Processus de Décisions Markoviens (MDP) et application

François Delarue

Rémi Catellier

Table des matières

Chapitre 4

Exemples d'application à la finance

1. Marchés financiers multi-périodes

Nous développons maintenant le modèle de marché financier introduit dans le chapitre 1. L'idée est de regarder des marchés dont les cours peuvent évoluer au cours du temps, entre l'ouverture (du marché ou d'un contrat) et la clôture (d'un marché ou d'un contrat).

1.1. Evolution des cours. L'évolution de l'actif risqué est modélisée à l'aide d'une famille de variables aléatoires $(\xi_1, \cdots, \xi_N)$ indépendantes et de même loi (sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Le cours, à l'instant $n \in \{0, \cdots, N\}$ (dans une unité de temps fixée, qui peut être le mois, la semaine, le jour, l'heure, la minute, la seconde...), est alors donné par

$$S_n = S_0 \prod_{k=1}^{n} \xi_k, \quad n \in \{0, \cdots, N\},$$

où S_0 est le cours initial (supposé pour simplifier déterministe).

De même, le cours de l'actif sans risque s'écrit

$$S_n^0 = S_0^0 (1 + r)^n.$$

Exemple 1.1. L'exemple typique est le cas binomial où les variables aléatoires sont à valeurs dans $\{d, u\}$ pour $d < u$.

L'évolution des cours oblige à préciser la façon dont les observations s'accumulent avec le temps. Dans la suite, nous sommes donc amenés à considérer une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\cdots,N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est $\mathcal{F}_n$-measurable. Un exemple est la filtration engendrée par $(\xi_1, \cdots, \xi_N)$.

1.2. Portefeuille. Le fait que les cours soient suivis de façon précise au cours du temps permet de modifier, de façon dynamique, l'allocation du capital entre chacun des deux actifs (risqué et sans-risque).

En clair, la notion de portefeuille ou de stratégie doit tenir compte de la possibilité, pour l'agent financier, de rééquilibrer son portefeuille à chaque instant n. A l'instant 0, la répartition du portefeuille est décrite par un couple (Φ_0^0, Φ_0) sur le même principe que pour le modèle à une période. En particulier, le couple (Φ_0^0, Φ_0) est déterministe. La richesse associée aux instants 0 et 1 s'écrit de fait (en l'absence de consommation) :

$$W_0 = \Phi_0^0 S_0^0 + \Phi_0 S_0,$$
$$W_1 = \Phi_0^0 S_1^0 + \Phi_0 S_1.$$

A l'instant 1, l'agent peut décider d'une nouvelle répartition du capital, qui se fait sur l'observation des prix jusqu'à l'instant T ou, de façon équivalente, à l'aide de l'information contenue dans $\mathcal{F}_1$. Il choisit donc deux variables aléatoires (Φ_1^0, Φ_1) telles que

$$W_1 = \Phi_1^0 S_1^0 + \Phi_1 S_1.$$

Il s'agit là d'une nouvelle répartition de son capital. La condition d'égalité :

$$\Phi_0^0 S_1^0 + \Phi_0 S_1 = \Phi_1^0 S_1^0 + \Phi S_1,$$

traduit l'absence de consommation ou encore l'absence d'apport extérieur. On dit que la stratégie, à l'instant 1, est déterminée de façon *auto-financée*.

Ce principe est étendu aux instants 2, 3, ..., $N - 1$.

Définition 1.2. On appelle stratégie auto-financée toute suite de variables aléatoires
$$(\Phi_n^0, \Phi_n)_{n\in\{0,\ldots,N-1\}}$$
adaptée à la filtration du marché $(\mathcal{F}_n)_{n\in\{0,\ldots,N-1\}}$, et définissant une suite $(W_n)_{n\in\{0,\ldots,N\}}$ de richesses associées :
$$\begin{aligned}
W_0 &= \Phi_0^0 S_0^0 + \Phi_0 S_0,\\
W_n &= \Phi_{n-1}^0 S_n^0 + \Phi_{n-1} S_n\\
&= \Phi_n^0 S_n^0 + \Phi_n S_n, \quad n \in \{1,\ldots,N-1\},\\
W_N &= \Phi_{N-1}^0 S_{N-1}^0 + \Phi_{N-1} S_{N-1}.
\end{aligned}$$

Il faut insister sur le fait que l'auto-financement décrit une situation d'équilibre financier permettant d'exprimer la richesse de deux façons. Dans ce contexte, il est remarquable que la richesse aux instants 1, 2, ..., N, puisse être exprimée à l'aide de variables aléatoires ne dépendant que des observations jusqu'aux instants 0, 1, ..., $N-1$. On dit que le processus $(\Phi_{n-1})_{n\in\{1,\ldots,N\}}$ est prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\{1,\ldots,N\}}$: cela signifie que, pour tout $n \in \{1,\ldots,N\}$, Φ_{n-1} est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$.

1.3. Richesse conditionnelle. Pour un entier $n \in \{1,\ldots,N\}$, nous cherchons à calculer $\mathbb{E}[W_{nT}|\mathcal{F}_{n-1}]$. Ceci suppose que $\mathbb{E}[|W_{nT}|] < +\infty$. Pour cela, nous imposons :
$$\forall n \in \{1,\ldots,N\}, \quad \mathbb{E}\big[|\phi_n|^2\big],\ \mathbb{E}\big[|\xi_n|^2\big] < +\infty. \tag{1}$$
Il est assez facile de vérifier que (1) implique effectivement $\mathbb{E}[|W_n|] < +\infty$, pour tout $n \in \{1,\ldots,N\}$. Si jamais Ω est de cardinal fini, cette hypothèse est naturellement vérifiée.

Nous pouvons maintenant calculer :
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[W_n|\mathcal{F}_{n-1}\big] &= \mathbb{E}\big[\Phi_{n-1}^0 S_n^0 + \Phi_{n-1} S_n|\mathcal{F}_{n-1}\big]\\
&= \Phi_{n-1}^0 S_n^0 + \Phi_{n-1} S_{n-1}\mathbb{E}\big[\xi_n|\mathcal{F}_{n-1}\big].
\end{aligned}$$
Par indépendance de ξ_n et de $\mathcal{F}_{n-1}$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[\xi_n|\mathcal{F}_{n-1}]$ est égale à $\mathbb{E}[\xi_n]$.

Proposition 1.3. *Sous (1), supposons que $\mathbb{E}[\xi_n] = 1 + r$, pour un n donné entre 1 et N, alors,*
$$\mathbb{E}\big[W_n|\mathcal{F}_{n-1}\big] = (1+r)W_{n-1}.$$

Ce résultat est très important. Il peut être réénoncé à l'aide de la théorie des martingales :

Proposition 1.4. *Supposons que (1) soit vérifiée pour une stratégie auto-financée*
$$(\Phi_n^0, \Phi_n)_{n\in\{0,\ldots,N-1\}}.$$
Supposons par ailleurs que
$$\forall n \in \{1,\ldots,N\}, \quad \mathbb{E}[\xi_n] = 1 + r.$$
Alors, la suite
$$\big((1+r)^{-n} W_n\big)_{n\in\{0,\ldots,N\}}$$
est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\in\{0,\ldots,N\}}$.

1.4. Probabilité(s) risque-neutre. En réalité, il n'est pas réaliste d'espérer modéliser la dynamique du marché à l'aide d'une probabilité historique $\mathbb{P}$ vérifiant
$$\forall n \in \{1,\ldots,N\}, \quad \mathbb{E}[\xi_n] = 1 + r.$$
En revanche, il est raisonnable d'espérer trouver d'autres mesures de probabilités, équivalentes à la probabilité historique, sous laquelle cette propriété est vérifiée :

Définition 1.5. Une probabilité $\mathbb{P}^*$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est dite risque-neutre si :

(1) Elle est équivalente à $\mathbb{P}$, i.e., $\mathbb{P}^*$ et $\mathbb{P}$ ont exactement les mêmes évènements de mesure nulle.

(2) Sous $\mathbb{P}^*$, les variables $\xi_1, \dots, \xi_N$ sont indépendantes,
(3) Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, $\mathbb{E}^*[\xi_n] = 1 + r$, où $\mathbb{E}^*$ désigne l'espérance sous $\mathbb{P}^*$.

Il est possible de relier l'existence d'une probabilité risque-neutre à l'absence d'opportunité d'arbitrage sur le modèle du chapitre précédent. Ceci suppose néanmoins d'adapter la définition d'un arbitrage :

Définition 1.6. On dit qu'une stratégie $(\Phi_n^0, \Phi_n)_{n\in\{1,\dots,N\}}$ est un arbitrage si, étant donnée une richesse initiale nulle,
(1) $\mathbb{P}(W_N \geq 0) = 1$,
(2) $\mathbb{P}(W_N > 0) > 0$.

Avec cette définition, il est facile de prouver que

Proposition 1.7. *S'il existe une probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$ sous laquelle la condition (1) est réalisée, alors il y a absence d'opportunité d'arbitrage.*

Preuve. Il suffit de remarquer que, sous les conditions de définition d'un arbitrage, $\mathbb{E}^*(W_N) = 0$. De fait, $\mathbb{P}(W_N \geq 0) = 1$ implique $\mathbb{P}^*(W_N \geq 0) = 1$ et donc $\mathbb{P}^*(W_N = 0) = 1$ puis $\mathbb{P}(W_N = 0) = 1$. □

1.5. Cas binomial. Dans le cas binomial, il est possible de démontrer qu'il existe une et une seule probabilité risque-neutre si et seulement si $d < 1 + r < u$. Voir les exercices.

2. Evaluation de contrats

2.1. Contrat avec paiement terminal. Nous considérons un contrat de prix p initial garantissant le versement d'un paiement $f(S_N)$ à l'instant où N est une fonction de flux de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

Nous posons :

Définition 2.1. Le flux f est réplicable s'il existe une richesse initiale w et une stratégie

$$(\Phi_n)_{n\in\{0,\dots,N-1\}}$$

telle que la richesse associée vérifie (p.s.)

$$W_N = f(S_N).$$

La quantité W_0 apparaît comme un candidat pour la valeur de p. En réalité, sous l'existence d'une probabilité risque-neutre, on a une formule explicite :

Proposition 2.2. *Supposons qu'il existe une probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$ sous laquelle la condition (1) est réalisée. Supposons par ailleurs que le flux f est réplicable. Alors, nécessairement,*

$$p = (1 + r)^{-N}\mathbb{E}^*\big[f(S_N)\big].$$

La notion de réplicabilité conduit à la définition suivante :

Définition 2.3. On dit qu'un marché sans opportunité d'arbitrage est complet si, pour tout flux f, il existe une stratégie de réplication.

Nous faisons maintenant le lien avec les chapitres précédents :

Proposition 2.4. *En supposant qu'il existe une probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$, le marché est complet si la fonction valeur du problème de contrôle (avec l'investissement dans l'actif risqué comme variable d'action)*

$$\mathbb{E}^*\big[|W_N - f(S_N)|^2\big],$$

admet, pour chaque valeur de s (cours de l'actif risqué à l'instant 0), un point d'annulation en la variable w.

Démonstration. La preuve est directe et découle de l'équivalence des deux mesures $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^*$. L'espérance ci-dessus est nulle si et seulement si la même espérance, mais sous la probabilité $\mathbb{P}$ est nulle. Il suffit alors de rappeler qu'une v.a. aléatoire positive est d'espérance nulle si et seulement si elle est nulle presque surement. $\square$

Ici, il faut noter que le problème de contrôle n'est pas du type de celui étudié dans le chapitre 3 parce que les espaces d'états et d'actions sont non-dénombrables. En effet, l'espace d'états est $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$: la première coordonnée décrit le cours de l'actif risqué et la deuxième coordonnée décrit la valeur de la richesse. Par ailleurs, l'espace d'actions est également $\mathbb{R}$: cela correspond à la stratégie d'investissement dans l'actif risqué.

Néanmoins, nous allons faire comme si l'équation de Bellman demeurait vraie dans ce cas. L'objectif est donc de formuler ce que devrait être l'équation de Bellman dans ce cas. Pour cela, nous savons que nous devons commencer par étudier la dernière période. Le cas échéant, nous sommes donc ramener à étudier

$$\mathbb{E}^*\big[|W_N^{N-1,s,w,\phi} - f(S_N^{N-1,s})|^2\big],$$

où $s \geq 0$ est compris comme le cours de l'actif risqué à l'instant $N-1$, $w \in \mathbb{R}$ est compris comme la richesse à l'instant $N-1$ et $\phi \in \mathbb{R}$ est compris comme l'investissement dans l'actif risqué. Rappelons la règle : nous nous plaçons à l'instant $N-1$ et les trois quantités s, w et ϕ sont donc supposées connues (déterministes).

La quantité ci-dessus s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\big[|W_N^{N-1,s,w,\phi} - f(S_N^{N-1,s})|^2\big] &= \mathbb{E}^*\big[|(1+r)w + \phi s[\xi_N - (1+r)] - f(s\xi_N)|^2\big] \\ &= (1+r)^2 w^2 + 2(1+r)w\mathbb{E}^*\big[\phi s\big(\xi_N - (1+r)\big) - f(s\xi_N)\big] \\ &\quad + \mathbb{E}^*\big[\big|\phi s[\xi_N - (1+r)] - f(s\xi_N)\big|^2\big],\end{aligned}$$

et en utilisant les propriétés de la probabilité risque neutre, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^*\big[|W_N^{N-1,s,w,\phi} - f(S_N^{N-1,s})|^2\big] &= (1+r)^2 w^2 - 2(1+r)w\mathbb{E}^*\big[f(s\xi_N)\big] \\ &\quad + \mathbb{E}^*\big[\big|\phi s\big[\xi_N - (1+r)\big] - f(s\xi_N)\big|^2\big].\end{aligned}$$

Et donc, en posant

$$f_{N-1}(s) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^*[f(s\xi_N)],$$

puis

$$g_{N-1}(s) = \inf_{\phi} \mathbb{E}^*\big[\big|\phi s[\xi_N - (1+r)] - f(s\xi_N)\big|^2\big] - \mathbb{E}^*\big[f(s\xi_N)\big]^2,$$

nous obtenons que

$$\begin{aligned}\inf_{\phi\in\mathbb{R}} \mathbb{E}^*\big[|W_N^{N-1,s,w,\phi} - f(S_N^{N-1,s})|^2\big] &= (1+r)^2\big|w - f_{N-1}(s)\big|^2 \\ &\quad + \inf_{\phi\in\mathbb{R}} \mathbb{V}^*\big[|\phi s[\xi_N - (1+r)] - f(s\xi_N)|^2\big].\end{aligned}$$

Par itération, nous obtenons (en admettant que le principe de programmation dynamique s'étende à ce cas) :

Proposition 2.5. *Pour un capital initial $w \in \mathbb{R}$ à un instant $n \in \{0, \cdots, N-1\}$, la quantité*

$$V_n(s,w) := \inf_{\phi\in\mathbb{R}} \mathbb{E}^*\big[|W_N^{n,s,w,\phi} - f(S_N^{n,s})|^2\big]$$

peut être calculée par récurrence descendante sous la forme :

$$V_n(s,w) = (1+r)^{2(N-n)}\big|w - f_n(s)\big|^2 + g_n(s),$$

où

$$f_n(s) := \frac{1}{1+r}\mathbb{E}^*[f_{n+1}(s\xi_{n+1})],$$

et
$$g_n(s) := \inf_{\phi \in \mathbb{R}} \mathbb{V}^*\big[\phi s[\xi_N - (1+r)] - f(s\xi_{n+1})\big] + g_{n+1}(s).$$

Nous en déduisons le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.6. *Si le marché est complet, alors, pour la richesse initiale de réplication et le long de la stratégie de réplication, on a nécessairement*
$$W_n = f_n(S_n),$$
et
$$\mathbb{V}^*\big[\phi s[\xi_N - (1+r)] - f(s\xi_{n+1})\big] = 0$$
en $s = S_n$ *et* $\phi = \phi_n$*, à chaque instant* $n \in \{0, \cdots, N-1\}$.

Ce corollaire donne un moyen d'accéder à la stratégie de réplication et à la richesse initiale nécessaire. La quantité $f_0(S_0)$ est donc le juste prix du produit financier. On donne une autre écriture dans les exercices.

DÉMONSTRATION. La preuve du corollaire découle de la programmation dynamique :
$$V_n(s,w) = \inf_{\phi \in \mathbb{R}} V_{n+1}(S_{n+1}^{n+1,s}, W_{n+1}^{n,s,w}).$$
Si le membre de gauche vaut 0, alors celui de de droite également. On remonte ainsi de proche en proche. □

2.2. Arrêt optimal. Nous considérons maintenant le cas d'un produit financier autorisant le détenteur du contrat à retirer $f(S_n)$ à n'importe quel moment $n \in \{0, \cdots, N\}$. Il s'agit maintenant d'un vrai problème de contrôle : le porteur décide ou non de retirer le fruit du contrat à instant donné.

DÉFINITION 2.7. Une stratégie de jeu (sous la forme "je reste" ou "je pars") est définie comme une suite de variables aléatoires $(\chi_n)_{n,=0,\cdots,N}$ décroissante, à valeurs dans $\{0,1\}$ et $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\cdots,N}$-adaptée, telle que $\chi_N = 0$.

PROPOSITION 2.8. *Etant donnée une stratégie de jeu comme ci-dessus, on définit*
$$\tau := \inf\{n \in \{0, \cdots, N\} : \chi_n = 0\} = \sum_{n=0}^{N-1} \chi_n.$$
Alors τ *est un temps d'arrêt (relativement à la filtration* $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\cdots,N}$*).*

Réciproquement, étant donné un temps d'arrêt τ*, à valeurs dans* $\{0, \cdots, N\}$*, la suite*
$$\chi_n = \mathbf{1}_{\{\tau > n\}}, \quad n \in \{0, \cdots, N\},$$
forme une stratégie de jeu au sens ci-dessus.

Ce que dit le paragraphe précédent, c'est que le juste prix, en marché complet, lorsque l'échéance du contrat est fixé à N est donné par $f_0(S_0)$. L'exercice 3.4 ci-dessous donne une interprétation de cette quantité sous la forme :
$$f_0(S_0) = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*[f(S_N)].$$
Dans le cas, où l'agent peut décider de quitter le jeu à un instant de son choix, le juste prix devient
$$\sup_\tau \mathbb{E}^*\Big[(1+r)^{-\tau} f(S_\tau)\Big],$$
soit encore
$$\sup_{\xi_1,\cdots,\xi_N} \mathbb{E}^*\Big[(1+r)^{-\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k} f\Big(S_{\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k}\Big)\Big],$$
Examinons ce que devient la programmation dynamique dans ce cas. La variable d'état, à l'instant n, est le couple $(S_{\sum_{k=0}^{n}\chi_k}, \sum_{k=0}^{n}\chi_k)$. Nous commençons par la dernière période. Nous nous donnons un candidat (s,ζ) pour être la réalisation de $(S_{\sum_{k=0}^{N-1}\chi_k}, \sum_{k=0}^{N-1}\chi_k)$.

Si $\zeta < N-1$, alors nécessairement, nous sommes déjà sortis du jeu et nous n'avons qu'une possibilité : choisir $\chi_N = 0$. Et, donc nous posons comme fonction valeur correspondante

$$v_{N-1}(s,\zeta) = (1+r)^{-\zeta} f(s)$$

Si $\zeta = N-1$, alors nous pouvons choisir de sortir ou de rester. De fait,

$$\begin{aligned} v_{N-1}(s, N-1) &= \max\Big(\mathbb{E}^*\Big[(1+r)^{-N} f(S_N)\Big], (1+r)^{-(N-1)} f(s)\Big) \\ &= \max\Big(\mathbb{E}^*\Big[v_N(S_N^{N-1,s}, N)\Big], (1+r)^{-(N-1)} f(s)\Big). \end{aligned}$$

Par récurrence décroissante, nous. obtenons donc

$$v_n(s,n) = \max\Big(\mathbb{E}^*\Big[v_{n+1}(S_{n+1}^{n,s}, n+1)\Big], (1+r)^{-n} f(s)\Big).$$

On décide donc de "sortir" au premier instant n où le max ci-dessus est donné par le deuxième argument.

3. Exercices

Exercice 1. Donner, dans le modèle binomial, la loi de S_N. Représenter par ailleurs l'évolution de l'actif à l'aide d'un arbre. Justifier ainsi le mot 'binomial'.

Exercice 2. On se place dans le cas binomial et on suppose que

$$\Omega = \{d,u\}^N,$$

que l'on munit de la tribu des parties.

Les variables $\xi_1, \dots, \xi_N$ sont données par les applications coordonnées :

$$\xi_n : (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \{d,u\}^N \mapsto \omega_n.$$

Montrer qu'il existe une unique probabilité risque neutre si $d < 1+r < u$.

Exercice 3. On appelle contrat d'achat européen le contrat obtenu en choisissant $f(x) = (x-K)_+$. Interpréter la valeur de K et la forme de f. Même chose lorsque $f(x) = (K-x)_+$. En appelant C et P les prix de chacun des deux produits, montrer la relation de parité :

$$C - P = S_0 - (1+r)^{-N} K.$$

Exercice 4. Montrer, avec les notations de la Section 2.1, que $f_0(S_0) = (1+r)^{-N}\mathbb{E}^*[f(S_N)]$.