COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

Exercice. On considère un couple de variables aléatoires continues (X, Y) dont la densité jointe est donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} k(\frac{1}{x^2} + y^2) & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(***a***) Pour quelle(s) valeurs de k la fonction f est-elle bien une densité ?
(***b***) Calculer les densités marginales de X et de Y.
(***c***) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
(***d***) Déterminer la densité marginale de X sachant que $Y = 0$.
(***e***) Calculer la covariance de X et Y.

Corrigé de l'exercice.

(***a***) Il faut que $f \geq 0$ et $\iint_{\mathbb{R}^2} f = 1$. La première condition donne $k \geq 0$. Calculons l'intégrale double pour voir quand elle vaut 1 :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} k\left(\frac{1}{x^2}+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} \frac{k}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} ky^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= k\left(\int_{x=1}^{x=5}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{y=-1}^{y=1}\mathrm{d}y\right) + k\left(\int_{x=1}^{x=5}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{y=-1}^{y=1} y^2\,\mathrm{d}y\right) \\
&= k\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=5}\left[y\right]_{y=-1}^{y=1} + k\left[x\right]_{x=1}^{x=5}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1} \\
&= k\left(-\frac{1}{5}+1\right)(1-(-1)) + k(5-1)\left(\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{8}{5}k + \frac{8}{3}k \\
&= \frac{64}{15}k.
\end{aligned}
$$

L'intégrale vaut donc 1 si et seulement si $k = \frac{15}{64}$.

(b) La densité marginale de X est donnée par

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 5, \\ \int_{y=-1}^{y=+1} \frac{15}{64}(\frac{1}{x^2} + y^2)\,\mathrm{d}y & \text{si } 1 \le x \le 5. \end{cases}$$

Calculons l'intégrale :

$$
\begin{aligned}
\int_{y=-1}^{y=+1} \frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right)\mathrm{d}y &= \frac{15}{64}\int_{y=-1}^{y=+1}\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{15}{64}\left[\frac{1}{x^2}y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=+1} \\
&= \frac{15}{64}\left(\frac{2}{x^2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{15}{32}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\right).
\end{aligned}
$$

On a donc :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{15}{32}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\right) & \text{si } 1 \le x \le 5, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La densité marginale de Y es donnée par

$$f_Y(y) = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \text{ ou } y > -1, \\ \int_{x=1}^{x=5} \frac{15}{64}(\frac{1}{x^2} + y^2)\,\mathrm{d}y & \text{si } -1 \le y \le 1. \end{cases}$$

Calculons l'intégrale :

$$
\begin{aligned}
\int_{x=1}^{x=5} \frac{15}{64}(\frac{1}{x^2} + y^2)\,\mathrm{d}y &= \frac{15}{64}\int_{x=1}^{x=5}\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{15}{64}\left[-\frac{1}{x} + xy^2\right]_{x=1}^{x=5} \\
&= \frac{15}{64}\left(-\frac{1}{5} + 5y^2 + 1 - y^2\right) = \frac{15}{64}\left(4y^2 + \frac{4}{5}\right) = \frac{15}{16}\left(y^2 + \frac{1}{5}\right).
\end{aligned}
$$

On a donc :

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{15}{16}\left(y^2 + \frac{1}{5}\right) & \text{si } -1 \le y \le 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier (on en aura besoin plus loin), on a $f_Y(0) = \frac{3}{16}$.

(c) Puisque la densité jointe $f(x,y)$ n'est pas de la forme $g(x)h(y)$, les variables ne sont pas indépendantes.

(d) La densité conditionnelle est donnée par

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y=0}(x) &= \frac{f(x,0)}{\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x,0)\,\mathrm{d}x} = \frac{f(x,0)}{f_Y(0)} = \frac{f(x,0)}{\frac{3}{16}} = \begin{cases} \frac{\frac{15}{64}\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{16}} & \text{si } 1 \le x \le 5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{5}{4}\frac{1}{x^2} & \text{si } 1 \le x \le 5 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(*e*) La covariance est donnée par $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ avec :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{15}{32}\int_1^5 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x = \frac{15}{32}\left[\ln|x| + \frac{1}{6}x^2\right]_1^5 \\
&= \frac{15}{32}\left(\ln 5 + \frac{25}{6} - \ln 1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{15}{32}(\ln 5 + 4) \\
\mathbb{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{15}{16}\int_{-1}^1 \left(y^3 + \frac{1}{5}y\right)\mathrm{d}x = \frac{15}{32}\left[\frac{y^4}{4} + \frac{1}{10}y^2\right]_{-1}^1 = 0. \\
\mathbb{E}(XY) &= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} xy f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} xy\frac{15}{64}\left(\frac{1}{x^2} + y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{15}{64}\int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{15}{64}\int_{x=1}^{x=5}\int_{y=-1}^{y=1} xy^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{15}{64}\left(\int_{x=1}^{x=5}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\left(\int_{y=-1}^{y=1} y\,\mathrm{d}y\right) + \frac{15}{64}\left(\int_{x=1}^{x=5} x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{y=-1}^{y=1} y^3\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{15}{64}\left[\ln|x|\right]_{x=1}^{x=5}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=1} + \frac{15}{64}\left[x^2\right]_{x=1}^{x=5}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=-1}^{y=1} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(Les crochets du type $[y^2]_{y=-1}^{y=1}$ ou $[y^4]_{y=-1}^{y=1}$ sont nuls.) On a donc

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0.$$

Les variables X et Y, bien que non indépendantes, ont donc une covariance nulle.