier, la vente du produit est intéressante si et seulement si $c \geq p$. En conclure que p doit être le juste prix du produit financier.