Feuille de TD 5 : Intégration

Les exercices marqués d'une ★ sont censés être plus compliqués. L'ensemble des autres exercices serons supposés avoir été fait en TD.

1 Théorie de l'intégration

1.1 Cas abstraits

★ **Exercice 1** (Continuité)**.** Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit f une fonction intégrable. Démontrer la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall A \in \mathcal{B},\ \mu(A) < \delta \implies \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Corrigé 1. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $A_\delta \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A_\delta) < \delta$ et $\int_{A_\delta} |f| \mathrm{d}\mu \geq \varepsilon$.

Considérons la suite de fonctions $f_n := |f| \mathbb{1}_{A_{1/n^2}}$. Montrons que, pour presque tout $x \in X$, on a $f_n(x) \longrightarrow 0$. Notons $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_{1/k^2}$, de sorte que $f_n \leq |f| \mathbb{1}_{B_n}$. On a $\mu(B_n) \leq \sum_{k \geq n} \mu(A_{1/k^2}) \leq \sum_{k \geq n} \frac{1}{k^2}$, de sorte que $\mu(B_n) \longrightarrow 0$. B_n étant une suite décroissante d'ensembles, on en déduit qu'on doit avoir $\mathbb{1}_{B_n}(x) \longrightarrow 0$ pour presque tout x, et donc que $f_n(x) \longrightarrow 0$ pour presque tout x.

D'autre part, on a $|f_n| \leq |f|$, qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée nous affirme alors que $\int f_n \mathrm{d}\mu \longrightarrow 0$. Mais ceci est absurde, car, par hypothèse, on a pour tout n que $\int f_n \mathrm{d}\mu > \varepsilon$.

Exercice 2 (Une CNS d'intégrabilité)**.** Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$A_n = \{x \in E;\ |f(x)| \geq n\} \qquad B_n = \{x \in E;\ n \leq |f(x)| < n + 1\}.$$

Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est intégrable ;
2. la série $\sum_{n \geq 0} n\mu(B_n)$ est convergente ;
3. la série $\sum_{n \geq 0} \mu(A_n)$ est convergente.

Corrigé 2. On a $\sum_{n \in \mathbb{N}} n \mathbb{1}_{B_n} \leq |f| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) \mathbb{1}_{B_n}$. Par conséquent, f est intégrable si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} n \mathbb{1}_{B_n}$ est intégrable. Son intégrale valant $\sum_{n \in \mathbb{N}} n\mu(B_n)$, on en déduit que 1. est équivalent à 2.

On a $B_n = A_n \backslash A_{n+1}$, donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} n\mu(B_n) &= \sum_{n=0}^{N} n\mu(A_n) - \sum_{n=0}^{N} n\mu(A_{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{N} n\mu(A_n) - \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)\mu(A_n) \qquad (1) \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \mu(A_n) - N\mu(A_{N+1}). \end{aligned}$$

On a donc $\sum_{n=1}^{N} n\mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{N-1} \mu(A_n)$, donc 3. $\implies$ 2.

Supposons 2. On a vu qu'alors, f était intégrable, donc, par l'inégalité de Markov (voir l'exercice 14), on a $\mu(A_n) \leq \frac{1}{n}\int |f|\mathrm{d}\mu$. En particulier, $N\mu(A_{N+1})$ est bornée. on déduit alors de (2) que $\sum \mu(A_n)$ converge.

★ **Exercice 3** (Majoration d'intégrales qui passe à la limite)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq M$ pour tout $n \geq 0$. Démontrer que $\int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq M$.

Corrigé 3. f_n convergeant simplement vers f, on a $\liminf_n f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in E$. Par le théorème de Fatou, on a donc

$$\begin{aligned}\int_E f\mathrm{d}\mu = \int_E (\liminf_n f_n)\mathrm{d}\mu &\leq \liminf_n \int_E f_n\mathrm{d}\mu \\ &= \sup_n \inf_{k\geq n} \int_E f_k\mathrm{d}\mu \\ &\leq M.\end{aligned}$$

Exercice 4 (Convergence monotone décroissante)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables positives convergeant presque sûrement vers f. On suppose que $\int_E f_0 \,\mathrm{d}\mu$ est finie. Démontrer que $\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_E f \,\mathrm{d}\mu$. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose pas $\int_E f_0 \,\mathrm{d}\mu < +\infty$?

Corrigé 4. Notons $g_n := f_0 - f_n$. g_n est alors une suite croissante de fonctions positives convergeant simplement vers $f_0 - f$. On peut donc lui appliquer le théorème de convergence monotone, pour déduire que

$$\begin{aligned}\int_E f_0\mathrm{d}\mu - \int_E f\mathrm{d}\mu &= \int_E (f_0 - f)\mathrm{d}\mu \\ &= \lim_n \int_E g_n\mathrm{d}\mu \\ &= \int_E f_0\mathrm{d}\mu - \lim_n \int_E f_n\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

En soustrayant $\int_E f_0\mathrm{d}\mu$ à cette égalité, on en déduit le résultat.

Attention, le résultat est faux si $\int_E f_0\mathrm{d}\mu = +\infty$. Par exemple, prenons $E = \mathbb{N}$ muni de la tribu discrète et de la mesure de comptage. Prenons $f_n(k) = 1$ si $k \geq n$, 0 sinon. Alors f_n est décroissante, converge simplement vers la fonction nulle, mais chaque f_n est d'intégrale infinie.

★ **Exercice 5** (Lemme de Scheffé)**.** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ et f une fonction intégrable. On suppose que

- La suite (f_n) converge simplement vers f.
- $\int |f_n| \,\mathrm{d}\lambda \to_{n\to\infty} \int |f| \,\mathrm{d}\lambda$.

1. En supposant que les f_n sont positives montrer que $\int |f_n - f| \,\mathrm{d}\lambda \to 0$.
2. Soit $A_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) < 0 < f(x)\} \cap \{x \in \mathbb{R} : f(x) < 0 < f_n(x)\}$ et $B_n = \{x \in \mathbb{R} : |f_n(x)| < |f(x)|\}$. En utilisant ces deux ensembles montrer que $\int |f_n - f| \,\mathrm{d}\lambda \to 0$ dans le cas général.

Corrigé 5. 1. Les f_n étant positives, f est également positive. On a

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} (f - f_n)\mathbb{1}_{f \geq f_n} \mathrm{d}\lambda - \int_{\mathbb{R}} (f - f_n)\mathbb{1}_{f < f_n} \mathrm{d}\lambda.$$

Mais $|(f - f_n)\mathbb{1}_{f\geq f_n}| \leq f$, qui est une fonction intégrable. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir que $\int_{\mathbb{R}}(f - f_n)\mathbb{1}_{f\geq f_n} \mathrm{d}\lambda \longrightarrow 0$. D'autre part, on a

$$\int_{\mathbb{R}} (f - f_n)\mathbb{1}_{f\geq f_n} \mathrm{d}\lambda + \int_{\mathbb{R}} (f - f_n)\mathbb{1}_{f<f_n} \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} (f - f_n)\mathrm{d}\lambda \longrightarrow 0,$$

par hypothèse, donc on a aussi $\int_{\mathbb{R}}(f - f_n)\mathbb{1}_{f<f_n} \mathrm{d}\lambda \longrightarrow 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $f_n(x)$ convergeant vers $f(x)$, on a $f(x)\mathbb{1}_{A_n}(x) \longrightarrow 0$. Comme $|f\mathbb{1}_{A_n}| \leq |f|$, qui est intégrable, on a par le théorème de convergence dominée que

$$\int_{A_n} f(x)\mathrm{d}x \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Remarquons ensuite que, si $x \notin A_n$, alors $f(x)$ et $f_n(x)$ ont le même signe, donc $|f_n - f| = \big||f_n| - |f|\big|$. En particulier, si $x \in A_n^c \cap B_n$, alors $|f_n - f| = |f| - |f_n| \leq |f|$, tandis que si $x \in A_n^c \cap (B_n^c)$, alors $|f_n - f| = |f_n| - |f|$.

On a donc, en appliquant le théorème de convergence dominée, que

$$\int_{A_n^c \cap B_n} |f_n - f| \mathrm{d}\mu \longrightarrow 0. \tag{3}$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}} \big(|f| - |f_n|\big)\mathrm{d}\lambda = \int_{A_n^c\cap B_n} |f_n - f| - \int_{A_n^c\cap B_n^c} |f_n - f|\mathrm{d}\lambda + \int_{A_n} |f|\mathrm{d}\lambda - \int_{A_n} |f_n|\mathrm{d}\lambda$$

Par hypothèse, le terme de gauche tend vers zéro. Par (2) et (3), les termes positifs du membre de droite tendent vers zéro. On en déduit que

$$\int_{A_n^c\cap B_n^c} |f_n - f|\mathrm{d}\lambda + \int_{A_n} |f_n|\mathrm{d}\lambda \longrightarrow 0.$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}} |f - f_n|\mathrm{d}\lambda = \int_{A_n^c\cap B_n} |f_n - f| + \int_{A_n^c\cap B_n^c} |f_n - f|\mathrm{d}\lambda + \int_{A_n} |f|\mathrm{d}\lambda + \int_{A_n} |f_n|\mathrm{d}\lambda,$$

on en déduit le résultat.

Exercice 6 (Convergence des normes)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge presque partout vers f.

1. On suppose que $\lim_n \int_E |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Prouver que $\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int f d\mu$ et $\int_E |f_n| \,\mathrm{d}\mu \to \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu$.
2. Montrer que l'hypothèse $\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_E f \,\mathrm{d}\mu$ n'entraine pas que $\int_E |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0$.

Corrigé 6. 1. On a

$$\Big|\int_E f_n \mathrm{d}\mu - \int_E f \mathrm{d}\mu\Big| \leq \int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu,$$

donc $\int_E f_n \mathrm{d}\mu \longrightarrow \int_E f \mathrm{d}\mu$. D'autre part, par l'inégalité triangulaire, $\big||f_n| - |f|\big| \leq |f_n - f|$, donc

$$\begin{aligned}\Big|\int_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu - \int_E |f|\,\mathrm{d}\mu\Big| &= \Big|\int_E \big(|f_n| - |f|\big)\,\mathrm{d}\mu\Big| \\ &\leq \int_E \big||f_n| - |f|\big|\,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_E |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

On en déduit que $\int_E |f_n| d\mu \to \int_E |f| d\mu$.

2. Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]} - \mathbb{1}_{[n+1,n+2]}$. La suite f_n converge simplement vers zéro, et $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) \mathrm{d}x = 0$ pour tout n. Pourtant, $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \mathrm{d}x = 2$ pour tout n.

1.2 Calculs concrets

Exercice 7. Montrer que

1. $$0 \leq \frac{1}{e^1} \int_0^{e^1} (\cos(x))^2 \,\mathrm{d}x \leq 1.$$

2. $$0 \leq \int_0^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}.$$

3. $$0 \leq \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\big(\log(1+u)\big) \,\mathrm{d}u \leq \frac{1}{2}.$$

Corrigé 7. 1. On a, pour tout $x \in [0, e^1]$ que $0 \leq (\cos(x))^2$, donc $0 \leq \int_0^{e^1} (\cos(x))^2 \,\mathrm{d}x \leq e^1$, d'où le résultat découle.

2. On a, pour tout $x \in [0,2]$ que $0 \leq \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, donc

$$\int_0^2 0 \,\mathrm{d}x \leq \int_0^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}x \leq \int_0^2 2 \,\mathrm{d}x,$$

d'où le résultat découle.

3. On a, pour tout $u \geq 0$, $0 \leq \log(1+u)$. D'autre part, par concavité du logarithme, on a $\log(1+u) \leq u$. En particulier, pour tout $u \in [\pi/3, \pi/2]$, on a $0 \leq \log(1+u) \leq \pi/2$. La fonction sinus étant croissante sur $[0, \pi/2]$, on a donc

$$\begin{aligned}0 \leq \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin\big(\log(1+u)\big) \,\mathrm{d}u &\leq \int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin(u) \,\mathrm{d}u \\ &= \cos(\pi/3) - \cos(\pi/2) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 8 (Intégration par rapport à la mesure de comptage)**.** On rappelle que la mesure de comptage est définie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$ si A est fini, et $\mu(A) = +\infty$ sinon.

1. Soit $f \geq 0$. Justifier que $\int_{\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n \geq 0} f(n)$.
2. Soit $(u_{n,p})_{n,p \geq 0}$ une suite de réels positifs. Démontrer que
$$\sum_{n \geq 0} \sum_{p \geq 0} u_{n,p} = \sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} u_{n,p}.$$
3. En déduire la valeur de $\sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

Corrigé 8. 1. On peut écrire $f(k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) \mathbb{1}_{k=n}$. Chaque fonction $f(n)\mathbb{1}_{k=n}$ est une fonction étagée, ne prenant que deux valeurs. Son intégrale par rapport à μ est $f(n)$. La suite $f_N(k) = \sum_{n \leq N} f(n)\mathbb{1}_{k=n}$ est une suite croissante de fonction étagées convergeant simplement vers f, et $\int_{\mathbb{N}} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=0}^{N} f(n)$. En prenant la limite $N \to \infty$, on en déduit le résultat.

2. On a vu en cours que, si f_n est une suite de fonctions positives, on a $\int \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \mathrm{d}\mu$. En appliquant ce résultat et la question précédente à la suite de fonctions $f_n(p) = u_{n,p}$ sur $\mathbb{N}$, on en déduit le résultat.

3. On a
$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1/n^2}{1-n} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Exercice 9. Énoncer le théorème de convergence dominé pour $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage.

Corrigé 9. Soit u_n une suite telle que $\sum |u_n|$ est convergente, et soient $(v_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ des suites telles que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $|v_{n,k}| \leq u_n$. Supposons que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $v_{n,k}$ converge vers une limite v_n quand $k \longrightarrow \infty$. On a alors
$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} v_{n,k} = \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n.$$

Exercice 10 (Mesure à densité - 1)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $h : E \to [0, +\infty]$ mesurable. On définit ν sur $\mathcal{A}$ par $\nu(A) = \int_A h \, \mathrm{d}\mu = \int_E \mathbf{1}_A h \, \mathrm{d}\mu$.

1. Vérifier que ν est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

   La fonction f est appelée *densité* de la mesure ν par rapport à la mesure μ.
2. Démontrer que si $A \in \mathcal{A}$ vérifie $\mu(A) = 0$, alors $\nu(A) = 0$.

3. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Démontrer que f est ν-intégrable si et seulement si fh est μ-intégrable et que, dans ce cas, on a

$$\int_E f \, \mathrm{d}\nu = \int_E fh \, \mathrm{d}\mu.$$

Corrigé 10. 1. On a $\mathbb{1}_\emptyset = 0$, donc $\nu(\emptyset) = 0$. Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des ensembles deux à deux disjoints dans $\mathcal{A}$. On a $\mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}$, donc

$$\nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E \mathbb{1}_{A_n} h \mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).$$

ν est donc bien une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

2. Supposons que $A \in \mathcal{A}$ vérifie $\nu(A) = 0$. La fonction $h\mathbb{1}_A$ est alors nulle presque partout. En particulier, pour toute fonction étagée f telle que $0 \leq f \leq h\mathbb{1}_A$, on a $\int_E f \mathrm{d}\mu = 0$. On en déduit que $\int h\mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu = 0$, et donc que $\nu(A) = 0$.

3. Soit f_n une suite croissante de fonctions étagées qui converge simplement vers f. Par définition de la mesure ν, on a

$$\int_E f_n \mathrm{d}\nu = \int_E f_n h \mathrm{d}\mu.$$

Le membre de gauche converge si et seulement si f est ν-intégrable, tandis que le membre de droite converge si et seulement si hf est $-\mu$ intégrable (cela découle du théorème de convergence monotone). En passant à la limite, on en déduit bien que

$$\int_E f \, \mathrm{d}\nu = \int_E fh \, \mathrm{d}\mu.$$

Exercice 11 (Mesures à densité - 2). 1. Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu([0,1]), \mu([0,2])$, $\mu([0,1/2])$, $\mu(\{1/2\})$.

2. Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\mathbb{1}_{x>0} e^{-x}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu(\mathbb{R}), \mu(\{1\}), \mu([0,1]), \mu([1, +\infty[)$.

3. Soit μ mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité $\mathbb{1}_{x>0} x e^{-x^2/2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Calculer $\mu([0,1])$.

Corrigé 11. 1. On a $\mu([0,1]) = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x = 1$, $\mu([0,2]) = \int_0^2 \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x = 1$, $\mu([0,1]) = \int_0^{1/2} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x = 1/2$, $\mu(\{1/2\}]) = \int_{1/2}^{1/2} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathrm{d}x = 0$.

2. On a

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbb{R}) &= \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = 1 \\
\mu(\{1\}) &= \int_1^1 e^{-x}\mathrm{d}x = 1 \\
\mu([0,1]) &= \int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x = 1 - e^{-1} \\
\mu([1,+\infty[) &= \int_1^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = e^{-1}.
\end{aligned}$$

3. On a

$$\mu([0,1]) = \int_0^1 xe^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \big[-e^{-x^2/2}\big]_0^1 = 1 - e^{-1/2}.$$

★ **Exercice 12.** Soit f une fonction Riemann intégrable sur $[0,1]$. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f dans $[0,1]$.

1. Pour $\varepsilon > 0$ soit

$$A_\varepsilon = \big\{x \in [0,1] : \forall \delta > 0,\ \exists y, z \in]x-\delta, x+\delta[,\ f(y) - f(z) > \varepsilon\big\}.$$

   Montrer que $D = \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap]0,1]} A_\varepsilon$.

2. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Si $A_\varepsilon \cap \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\neq \emptyset$, on choisit $(y_k, z_k) \in \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ tels que $f(y_k) - f(z_k) > \varepsilon$. Sinon, on choisit $y_k = z_k$ de façon quelconque dans $\left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$.

   Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k) - f(z_k) \geq \varepsilon \lambda(A_\varepsilon).$$

3. En déduire que $\lambda(A_\varepsilon) = 0$ et donc que $\lambda(D) = 0$.

Corrigé 12. 1. Soit $x \in \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap]0,1]} A_\varepsilon$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $y, z \in]x-\delta, x+\delta[$ tels que $f(y) - f(z) > \varepsilon$. On doit alors avoir $|f(y) - f(x)| > \varepsilon/2$ ou $|f(z) - f(x)| > \varepsilon/2$. On en déduit que f n'est pas continue en x. On a donc $D \subset \bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap]0,1]} A_\varepsilon$.

Réciproquement, soit $x \in D$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe $x' \in]x-\delta, x+\delta[$ tel que $|f(x) - f(x')| > \varepsilon$. Si $f(x) > f(x')$, on prend $y = x$ et $z = x'$; sinon, on prend $y = x'$ et $z = x$, et on voit que $x \in A_\varepsilon$. Quitte à prendre ε plus petit, on peut supposer qu'il est dans $\mathbb{Q} \cap]0,1]$.

2. On a

$$A_\varepsilon \subset \bigcup_{k \in \{0,\dots,n-1\};\, A_\varepsilon \cap \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\neq \emptyset} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[,$$

donc $\lambda(A_\varepsilon) \leq \frac{1}{n}\mathrm{Card}\Big\{k \in \{0,\dots,n-1\}; A_\varepsilon \cap \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\neq \emptyset\Big\}$.

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k) - f(z_k) &= \frac{1}{n}\sum_{k \in \{0,\dots,n-1\};\, A_\varepsilon \cap \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\neq \emptyset} (f(y_k) - f(z_k)) \\ &\geq \varepsilon \frac{1}{n}\mathrm{Card}\Big\{k \in \{0,\dots,n-1\}; A_\varepsilon \cap \left]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[\neq \emptyset\Big\} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{n}\lambda(A_\varepsilon).\end{aligned}$$

3. f étant Riemann-intégrable, on a $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k)$. En prenant la limite $n \to \infty$ dans le résultat obtenu à la question précédente, on déduit donc que $\varepsilon\lambda(A_\varepsilon) = 0$, et donc que $\lambda(A_\varepsilon) = 0$.

D est alors une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle, donc est de mesure nulle.

1.3 Inégalités

★ **Exercice 13** (Inégalité de Jensen)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ convexe et dérivable deux fois (et donc $\phi'' \geq 0$). Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) = 1$. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et telle que $\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) < +\infty$.

1. Montrer que $\forall z, y \in I$, $\phi(y) \geq \phi(z) + \phi'(z)(y - z)$
2. En prenant $z = \int_E f(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ et $y = f(x)$ dans l'inegalité précédente, montrer que :
$$\phi\left(\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \leq \int_E \phi \circ f(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$
3. En déduire que pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$:
$$\left(\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Corrigé 13. 1. Soient $y, z \in I$. On a
$$\begin{aligned}\phi(y) - \phi(z) &= \int_y^z \phi'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_y^z \Big(\phi'(z) + \int_z^t \phi''(s)\mathrm{d}s\Big)\mathrm{d}t \\ &= (z-y)\phi'(z) + \int_y^z \int_z^t \phi''(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Le résultat suit en utilisant le fait que $\phi'' \geq 0$ par hypothèse.

2. On a, par l'inégalité précédente, que
$$\phi \circ f(x) \geq \phi\left(\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) + \phi'\left(\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\Big(f(x) - \int_E f(t)\mathrm{d}\mu(t)\Big).$$
Par croissance de l'intégrale, on peut intégrer cette inégalité sur E par rapport à la mesure μ. On obtient
$$\begin{aligned}\int_E \phi \circ f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) &\geq \phi\left(\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\int_E \mathrm{d}\mu + \phi'\left(\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\Big(\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int_E f(t)\mathrm{d}\mu(t)\int_E \mathrm{d}\mu(x)\Big) \\ &= \phi\left(\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) + \phi'\left(\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\Big(\int_E f(x)\mathrm{d}\mu(x) - \int_E f(t)\mathrm{d}\mu(t)\Big) \\ &= \phi\left(\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right).\end{aligned}$$
car $\mu(E) = 1$.

3. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à $(E, \mu) = ([0,1], \lambda)$, avec $\phi(x) = x^2$, qui est convexe.

Exercice 14 (Inégalité de Markov)**.** Soit f une fonction mesurable positive. Montrer que l'on a, pour tout $a > 0$,
$$\mu\Big(\big\{x \in E; f(x) \geq a\big\}\Big) \leq \frac{1}{a}\int f\,\mathrm{d}\mu$$

Corrigé 14. Soit $a > 0$. On a

$$\int f \mathrm{d}\mu \geq \int f \mathbb{1}_{f \geq a} \mathrm{d}\mu \geq \int a \mathbb{1}_{f \geq a} \mathrm{d}\mu = a\mu\Big(\big\{x \in E; f(x) \geq a\big\}\Big).$$

On en déduit le résultat en divisant par a.

2 Théorèmes limites

2.1 Échauffement

Exercice 15. Soit $f_n(x) = \frac{n}{\ln n} \mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}[}$ pour $x \in [0,1]$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Corrigé 15. On a

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{n}{\ln n} \int_0^1 \mathbb{1}_{]0,\frac{1}{n}[}\mathrm{d}x = \frac{n}{\ln n}\frac{1}{n} = \frac{1}{\ln n} \longrightarrow 0.$$

Exercice 16. Soit $f_n(x) = x^{n-1} - 2x^{2n-1}$. Comparer $\int_0^1 \sum_{n\geq 1} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ à $\sum_{n\geq 1} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Corrigé 16. On a $\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n} = 0$, donc $\sum_{n\geq 1} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0$.

D'autre part, pour tout $x \in]0,1[$, on a $\sum_{n\geq 1} f_n(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2}$, donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\varepsilon} \sum_{n\geq 1} f_n(x) &= \big[-x - \ln(1-x) + \ln(1-x^2)\big]_0^1 \\
&= -1 + \varepsilon - \ln\varepsilon + \ln(1 - 1 + 2\varepsilon - \varepsilon^2) \\
&= -1 + \varepsilon - \ln\varepsilon + \ln(\varepsilon) + \ln(2-\varepsilon) \longrightarrow \ln(2) - 1,
\end{aligned}$$

donc $\int_0^1 \sum_{n\geq 1} f_n(x)\mathrm{d}x$ existe, et vaut $\ln 2 - 1$, ce qui est différent de $\sum_{n\geq 1} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

2.2 Convergence Monotone

Exercice 17. Déterminer les limites, quand elles existent, de $\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

Corrigé 17. On a

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \\
&= \exp\Big(-n\frac{x}{n} + o(1)\Big)\Big) \\
&= e^{-x} + o(1),
\end{aligned}$$

donc pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $\mathbb{1}_{[0,n]}(x)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} \longrightarrow e^{-x/2}$.

On rappelle que, par concavité du logarithme, on a pour tout $y > -1$, que $\ln(1+y) < y$. On a donc

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \leq e^{-x},$$

donc $\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\right| \leq e^{-x/2}$, qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir que

$$\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x/2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

On a de même pour tout $x \in [0,+\infty[$ que $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \longrightarrow e^x$ et $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$, donc $\mathbb{1}[0,n]\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} \longrightarrow e^{-x}$, et $\left|\mathbb{1}_{[0,n]}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\right| \leq e^{-x}$, qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. Par conséquent, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir que

$$\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Exercice 18. On pose : $I(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\mathbb{1}_{x\leq n}$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions. (On pourra notamment étudier : $g_n(x) = (n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$.)

2. En déduire la valeur de $I(\alpha)$ en fonction de α.

Corrigé 18. 1. Notons $g_n(x) = (n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$. On a, pour tout $x \in [0,n[$, que

$$\begin{aligned} g_n(x) &= -\sum_{k\geq 1} \frac{n+1}{k}\left(\frac{x}{n+1}\right)^k + \sum_{k\geq 1} \frac{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}\left(\frac{1}{(n)^{k-1}} - \frac{1}{(n+1)^k}\right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout $x \leq n$, $(n+1)\ln\left(1-\frac{x}{n+1}\right) \geq n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$, et donc, en prenant l'exponentielle, $\left(1-\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$. Par conséquent, (f_n) est une suite croissante de fonctions.

2. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a $f_n(x) \longrightarrow e^{(\alpha-1)x}$. On peut donc appliquer le théorème de convergence monotone pour conclure que

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)x}\mathrm{d}x.$$

Cette quantité vaut $\frac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$, et $+\infty$ sinon.

2.3 Convergence dominée

Exercice 19. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{x^2n^2+1}\,\mathrm{d}x$

2. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\mathrm{d}x$

3. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x$

4. $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

5. $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$.

6. $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \arctan(x/n)e^{-x}\,\mathrm{d}x$

Corrigé 19. 1. On a $\frac{n^2+1}{x^2n^2+1} \longrightarrow \frac{1}{x^2}$ pour tout $x\geq 1$. D'autre part, pour tout $n\geq 1$, on a $\frac{n^2+1}{x^2n^2+1}\leq\frac{2n^2}{x^2n^2}=\frac{2}{x^2}$, qui est une fonction intégrable sur $[1,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, pour déduire que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{n^2+1}{x^2n^2+1}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=1.$$

2. On a, pour tout $x\in]0,1[$ que $\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)$ converge vers zéro quand $n\to\infty$. D'autre part, pour tout $x\in]0,1[$, on a $\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right|\leq\frac{1}{\sqrt{x}}$, qui est intégrable sur $]0,1[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour déduire que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\mathrm{d}x=0$.

3. On a pour tout $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$ que $\left|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right|\leq 1$, qui est intégrable sur $[0,1]$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n&=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)\\&=\exp\left(-n\frac{x}{n}+o(1)\right)\\&=e^{-x}+o(1).\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{-x}\mathrm{d}x=1-e^{-1}.$$

4. Soit $x\in\mathbb{R}$. En effectuant le développement limité du sinus, on obtient que

$$\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}=\frac{1}{1+x^2}+o(1).$$

D'autre part, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$ que $|\sin x|\leq|x|$ (cette propriété s'obtient par concavité du logarithme sur $[0,\pi/2]$, par le fait que $|\sin x|\leq 1$ sur $[\pi/2,+\infty[$, puis par symétrie sur $]-\infty,0]$). On a donc que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}\leq\frac{1}{1+x^2}$, qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\frac{x}{n}\right)\frac{n}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\pi.$$

5. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $|e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}| \leq e^{2-|x|}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pi\mathbb{Z}\}$, on a $\cos^{2n}(x) \longrightarrow 0$, donc $e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|} \longrightarrow e^{1-|x|}$. L'ensemble $\pi\mathbb{Z}$ étant de mesure nulle, on déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1-|x|}\mathrm{d}x = 2e.$$

6. Pour chaque $x \in [0,\infty[$, on a $\arctan(x/n)e^{-x} \longrightarrow 0$. Pour cuaque $n \in \mathbb{N}$, on a $|\arctan(x/n)e^{-x}| \leq \pi e^{-x}$, qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. Par conséquent, on déduit du théorème de convergence dominée que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(x/n)e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 20. Soit μ la mesure de comptage ("Card") sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour toute suite positive $(u_n)_{n\geq 0}$, on a : $\sum_{n\geq 0} u_n = \int_{\mathbb{N}} u_n \mu(\mathrm{d}n)$.

1. Calculer $\lim_{k\to+\infty} \left[\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}\left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right)\right]$.

2. Calculer $\lim_{k\to+\infty} \left[\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n/k)}{2^n}\right]$.

Corrigé 20. 1. On a, pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 0$, $\left|\frac{1}{3^n}\left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right)\right| \leq \frac{1}{3^n}$, qui est le terme général d'une série convergente. D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{3^n}\left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right) = \frac{1}{3^n}$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure que

$$\lim_{k\to+\infty} \left[\sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n}\left(1 - \frac{1}{k(n+1)}\right)\right] = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}.$$

2. On a, pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 0$ que $\left|\frac{\sin(n/k)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$, qui est le terme général d'une série sommable. D'autre part, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{k\to 0} \sin(n/k) = 0$. Par le théorème de convergence dominée, on a donc $\lim_{k\to+\infty} \left[\sum_{n\geq 0} \frac{\sin(n/k)}{2^n}\right] = 0$.

Exercice 21. On considère pour $n \geq 0$ la série $\sum_{k\geq 0} u_{n,k}$ avec $u_{n,k} = \frac{1}{k!}\left(\frac{2n^2+6n+1}{n^2+5n+\pi}\right)^k$.

1. Montrer que cette série est convergente ($\forall n \geq 0$). On notera I_n sa limite.

2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Corrigé 21. 1. La fonction $x \mapsto \frac{2x^2+6x+1}{x^2+5x+\pi}$ est continue sur $[0,+\infty[$, tend vers 2 en $+\infty$, donc est bornée. Il existe donc une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_{n,k}| \leq \frac{C^k}{k!}$. Par croissance comparée, ceci est le terme général d'une série convergente. La série $\sum_{k\geq 0} u_{n,k}$ est donc convergente.

2. On a, pour tout $k \geq 0$ que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{n,k} = \frac{2^k}{k!}$. Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \sum_{k\geq 0} \frac{2^k}{k!} = e^2.$$