MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union-Discipline-Travail

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY

LE VALIDEUR LMD

UFR DE MATHEMATIQUES ET D'INFORMATIQUE

2^EME SEMESTRE

- ✓ Calcul Différentielle et EDO
- ✓ Variables Complexes
- ✓ Arithmétique
- ✓ Géométrie 3
- ✓ Analyse Convexe et Optimisation
- ✓ Techniques de Recherche Documentaire
- ✓ Gestion de Projets et Application
- ✓ Anglais S2
- ✓ Entrepreneuriat
- ✓ Analyse des Données
- ✓ Probabilité Avancées

LICENCE 3

MATHEMATIQUE ET APPLICATION

INTRODUCTION

Je vous souhaite la bienvenue en LICENCE 3 de mathématique. Toutes mes félicitations !!

Rien de ci agréable de se voir admis en Licence 3. Pour ceux qui sont autorisés, ce n'est pas grave. Comme on le dit souvent mieux vaut avoir un peu que de ne rien avoir (mieux vaut être autorisé que de reprendre l'année).

Bref ; la venue en Licence 3 est une chose, une autre est de pouvoir y faire fasse à ce deuxième niveau du premier cycle .Je puis vous dire qu'avec la Licence 3, beaucoup beaucoup... de portes s'ouvre à vous. Pour pouvoir avoir des informations sur le comportement à avoir, sur les opportunités, je vais plus ou moins répondre à quelques questions.

- **Quel est le niveau de difficulté de la Licence 3 ?**

Evidemment le niveau de difficulté augmente par rapport à celui de la Licence 2. Certains ont tendance à dire que plus tu avance plus c'est facile. Je ne pense pas. Seulement je peux dire que pour celui qui a acquit le niveau Licence 2 en toute honnêteté n'a pas à se préoccuper.
A vrai dire les cours sont très volumineux. En effet il y a grand nombre de choses à apprendre pour être, on peut dire comme un étudiant en classe préparatoire.

- **Comment surmonter ces difficultés ?**

En premier lieux, il faut avoir confiance en soi. Ah oui !! Et recommander le reste à DIEU. En deuxième lieux, apprendre ses cours le jour le jour. Sinon hum.... Puis ses travaux dirigés (vraiment important) et voir les anciennes compositions.
Lors des compositions, svp faite bien les exercices que vous choisissez. Même lorsque vous rencontrez un exercice que vous avez déjà traité, faite bien attention à la rédaction. En troisième lieux travailler quelques fois en groupe *très important*. Attention !! Apprendre ses cours avant le travail en groupe ; sinon c'est inutile.

- **Où peut-on aller avec une Licence 3 de mathématique ?**

Bonne question. Bon faut dire que les portes de multiple concours s'ouvrent à vous .A titre d'exemple l'on peut citer :

- Les concours d'entrée à L'INPHB pour le cycle ingénieur dans différentes filières telle :
  HEA (Haute Etude en Assurance), **ILT** (Ingénieur Logistique et Transport).
  STIC (Sciences et Technologies de l'Information et de la Communications : parcours Electronique et Informatique Industrielle (E2I), parcours Informatique (INFO), Télécommunication et Réseaux (TR)]. **STGI** (Sciences et Technologies du Génie Industriel : parcours Electrotechnique et Automatismes Industriels (EAI), parcours Mécanique Industrielle et Productique (MIP), parcours Production et Gestion de l'Energie (PGE), Aéronautique (AERO)) ; **GCBU** (Génie Civil Bâtiment

et Urbanisme) ; **GCHE** (Génie Civil Hydraulique et Environnement) ; **GCIT** (Génie Civil Infrastructure et Transport) ; **GCGT** (Génie Civil Géomètre-Topographe). **STGP** (Sciences et Technologies du Génie des Procédés : parcours Génie des Procédés Industriels (GPI), parcours Génie des Bio-Procédés (GBP)) ; parcours ETDE (Exploitation et Traitement Des Eaux) ; parcours MINES (Mines et Carrières (MICA), parcours Prospection et Exploitation Minière (PEM),parcours Exploitation et Traitement des Minerais (ETM), parcours Environnement Minier (EM)) ; PTRL (Pétrole) .
Visitez le site http://www.inphb.edu.ci le concours est organisé à ABIDJAN et à l'INPHB et les compositions se tiennent à DANGA (Saint jean cocody).

- Le concours de centrale Casablanca. En effet **L'École centrale Casablanca** est une école d'ingénieurs marocaine faisant partie du groupe des Écoles centrales. Elle est située sur le campus universitaire de Bouskoura, en périphérie sud de Casablanca.
  Visitez le site http://www.centralecasablanca.ma le concours est organisé en côte d'ivoire et les compositions se tiennent à l'INPHB. Le responsable est : **Prof EDMOND FEDIDA enseignant à l'UFR math-info de l'UFHB. Pour les lettres de recommandations voir le Prof SOHOU TOUSSAINT.**
- Les concours d'entrée à l'EAMAC, une école d'excellence au service de l'aéronautique civile qui se charge de la formation des personnes appelées à exercer dans les secteurs de la sécurité de la navigation aérienne.
  Visitez le site
  http://eamac.ne/index.php/concours-et-admission/concours-eamac/87-session-2017/97-concours-eamac
  le concours est organisé à ABIDJAN et la formation se fait au Niger.
- Les concours des écoles d'actuariat et de statistique (CEAS)
  Vous pouvez intégrer chacune des écoles (ISFA,EURIA,ISUPMC,FAUIR,CAUPD) par un concours utilisant les épreuves écrites du CEAS. Les épreuves orales des candidats admissibles sont ensuite organisées dans chaque école. Chaque année, dans le mois de mai, **le concours est organisé en côte d'ivoire**. Le responsable est : **Docteur Lassana SAMASSI enseignant à l'UFR math-info de l'UFHB joignable au mail : lassanasamassi@yahoo.fr**
  Visitez le site https://www.ceas.fr/formations
  Visitez le site http://euria.univ-brest.fr
  Visitez le site http://isfa.univ-lyon1.fr
  Visitez le site http://www.isup.upmc.fr
  Visitez le site http://mathinfo.unistra.fr
- Le concours de recrutement d'élève ingénieur des travaux statistique (ITS) de l'ENSEA d'Abidjan. **Visitez le site http://www.ensea.ed.ci/admission.php**
- Le concours d'entré à l'ENS (Ecole Normale Supérieur) d'Abidjan pour y suivre la formation du CAP PC (Certificat d'aptitude Pédagogique Professeur de Collège).
  Visitez le site http://www.ensabidjan.org
- Les concours polytechniques de France .Passer par CAMPUS France.
  Visitez le site https://www.polytechnique.edu/admission-cycle-ingenieur/fr/calendrier-2
- Etc……………………………………………………………………………………………

- **A propos le valideur LMD suffit-il pour valider son année ?**

A vrai dire la possession d'un ***document*** ***σ*** ne garantir pas ton admission en classe supérieur. Ah oui ce n'est pas parce que j'ai **LE VALIDEUR LMD** que je suis d'office admis en année supérieur.
Il faut savoir choisir un document qui vise à couvrir au mieux le programme du niveau dans lequel vous être.
Comme faut le constaté **LE VALIDEUR LMD LICENCE 2** est réservé en premier aux étudiants de l'UFR MI de l'université Félix Houphouët Boigny qui s'y trouvent et aux étudiants de deuxième année suivant une formation de mathématique informatique. Mais par contre pour ceux qui sont curieux et qui veulent voir ce qui se fait peuvent y jetées un coûp d'œil.
Pour terminer ; voir le contenu de plusieurs documents t'apporte un plus. C'est-à-dire la culture des mathématiques (acquisition de quelques réflexes).

Je tiens à féliciter l'équipe **VALIDEUR LMD** pour son efficacité. En outre elle est composée de :

- Bobet Goualo Victorien MI/UFHB
- Koussan Digre Brice MI/UFHB
- Alla Kouadio Jean de Dieu MI/UFHB
- Tiemoko Loua MI/UFHB
- Koné Yacouba MI/UFHB
- Ouattara Tahandiama Lynda Fatim MI/UFHB
- Koukra Essigbe Charlie Christelle MI/UFHB
- Droh Sai Stéphane MI/UFHB
- Sekongo Kadjolohouele Amidou MI/UFHB
- Djahi Naneon Elisée MI/UFHB
- Djrougba Richmond Ange MI/UFHB
- Le Bi Golé Hubert MI/UFHB
- Kouassi N'da Christ MI/UFHB
- Mombleon Landry Delors MI/UFHB
- Badolo Marus MI/UFHB
- Koné Kolotcholo Youssef MI/UFHB
- Zaglah Marcelin PC/UFHB
- Daplé Anos PC/UFHB
- Dadie Zahie augustin Claver MI/SFA/UNA
- Traoré yacou MIAGE /UFHB
- Koudou Moko Christelle Odette MI/UFHB
- Zegbolou Gbizié Marc-Dexter MI/UFHB
- Koné Adama MI/UFHB

SOMMAIRE

Semestre 5

Code UE	Intitulé des Unités d'Enseignement	Code EC	Éléments constitutifs	Masse Horaire Semestrielle CM	TD	TP	HE	TPE	CTT	Coef EC	CECT UE	Modalité d'évaluation % CC	% ET	Fonctionalité
UE Fondamentales														
TOP2115	Topologie			20	24		[illegible]	56	100		[illegible]	40	60	Obligatoire
UE de Spécialité														
MET2115	Mesure et Intégration	MET21151	Mesure	12	12		[illegible]	26	50	2	[illegible]	40	60	Obligatoire
		MET21152	Intégration	15	22		[illegible]	38	75	3		40	60	
TGA2115	Théorie des Groupes et Anneaux			24	24		[illegible]	52	100		[illegible]	40	60	Obligatoire
ANN2115	Analyse Numérique	ANN21151	Analyse Numérique Matricielle	15	15	6	[illegible]	39	75	3	[illegible]	40	60	Optionnelle
		ANN21152	Analyse Numérique des EDO	10	10	5	[illegible]	25	50	2		40	60	
STA2115	Statistique Appliquée	STA21151	Régression linéaire	6	4	2	[illegible]	13	25	1	[illegible]	40	60	Optionnelle
		STA21152	Analyse de variance	12	6	6	[illegible]	26	50	2		40	60	
UE de Méthodologie														
ROP2115	Recherche Opérationnelle 1			12	18	6	[illegible]	39	75		[illegible]	40	60	Obligatoire
TEX2115	Techniques d'Expression			8	16		[illegible]	26	50		[illegible]	40	60	Obligatoire
IBD2115	Initiation Bases De Données			12	6	18	[illegible]	39	75		[illegible]	40	60	Obligatoire
PSP2115	Psycho Pédagogie			12	24		[illegible]	39	75		[illegible]	40	60	Optionnelle
DMA2115	Didactique des Mathématiques			12	12	12	[illegible]	39	75		[illegible]	40	60	Optionnelle
UE de Culture Générale														
ANG2115	Anglais			8	16		[illegible]	26	50		[illegible]	40	60	Obligatoire
HMA2115	Histoire des Mathématiques			18			[illegible]	32	50		[illegible]	40	60	Optionnelle
Total Semestre				196	209	55	460	515	975		30			

Semestre 6

Code UE	Intitulé des Unités d'Enseignement	Code EC	Éléments constitutifs	Masse Horaire Semestrielle CM	TD	TP	HE	TPE	CTT	Coef EC	CECT UE	Modalité d'évaluation % CC	% ET	Fonctionalité
UE de Spécialité														
CDE2116	Calcul Différentiel et EDO	CDE21161	Calcul Différentiel	15	17		[illegible]	36	68	3	[illegible]	40	60	Obligatoire
		CDE21162	EDO	6	9		[illegible]	17	32	1		40	60	
VCP2116	Variables Complexes			18	18		[illegible]	39	75		[illegible]	40	60	Obligatoire
ATH2116	Arithmétique			18	18		[illegible]	39	75		[illegible]	40	60	Optionnelle
GEO2116	Géométrie 3			18	18		[illegible]	39	75		[illegible]	40	60	Optionnelle
ACO2116	Analyse Convexe et Optimisation	ACO21161	Analyse Convexe	12	12		[illegible]	26	50	2	[illegible]	40	60	Optionnelle
		ACO21162	Optimisation	6	6		[illegible]	13	25	1		40	60	
ROP2116	Recherche Opérationnelle 2			14	18	4	[illegible]	39	75		[illegible]	40	60	Optionnelle
PRB2116	Probabilités Avancées			24	24		[illegible]	52	100		[illegible]	40	60	Optionnelle
AND2116	Analyse des Données			16	12	8	[illegible]	39	75		[illegible]	40	60	Optionnelle
UE de Méthodologie														
TRD2116	Techniques de Recherche documentaire			8	8	8	[illegible]	26	50		[illegible]	40	60	Obligatoire
GPA2116	Gestion de Projets et Applications			12		24	[illegible]	39	75		[illegible]	40	60	Obligatoire
UE de Culture Générale														
ANG2116	Anglais			8	16		[illegible]	26	50		[illegible]	40	60	Obligatoire
ENT2116	Entreprenariat			12	12		[illegible]	26	50		[illegible]	100	0	Obligatoire
Total Semestre				187	188	44	419	456	875		30			

CALCUL DIFFERENTIEL-EDO

Université F.H.B Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2013 - 2014

Licence 3: TD Calcul différentiel
Fiche n°1

Exercice 1:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \text{ et } f(0,0) = 0.$$

1°) Montrer que f est de classe C^1.
2°) f est - elle deux fois différentiable? Si oui, calculer sa différentielle seconde.
3°) f est - elle trois fois différentiable? Si oui, calculer sa différentielle troisième.
4°) Calculer

$$\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} \|df(x)\|.$$

Trouver $C > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x,y)| \leq C \|(x,y)\|.$$

Exercice 2:

Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1, et C_0 l'espace vectoriel réel des suites numériques convergeant vers 0, muni de la norme $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \|x\| = \sup\{|x_n| \,/\, n \in \mathbb{N}\}$. On définit F sur C_0 par

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\phi(x_n).$$

Montrer que F est différentiable et calculer la différentielle de F.

Exercice 3:

Soit

$$f \;:\; E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \neq 0\} \to \mathbb{R}^3 \text{ définie par}$$
$$f(x,y,z) = (x+y, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}).$$

1°) Calculer la différentielle de f là où elle est définie.
2°) Soit

$$D := \{(x,y,z) \in E \,/\, x > 0, x+y > 0\}.$$

a) Déterminer $f(D)$.
b) Montrer que f est un difféomorphisme de classe C^∞ de D sur $f(D)$.
c) Donner le développement limité à l'ordre 3 de f en un point de D.

Exercice 4:

Soit F l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_F$, et E l'espace de Banach des applications de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 et 1 muni de la norme:

$$\|y\|_E = \sup_{t\in[0,1]} [|y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|].$$

Soit $\phi : E \to F$ l'application définie par: $\phi(y) = y'' + ayy' + by^2$, où a et b sont des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que ϕ est de classe C^1 sur E et calculer sa différentielle $df(x)$ en un point x de E. $df(x)$ est - elle bijective?

2°) f est - elle deux fois différentiable? Si oui, calculer sa différentielle seconde.

Exercice 5:

Soient α une fonction numérique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et E l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Montrer que l'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(f) = \int_a^b \alpha[f(x)]dx,$$

est différentiable, et calculer sa différentielle.

Exercice 6:

Soient E un espace de Banach, $f : L(E) \times L(E) \to L(E)$ défini par

$$f(A,B) = B - \frac{1}{2}(Id_E - A + B^2)$$

où $L(E)$ est l'espace des applications linéaires continues de E dans E.

1°) Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites qu'il existe U voisinage de Id_E, V voisinage de $0_{L(E)}$ dans $L(E)$, et une application $\phi : U \to V$ tels que

$$\phi(Id_E) = 0_{L(E)} \text{ et } A = (Id_E - \phi(A))^2, \forall A \in U.$$

2°) Montrer que l'application R définie sur U par $R(A) = Id_E - \phi(A)$ est différentiable et calculer sa différentielle au point Id_E.

Exercice 7:

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m < n$, une application de classe C^1, et $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $df(x_0)$ est surjective, et on pose $E := Ker(df(x_0))$ et $F = E^{\perp}$. On identifie $\mathbb{R}^n$ à $E \times F$, et $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$.

Montrer que l'équation

$$f(a,b) = f(x_0)$$

définit localement a comme une fonction u de b sur un voisinage de x_0^2. La fonction u est - elle de classe C^1?

Scanned by CamScanner

Université F.H.B Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2014 - 2015

Licence 3: TD Calcul différentiel

Fiche n°1

Exercice 1:

Soient $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une aplication deux fois différentiable, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$g(x,y) = f(x^2 + y, f(\frac{\cos x}{x+y}, f(3x, y^2, x^3))).$$

1°) Calculer la différentielle g' de g en fonction de celle de f.
2°) Calculer le Jacobien de g en un point (x,y).
3°) Existe - t - il $C > 0$ tel que $\|g'(x,y)\| \leq C, \forall (x,y)$?
4°) Déterminer là où cela est possible la différentielle d'ordre 2 de g.
5°) Posons $g(x,y) = (g^1(x,y), g^2(x,y))$. Donner la matrice Hessienne de g^1.
6°) Application numérique: $f(x,y,z) = xyz$. (x, y, z)
a) Calculer les quantités vues dans les questions précédentes au point $(1,0)$.
b) Calculer le rang de g en (x,y) et en $(1,0)$.

Exercice 2:

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans E. Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère l'application

$$\phi_n : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E) \text{ définie par: } \phi_n(f) = f^n.$$

1°) Montrer que, pour $1 \leq i \leq 3$, φ_i est différentiable et calculer sa différentielle. Indication: Ecrire ϕ_n comme composée d'applications différentiables.

2°) Déduire de 1°) que ϕ_n est différentiable pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer la différentielle de ϕ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3:

Soit F l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_F$, et E l'espace de Banach des applications de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 et 1 muni de la norme:

$$\|y\|_E = \sup_{t\in[0,1]} [|y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|].$$

Soit $\phi : E \to F$ l'application définie par: $\phi(y) = y'' + ayy' + by^2$, où a et b sont des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que ϕ est de classe C^1 sur E et calculer sa différentielle $d\phi(x)$ en un point x de E. $d\phi(x)$ est - elle bijective?

2°) ϕ est - elle deux fois différentiable? Si oui, calculer sa différentielle seconde.

Exercice 4:

Soient X, E, F et G des e.v.n. sur le même corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, et U un ouvert de X. On se donne deux applications deux fois différentiables $\phi : U \to \mathcal{L}(E, F)$ et $\psi : U \to \mathcal{L}(F, G)$. On pose: $\forall u \in U, f(u) = \psi(u) \circ \phi(u)$.

Montrer que f est deux fois différentiable et calculer ses différentielles première et seconde.

Exercice 5:

Soient $I = [0, 1]$ et $F = C_0^2(I)$ l'espace vectoriel des applications de classe C^2 de I dans $\mathbb{R}$ telles que $u(0) = u(1) = 0$. On munit F de la norme $\|u\|_F = \sup_{t\in I} |u''(t)|$. On note $C(I)$ l'espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

1°) Pour tout $u \in F$ on pose : $D^2(u) = u''$ et $B_\lambda(u) = u'' + \lambda u, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que D^2 et B_λ sont des applications linéaires continues de F dans $C(I)$.

2°) Montrer que le noyau de B_λ est différent de $\{0_F\}$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\lambda = k^2\pi^2$.

3°) Soit $T : \mathbb{R} \times F \to C(I)$ l'application définie par : $T(s, u) = D^2(u) + su + f(u)$.

Montrer que T est différentiable par rapport à u en tout point $(s_0, u_0) \in \mathbb{R} \times F$, et calculer $T_u'(s_0, u_0)v, \forall v \in F$.

4°) Soit $s_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que : si $s_0 + f'(0) \neq k^2\pi^2, \forall k \in \mathbb{Z}$, alors il existe un voisinage J de s_0 dans $\mathbb{R}$ tel que: $\forall s \in J$, l'équation

$$u'' + su + f(u) = 0, u(0) = u(1) = 0$$

admet une et une seule solution qui est la fonction nulle.

Exercice 6:

Soit E l'espace vectoriel réel des applications $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ qui sont de classe C^2 et s'annulent en 0 et 1. On note $\|.\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E, et on pose $\|f\| = |f'(0)| + \|f''\|_\infty$.

1°) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E qui en fait un espace de Banach. Comparer cette norme à $\|.\|_\infty$.

2°) Soit $F = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$.

Montrer que l'application $u : E \to F$ définie par $u(f) = -f'' + f^3$ est de classe C^1 sur E, et calculer $u'(f)$.

3°) Montrer que $u'(0)$ est une bijection. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que: si $g \in F$ est tel que $\|g\|_\infty < \varepsilon$, alors l'équation $-X'' + X^3 = g$ admet une unique solution dans E.

Exercice 7:

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, et $K > 0$ tels que:

$$\|f(x) - f(y)\| \geq K \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

1°) Montrer que f est injective

2°) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$

3°) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f'(x)$ est inversible

4°) Utiliser le théorème d'inversion locale pour montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est un C^1 - difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Université F.H.B Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2015 - 2016

Licence 3: TD Calcul différentiel
Fiche n°1

Exercice 1:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \text{ et } f(0,0) = 0.$$

1°) Montrer que f est de classe C^1.
2°) f est - elle deux fois différentiable? Si oui, calculer sa différentielle seconde.
3°) f est - elle trois fois différentiable? Si oui, calculer sa différentielle troisième.
4°) Calculer

$$\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} \|df(x)\|.$$

En déduire l'existence de $C > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, |f(x,y)| \leq C \|(x,y)\|.$$

Exercice 2:

Soient α une fonction numérique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et E l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme.

Montrer que l'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(f) = \int_a^b \alpha[f(x)]dx,$$

est différentiable, et calculer sa différentielle.

Exercice 3:

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. La norme associée à ce produit scalaire est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$.

Soit u un endomorphisme continu symétrique de E, c'est à dire un endomorphisme continu de E tel que:

$$\forall x,y \in E, \quad \langle u(x),y \rangle = \langle x,u(y) \rangle.$$

1°) Montrer que l'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \langle u(x),x \rangle$ est différentiable sur E, et calculer $\phi'(a).h$ pour tous $a,h \in E$.

2°) Soit $\psi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$\psi(x) = \|x\|^{-2} \langle u(x),x \rangle \text{ si } x \neq 0, \text{ et } \psi(0) = 0.$$

Etudier la différentiabilité de ψ, et calculer le cas échéant sa différentielle.

Exercice 4:

Soit F l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_F$, et E l'espace de Banach des applications de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 et 1 muni de la norme:

$$\|y\|_E = \sup_{t\in[0,1]} [|y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|].$$

Soit $\phi : E \to F$ l'application définie par: $\phi(y) = y'' + ayy' + by^2$, où a et b sont des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que ϕ est de classe C^1 sur E et calculer sa différentielle $d\phi(x)$ en un point x de E. $d\phi(0)$ est - elle bijective?

2°) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que: $\forall f \in F$ tel que $\|f\|_F < r$, il existe $y \in E$ tel que $\phi(y) = f$.

3°) f est - elle deux fois différentiable? Si oui, calculer sa différentielle seconde.

Exercice 5:

Soient E un espace de Banach, $f : L(E) \times L(E) \to L(E)$ définie par

$$f(A,B) = B - \frac{1}{2}(Id_E - A + B^2)$$

où $L(E)$ est l'espace des applications linéaires continues de E dans E.

1°) Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites qu'il existe U voisinage de Id_E, V voisinage de $0_{L(E)}$ dans $L(E)$, et une application $\phi : U \to V$ tels que

$$\phi(Id_E) = 0_{L(E)} \text{ et } A = (Id_E - \phi(A))^2, \forall A \in U.$$

2°) Montrer que l'application R définie sur U par $R(A) = Id_E - \phi(A)$ est différentiable et calculer sa différentielle au point Id_E.

Exercice 6:

On considère la fonction numérique sur $\mathbb{R}^2$ définie par: $F(x,y) = \sin(x+y) + \cos(x - y) - 1$.

1°) Montrer que l'équation $F(x,y) = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite $\phi : x \mapsto y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 0$.

2°) Donner le développement limité de ϕ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2015 - 2016

Licence 3: TD EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.

Exercice 1:

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+t^2)y''(t)+t^2y(t)y'(t)+e^{-t}y(t)^2=0,$$

où y est une fonction à valeurs réelles de la variable réelle t.

1°) Posons $u(t)=y(t)$ et $v(t)=y'(t)$.

Montrer que y est solution de (E) si et seulement si (u,v) est solution de

$$(E_1) \qquad \begin{cases} u'(t)=v(t) \\ v'(t)=-\frac{t^2}{1+t^2}u(t)v(t)-\frac{1}{1+t^2}e^{-t}u(t)^2. \end{cases}$$

2°) Etudier l'existence théorique de solution (u,v) de (E_1).

3°) A - t - on unicité des solutions de (E_1)?

4°) Enoncer le théorème des solutions partout définies. Ce théorème s'applique - t - il à (E_1)?

Exercice 2:

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \qquad \begin{cases} x'=-2y+z \\ y'=x+3y-t^2 \\ z'=-x-y+3z \end{cases}$$

, où x, y et z sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

1°) Montrer que (E) est linéaire.

2°) L'équation (E) admet elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

3°) Jordaniser la matrice du système. En déduire la résolvante de (E).

4°) Donner la formule permettant de trouver la solution maximale $u(t)=(x(t),y(t),z(t))$ de (E) telle que $u(0)=(0,-1,0)$.

5°) Calculer concrètement la solution maximale $u(t)$ de (E) telle que $u(0)=(0,-1,0)$.

Université FHB Abidjan Cocody — Année 2013-2014
UFR Mathématiques et Informatique

Licence 3 - Mention : Mathématiques
EC : Calcul Différentiel
Devoir - Juillet 2014
Durée : 2 heures. (Sans documents)

Exercice 1

1) Enoncer le théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach réels.

2) Soient E_1, E_2, E_3 et F des espaces de Banach réels. Soit $T : E_1 \times E_2 \times E_3 \to F$ une application trilinéaire continue.

Montrer que T est différentiable et calculer

$$T'(x_1, x_2, x_3) . (h_1, h_2, h_3)$$

pour tous $(x_1, x_2, x_3), (h_1, h_2, h_3) \in E_1 \times E_2 \times E_3$.

Exercice 2

Soient X, E, F, G des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Soit U un ouvert de X.
Soient $\varphi : U \to L(E, F)$ et $\psi : U \to L(F, G)$ des applications deux fois différentiables.
Soit f l'application définie sur U par :

$$\forall u \in U, \ f(u) = \psi(u) \circ \varphi(u).$$

1) Montrer que f est différentiable sur U et calculer

$$df(u).h$$

pour tous $u \in U$, $h \in E$.

2) Montrer que f est deux fois différentiable sur U et calculer

$$f''(u).(h, k)$$

pour tous $u \in U$, $h, k \in E$.

1

Scanned by CamScanner

Université F.H.B Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2014 - 2015

Licence 3: Devoir de Calcul différentiel - EDO

Durée: 1H30mn

Exercice 1:

Soit F l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_F$, et E l'espace de Banach des applications de classe C^2 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent en 0 et 1 muni de la norme:

$$\|y\|_E = \sup_{t\in[0,1]} [|y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|].$$

Soit $\phi : E \to F$ l'application définie par: $\phi(y) = y'' + ayy' + by^2$, où a et b sont des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que ϕ est de classe C^1 sur E et calculer sa différentielle $d\phi(x)$ en un point x de E. $d\phi(x)$ est - elle bijective?

2°) ϕ est - elle deux fois différentiable? Si oui, calculer sa différentielle seconde.

Exercice 2:

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x^2y'' + 3xy' + y = 0,$$

où y est une fonction à valeurs réelles de la variable réelle $x \in]0,+\infty[$.

1°) Vérifier que $y(x) = x^{-1}$ est solution de (E).

2°) Posons $u(x) = y(x)$ et $v(x) = y'(x)$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si

$$(E_1) \qquad \begin{cases} u'(x) = v(x) \\ v'(x) = -\frac{3}{x}v(x) - \frac{1}{x^2}u(x) \end{cases}$$

a) Montrer que cette équation est linéaire.

b) Etudier l'existence théorique de solutions de (E_1) sur $]0,+\infty[$.

3°) Déterminer la résolvante de (E_1).

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année 2014-2015

L3 : Mathématiques et Applications
ECUE : Calcul Différentiel
Session du 30 Novembre 2015 - Durée : 02H

Exercice 1.

Dans cet exercice, E et F sont des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application.

1. **(a)** Définir la différentiabilité de f en $a \in U$ et préciser l'espace d'appartenance de la différentielle $f'(a)$.

   (b) Exprimer que f est deux fois différentiable en $a \in U$ et préciser l'espace d'appartenance de la différentielle seconde $f''(a)$.

   (c) Pour $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^q$, p et q étant des entiers naturels non nuls, que représente la matrice jacobienne $J_f(a)$ de f en $a \in U$? La définir.

2. Enoncer le théorème des accroissements finis :

   (i) pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

   (ii) pour les fonctions de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé;

   (iii) pour les fonctions définies dans un ouvert d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.

3. On suppose que U est un ouvert connexe et f différentiable dans U, de dérivée f'. Montrer que si quel que soit $x \in U$, $f'(x) = 0$, alors f est constante.

Exercice 2.

1. Enoncer le théorème des fonctions implicites. Dans le cas où la fonction implicite est différentiable, trouver l'expression de sa différentielle en un point a où elle est différentiable.

2. Enoncer le théorème d'inversion locale.

3. Soit E l'espace de Banach des applications $f : E \to \mathbb{R}$ qui sont de classe C^2 et qui s'annulent en 0 et en 1. On note $\|.\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E, et on pose, pour $f \in E$, $\|f\| = \|f'(0)\|_\infty + \|f''\|_\infty$.
$= |f'(0)| + \|f''\|_\infty$.

(i) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur E et que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach.

(ii) Soit $F = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. Montrer que l'application $v : E \to F$ définie par

$$v(f) = -f'' + f^3$$

est de classe C^1 sur E et, pour $f \in E$ calculer la différentielle $v'(f)$.

(iii) Montrer que $v'(0)$ est une bijection.

(vi) Déduire de ce qui précède l'existence d'un réel $\epsilon > 0$ qui est tel que si $g \in F$ vérifie $\|g\|_\infty < \varepsilon$, alors l'équation

$$-X'' + X^3 = g$$

admet une solution unique dans E.

Université Félix Houphouet-Boigny Abidjan Cocody
UFR Mathématiques et Informatique

Année 2014-2015

Licence 3
UE : Calcul Différentiel et EDO
ECUE : Calcul Différentiel
Deuxième Session - Mars 2016
Durée : 2 heures. (Sans documents)

Exercice 1

Soient E, F et G des espaces de Banach sur $\mathbb{R}$.
1) Soit $\beta : L(E,F) \times L(F,G) \to L(E,G)$ l'application définie par $\beta(u,v) = v \circ u$.
Montrer que β est de classe C^2.

2) Soient U un ouvert de E, V un ouvert de F. Soient $f : U \to F$ et $g : V \to G$ deux applications telles que $f(U) \subset V$. Soit $a \in U$.

Montrer que si f est deux fois différentiable en a et si g est deux fois différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est deux fois différentiable en a et calculer $(g \circ f)''(a)(h,k)$ pour tous $h, k \in E$.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle , \rangle$. La norme associée à ce produit scalaire est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Soit u un endomorphisme symétrique de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que

$$\forall x, y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle .$$

1) Montrer que l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \langle u(x), x \rangle$ est différentiable sur E et, pour tous $a, h \in E$, calculer $\varphi'(a).h$.

2) Soit $\Theta : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\Theta(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Montrer que Θ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et pour tout $(a,h) \in (E \setminus \{0\}) \times E$, calculer $\Theta'(a).h$.

UNISAT

Année 2014-2015

Licence L3 Mathématiques
UE : Calcul Différentiel et EDO
EC : EDO
Devoir - Mai 2015
Durée : 1 heure. (Sans documents)

Exercice
Soit le système différentiel

$$(S)\begin{cases} x'(t) &= -x(t)+y(t) \\ y'(t) &= -x(t)-y(t)-z(t) \\ z'(t) &= -y(t)-z(t)-1 \end{cases}$$

1) Déterminer la résolvante $R(t)=R(t,0)$ du système homogène associé.

2) En déduire la solution du système (S) telle que $\begin{cases} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \end{cases}$

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2014 - 2015

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.
Examen Première Session
(24/11/2015) Durée: 1 heure 30mn

Exercice 1: (10 pts)
On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad (1+t^2)y''(t) + t^2 y(t)y'(t) + e^{-t}y(t)^2 = 0,$$

où y est une fonction à valeurs réelles de la variable réelle t.

1°) Posons $u(t) = y(t)$ et $v(t) = y'(t)$.
Montrer que y est solution de (E) si et seulement si (u,v) est solution de

$$(E_1) \qquad \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{t^2}{1+t^2}u(t)v(t) - \frac{1}{1+t^2}e^{-t}u(t)^2. \end{cases}$$

2°) Etudier l'existence théorique de solution (u,v) de (E_1).

3°) A - t - on unicité des solutions de (E_1)?

4°) Enoncer le théorème des solutions partout définies. Ce théorème s'applique - t - il à (E_1)?

Exercice 2: (10 pts)
On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad \begin{cases} x' = -2y + z \\ y' = x + 3y - t^2 \\ z' = -x - y + 3z \end{cases}$$, où x, y et z sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

1°) Montrer que (E) est linéaire.

2°) L'équation (E) admet elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

3°) Jordaniser la matrice du système. En déduire la résolvante de (E).

4°) Donner la formule permettant de trouver la solution maximale $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) telle que $u(0) = (0, -1, 0)$.

N.B.: Il n'est pas demandé de calculer concrètement $u(t)$.

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2014 - 2015

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.
Examen Seconde Session
Durée: 1 heure 30mn

Exercice 1: (Cours)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel normé des endomorphismes continus de E muni de la norme de la convergence uniforme, $A : I \to \mathcal{L}(E)$ et $B : I \to E$ deux applications continues, $x_0 \in E$ et $t_0 \in I$.

Soit $R(t, t_0)$ la résolvante de l'équation différentielle

$$(E) \qquad \begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t) \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1°) Montrer que, y définie par

$$y(t) = R(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)ds, \forall t \in I,$$

est une solution de (E) sur I.

2°) Montrer que (E) admet une seule solution sur I.

Exercice 2:

On considère l'équation différentielle:

$$(E_1) \qquad y''(t) + ty'(t) - 2y(t) = 4, \;\; y(0) = -1 \text{ et } y'(0) = 0.$$

1°) Montrer que $y_1(t) = t^2 + 1$ est une solution de

$$(E_2) \qquad y''(t) + ty'(t) - 2y(t) = 0$$

sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Posons $u(t) = y(t)$ et $v(t) = y'(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
Montrer que y est solution de (E_1) si et seulement (u, v) est solution de

$$(E_3) \qquad \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -tv(t) + 2u(t) + 4 \end{cases}, u(0) = -1 \text{ et } v(0) = 0.$$

3°) Etudier l'existence théorique et l'unicité de solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$.

UNISAT Année 2014-2015

Licence L3 Mathématiques
UE : Calcul Différentiel et EDO
EC : EDO
Deuxième Session - Octobre 2015
Durée : 1 heure. (Sans documents)

Exercice
Soit le système différentiel

$$(S)\begin{cases} x'(t) &= x(t)+z(t)-1 \\ y'(t) &= x(t)+z(t)+e^t \\ z'(t) &= x(t)-y(t)+1 \end{cases}$$

1) Déterminer la résolvante $R(t)=R(t,0)$ **du système homogène associé.**

2) En déduire la solution du système (S) **telle que** $\begin{cases} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \end{cases}$

UNISAT

Année 2015-2016

Licence 3 - Mathématiques
UE : Calcul Différentiel et EDO
ECUE : Calcul Différentiel
Première Session - Juillet 2016
Durée : 2 heures. (Sans documents)

Exercice 1

Enoncer le théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach réels.

Exercice 2

Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. Soit $f : Isom(E) \to L(E)$ l'application définie par

$$f(u) = u^2 - 2u + u^{-1}.$$

1) Montrer que f est différentiable et calculer $df(u).h$, $\forall u \in Isom(E)$, $\forall h \in L(E)$.

2) Montrer que pour v proche de 0, l'équation $u^3 - 2u^2 - uv + Id_E = 0$ admet une unique solution u dans un ouvert $U \subset Isom(E)$.

3) Montrer que f est deux fois différentiable et calculer $f''(u).(h_1, h_2)$, $\forall u \in Isom(E)$, $\forall h_1, h_2 \in L(E)$.

Exercice 3

Soient E et F deux espaces de Banach réels. Soit U un ouvert non vide de E.
Soit $f : U \to F$ une application. Soit $a \in U$ et $h \in E$. On pose

$$d^G f(a).h = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t}$$

lorsque cette limite existe.

On dit que f est G-différentiable en a si $d^G f(a).h$ existe pour tout $h \in E$ et si l'application

$$\begin{array}{rccl} d^G f(a) : & E & \to & F \\ & h & \mapsto & d^G f(a).h \end{array}$$

est linéaire continue.

1) Montrer que si f est différentiable en a alors f est G-différentiable en a et $d^G f(a) = df(a)$.

2) Soit $S = [a, a+h] = \{a + th \ / \ t \in [0,1]\}$ et $\varphi : t \in [0,1] \mapsto f(a+th) \in F$.
Montrer que si f est G-différentiable en tout point du segment S et si l'application

$$\begin{array}{rccl} d^G f : & S & \to & L(E,F) \\ & x & \mapsto & d^G f(x) \end{array}$$

est continue sur S, alors φ est de classe C^1 sur $[0,1]$ et on a

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 d^G f(a+th).h\,dt$$

3) Montrer que si f est G-différentiable dans un voisinage V de a et si l'application $d^G f : x \mapsto d^G f(x)$ est continue sur V, alors f est différentiable en a et $df(a) = d^G f(a)$.

Université Félix Houphouet Boigny
UFR Mathématiquues et Informatique
Année universitaire : 2015 -2016

LICENCE 3 – Mention : Mathématiques
ECUE Calcul différentiel
Examen - Session du 15 decembre 2016 - Durée : 2H30.

Exercice 1. *Soit E_n, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieurs ou égaux à n. Etudier la différentiabilité des applications suivantes définies sur E_n. En tout polynôme P_0 en lequel F (respectivement G) est différentiable, on précisera la différentielle.*

$$P \to F(P) = P' - P^2; \quad P \to G(P) = \int_0^1 (P^3(t) - P^2(t))dt$$

Exercice 2. *On considère la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^2$ par*

$$F(x,y) = sin(x+y) + cos(x-y) - 1.$$

(i) *Montrer que l'égalité $F(x,y) = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite $\varphi : x \to y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 0$.*

(ii) *Donner le développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de 0.*

Exercice 3. *Soit f une application différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans lui même et qui est propre, c'est-à-dire qui est telle que $\|f(x)\|$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tends vers $+\infty$. Ici, $\|.\|$ est la norme euclidienne issue du produit scalaire $<,>$ de $\mathbb{R}^2$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $f'(x)$ est injective. On veut démontrer que f est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et g l'application numérique définie par $g(x) = \|f(x) - a\|^2$.*

(i) *Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $g'(x)$.*

(ii) *Démontrer que g atteint sa borne inférieure en un point $x_0 \in \mathbb{R}^2$, et que $g'(x_0) = 0$.*

(iii) *En déduire la sujectivité de f.*

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2015 - 2016

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.

Examen de la Session Unique

Durée: 1 heure

Exercice 1: (5 points)

Enoncer le théorème de Cauchy - Lipschitz - Picard.

Exercice 2: (15 points)

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y - z \\ z' = -y - z - 1 \end{cases}$$

, où x, y et z sont des fonctions réelles de la variable réelle t.

1°) Montrer que (E) est linéaire.

2°) L'équation (E) admet - elle des solutions sur $\mathbb{R}$?

3°) Jordaniser la matrice du système. En déduire la résolvante de (E).

4°) Donner la formule permettant de trouver la solution maximale $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) telle que $u(0) = (1, 0, 0)$.

N.B.: Il n'est pas demandé de calculer concrètement $u(t)$.

Université Félix Houphouët-Boigny - UFR Mathématiques et Informatique
Année universitaire 2015-2016

L3 : Mathématiques et Applications
ECUE : Calcul différentiel
Session du 15 mars 2017 - Durée : 02H

Aucun document n'est autorisé !

Exercice 1. *(05 points) Enoncer proprement :*

(i) *le théorème des accroissements finis pour les fonctions numériques ;*

(ii) *le théorème des accroissements finis pour les fonctions à valeurs vectorielles ;*

(iii) *le théorème des fonctions implicites ;*

iv *le théorème d'inversion locale pour les fonctions de classe C^1.*

Exercice 2. *(15 points) Soient $(E, \|\|)$ un espace de Banach, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et I_E l'identité de E. On considère l'application $\Theta : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\Theta(u) = u \circ u = u^2$.*

1. *Montrer que Θ est de classe C^1 et calculer sa différentielle en tout point u_0.*
2. *Montrer qu'il existe un réel positif ϵ qui est tel que, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|u - v\| < \epsilon$, l'équation $u \circ u = v$ possède une solution dans $\mathcal{L}(E)$.*
3. *On suppose que $E = \mathbb{R}^2$. On considère les éléments u et h de $\mathcal{L}(E)$ dont les matrices dans la base canonique de mathbbR^2 sont :*

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) *Calculer $\Theta'(u).h$.*

   (b) *En déduire qu'il nexiste pas de fonction différentiable Ψ définie sur un voisinage $\mathcal{W}$ de I_E et à valeurs dans un voisinage de u dans $\mathcal{L}(E)$, telle que $\Psi(I_E) = u$ et $\Psi(w) \circ \Psi(w) = w$ pour tout $w \in \mathcal{W}$.*

Université F.H.B Cocody
UFR Mathématiques - Informatique

Année universitaire 2015 - 2016

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.

Examen de la Seconde Session

Durée: 1 heure

Exercice 1: (5 points)

Enoncer le théorème de prolongement des solutions d'une équation différentielle ordinaire.

Exercice 2: (15 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad x^2y'' + 3xy' + y = 0,$$

où y est une fonction à valeurs réelles de la variable réelle $x \in]0, +\infty[$.

1°) Vérifier que $y(x) = x^{-1}$ est solution de (E).

2°) Posons $u(x) = y(x)$ et $v(x) = y'(x)$.

$a)$ Montrer que y est solution de (E) si et seulement si

$$(E_1) \qquad \begin{cases} u'(x) = v(x) \\ v'(x) = -\frac{3}{x}v(x) - \frac{1}{x^2}u(x) \end{cases}.$$

$b)$ Montrer que l'équation (E_1) est linéaire.

$c)$ Etudier l'existence théorique de solutions de (E_1) sur $]0, +\infty[$.

3°) Déterminer la résolvante $R(t, t_0)$ de (E_1) pour $t_0 \in]0, +\infty[$ fixé.

TD Calcul différentiel Prof KOUROUMA.

Exercice 1

1) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ ssi les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

$(x,y) \longmapsto \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car fonction rationnelle. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car $f_{|(\mathbb{R}^2)^*}(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}$

* Dérivées partielles de f en $(0,0)$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

on a: $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y^2(x^2+y^2)-2x^4y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= x^2y^2\frac{(3x^2+3y^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= x^2y^2\frac{(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

De même $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^3y(x^2+y^2)-2x^3y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= 2x^3y\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Posons $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $r>0$, $\theta\in[0,2\pi[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \left|\frac{r^6\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)}{r^4}\right| \leq 4r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| = \left|2r^6\cos^3\theta\sin\theta\cdot\frac{\cos^2\theta}{r^4}\right| \leq 2r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$

Par conséquent $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$

Conclusion : f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2) $f_{|(\mathbb{R}^2)^*}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Donc f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}^2)^*$

D'où f est 2 fois différentiable sur $(\mathbb{R}^2)^*$

* Dérivées partielles secondes de f

Soit $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2y^2(x^2+y^2)^{-2}(x^2+3y^2)\right]$$

$$= y^2\left[2x(x^2+y^2)^{-2}(x^2+3y^2)-4x^3(x^2+y^2)^{-3}(x^2+3y^2) + 2x^3(x^2+y^2)^{-2}\right]$$

$$= 2xy^2(x^2+y^2)^{-3}\left[(x^2+y^2)(x^2+3y^2)-2x^2(x^2+3y^2)+x^2(x^2+y^2)\right]$$

$$= 2xy^2(x^2+y^2)\left[x^4+4x^2y^2+3y^4-2x^4-6x^2y^2+x^4+x^2y^2\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2xy^4(3y^2-x^2)(x^2+y^2)^{-3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[2x^5y(x^2+y^2)^{-2}\right]$$

$$= 2y\left[5x^4(x^2+y^2)^{-2}-4x^6(x^2+y^2)^{-3}\right]$$

$$= 2x^4y(x^2+y^2)^{-3}\left[5(x^2+y^2)-4x^2\right]$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x^4 y (x^2+y^2)^{-3}(x^2+5y^2)$

* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$. d'après le théorème de cauchy-schwa
car f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}^2)^*$

* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[2x^5 \cdot y (x^2+y^2)^{-2}\right]$

$= 2x^5 \left[(x^2+y^2)^{-2} - 4y^2(x^2+y^2)^{-3}\right]$

$= 2x^5 (x^2+y^2)^{-3}\left[x^2+y^2-4y^2\right]$

$= 2x^5 (x^2-3y^2)(x^2+y^2)-3$

Soit $x \neq 0$

$\frac{1}{x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] = \frac{1}{x}(0-0) = 0$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] = 0$

$\frac{1}{x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] = \frac{1}{x}(0-0) = 0$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{1}{x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] = 0$

* Soit $y \neq 0$

$\frac{1}{y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] = \frac{1}{y}(0-0) = 0$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y \neq 0}} \frac{1}{y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right] = 0$

$\frac{1}{y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right] = \frac{1}{y}(0-0) = 0$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$

* continuité des dérivées partielles séconde en $(0,0)$

Posons $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$

Scanned by CamScanner

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\right|=\left|2r^5\cos\theta\sin^4\theta\times r^{-6}\times r^2(3\sin^2\theta-\cos^2\theta)\right|$$
$$\leq 8r \longrightarrow 0$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en $(0,0)$

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right|=\left|2r^5\cos^5\theta\times r^{-6}\times r^2(\cos^2\theta-3\sin^2\theta)\right|\leq 8r \longrightarrow 0$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est continue en $(0,0)$

* $$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\right|=\left|2r^5 r^{-6} r^2\cos^4\theta\sin\theta(\cos^2\theta+5\sin^2\theta)\right|$$
$$\leq 12r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ est continue en $(0,0)$

Conclusion : Toutes les dérivées partielles secondes existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$

Donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

D'où f est 2-fois différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

TD calcul differentiel — Prof SOHOU TOUSSAINT

EXERCICE 1

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1 - Montrons que f est de classe C^1 i.e f differentiable et sa differentielle est continue.

* Differentialité

• Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $(x,y) \longmapsto \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2}$ est differentiable, car fonction rationnelle definie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

* Au point $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

Posons $\varepsilon(h_1, h_2) = \dfrac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\|(h_1,h_2)\|}$

Donc $\varepsilon(h_1,h_2) = \dfrac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2+h_2^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$

en prenant $\|(h_1,h_2)\| = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$

on a : $\begin{cases} |h_1| \leq \sqrt{h_1^2+h_2^2} \\ |h_2| \leq \sqrt{h_1^2+h_2^2} \end{cases}$

Donc $\|\varepsilon(h_1,h_2)\| \leq \dfrac{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}(h_1^2+h_2^2)}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$

$\leq h_1^2 + h_2^2 \longrightarrow 0$ car $(h_1,h_2) \to (0$

Par consequent $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon(h_1,h_2) = 0$

D'où f est différentiable en $(0,0)$

En conclusion f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La fonction $(x,y) \mapsto \frac{x^3 y^2}{x^2+y^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

En particulier elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $(*)$

Au ~~point~~ voisinage de $(0,0)$

on a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 y^2 \frac{(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 y \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| = \frac{|x|^2 |y|^2 |x^2+3y^2|}{|x^2+y^2|^2}$$

$$\leq \frac{(x^2+y^2)^2 \times 4(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\leq 4(x^2+y^2) \longrightarrow 0$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| = \frac{2|x|^5 |y|}{(x^2+y^2)^2} \leq 2 \frac{(x^2+y^2)^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\leq 2(x^2+y^2) \longrightarrow 0$$

Donc $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

En résumé $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ $(**)$.

D'après $(*)$ et $(**)$ on conclut que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 0$

. Soit $y \neq 0$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = 0$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = 0$

On a : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$$

Finalement les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2) ~~M.~~ f 2 fois differentiable ?

$f_{|\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ est de classe C^∞ d'après (*)

En particulier elle est de classe C^2

Donc elle est 2 fois differentiable.

$\forall a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\forall h, k \in \mathbb{R}^2$

$$(d^2f(a))(h,k) = [d^2f(a)]((h_1,h_2),(k_1,k_2))$$

$$= \sum_{1 \le i,j \le 2} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

$$= h_1 k_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + h_2 k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) + h_1 k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + h_2 k_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

$$(d^2f(a))(h,k) = h_1 k_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + h_2 k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) + (h_1 k_2 + h_2 k_1)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

* $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2y^2 \cdot \frac{x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$$
$$= 2xy^4 \cdot \frac{3y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^3}$$

* $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^5 \cdot \frac{x^2 - 3y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

* $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x^4 y \frac{x^2 + 5y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

Calcul en $(0,0)$

Soit $x \neq 0$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0$$

Donc $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = 0$$

Donc f ~~est~~ admet une différentielle seconde en chaque point de $\mathbb{R}^2$ et $d^2 f(0,0) = 0$.

Exercice 2

$$\phi : E \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_a^b \alpha[f(x)]\,dx$$

Montrons ϕ est differentiable.

Soit $f, h \in E$

$$\phi(f+h) - \phi(f) = \int_a^b \alpha[(f+h)(x)]\,dx - \int_a^b \alpha[f(x)]\,dx$$
$$= \int_a^b \left(\alpha[f(x)+h(x)] - \alpha[f(x)]\right) dx$$

α étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, d'après le theorème des accroissements finis, on a :

$\alpha[f(x)+h(x)] - \alpha[f(x)] = h(x)\,\alpha'[f(x) + (\theta h)(x)]$ où

$\theta(x) \in]0,1[$

$$\Rightarrow \phi(f+h) - \phi(f) = \int_a^b h(x)\,\alpha'[f(x) + \theta(x)h(x)]\,dx$$

α' étant continue, $\alpha'[f(x)+\theta(x)h(x)] \equiv \alpha'[f(x)] + \varepsilon_x(h(x))$

où $\varepsilon_x(h(x)) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

D'où

$$\phi(f+h) - \phi(h) - \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x)\,dx = \int_a^b h(x)\alpha'[f(x)+\theta(x)h(x)]\,dx - \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x)\,dx$$
$$= \int_a^b \left(\alpha'[f(x)+\theta(x)h(x)] - \alpha'[f(x)]\right) h(x)\,dx$$

$$\left|\phi(f+h) - \phi(f) - \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x)\,dx\right| \leq \|h\|_E \int_a^b \left|\alpha'[f(x)+\theta(x)h(x)] - \alpha'[f(x)]\right| dx$$

$$\frac{1}{\|h\|_E}\left|\phi(f+h) - \phi(f) - \int_a^b \alpha[f(x)]h(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \left|\alpha'[f(x)+\theta(x)h(x)] - \alpha'[f(x)]\right| dx$$

f, h étant continue sur le compact $[a,b]$ alors elles sont bornées sur $[a,b]$.

Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tq

$\forall x \in [a,b]$, $f(x), h(x)$, $f(x)+\theta(x)h(x) \in K$

α' étant continue sur K, α' est uniformement continue sur K.

Lorsque $h \to 0$ on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $\forall x \in [a,b]$,
$|f(x)+\theta(x)h(x) - f(x)| < \eta \Rightarrow |\alpha'[f(x)+\theta(x)h(x)] - \alpha'[f(x)]| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |\theta(x)h(x)| < \eta \Rightarrow |\alpha'[f(x)+\theta(x)h(x)] - \alpha'[f(x)]| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $\|h\|_E < \eta \Rightarrow |\alpha'[f(x)+\theta(x)h(x)] - \alpha'[f(x)]| < \varepsilon$

$\forall x \in [a,b], \quad \int_a^b |\alpha'[f(x)+\theta(x)h(x)] - \alpha'[f(x)]| dx < (b-a)\varepsilon$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $\|h\|_E < \eta$. $|\phi(f+h) - \phi(f) - \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x)dx| < (b-a)\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{1}{\|h\|_E} |\phi(f+h) - \phi(f) - \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x)dx| = 0$

d'où $\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|_E} |\phi(f+h) - \phi(f) - \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x)dx| = 0$

Posons $L(h) = \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x)dx$

$\forall h_1, h_2 \in E, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a :
$L(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 L(h_1) + \lambda_2 L(h_2)$ car l'intégrale est linéaire

donc L est linéaire.

- continuité

$|L(h)| \leq \int_a^b |\alpha'[f(x)]| \, |h(x)| dx$

$\leq \int_a^b |\alpha'[f(x)]| \sup_{t \in [a,b]} |h(t)| dx \leq \|h\|_E \int_a^b |\alpha'[f(x)]|$

$|L(h)| \leq \|h\|_E \times C$ D'où L est continue

Finalement ϕ est différentiable et on a :
$d\phi(f).h = \int_a^b \alpha'[f(x)].h(x)dx$ i.e $\phi'(f).h = \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x)dx$

EXERCICE 3

1) $\phi : E \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \langle u(x), x \rangle$

Montrons que ϕ est differentiable sur E.

soit $\phi_1 : E \to E \times E$ $\quad$ $\phi_2 : E\times E \to \mathbb{R}$
$x \mapsto (u(x), x)$ $\quad$ $(x,y) \mapsto \langle x, y \rangle$

- u est lineaire et continue donc differentiable
- Id_E est lineaire continue donc differentiable

donc ϕ_1 est ~~lineaire~~ differentiable car chacune de ses applications composantes est differentiable.

ϕ_2 est bilineaire

$\forall (x,y) \in E\times E$, $|\phi_2(x,y)| = |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|_E . \|y\|_E$
(inegalité de Schawz)

donc ϕ_2 est bilineaire continue d'où ϕ_2 est differentiable.

Finalement $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ est differentiable

Soit $a, h \in E$

$\phi'(a) h = (\phi_2 \circ \phi_1)'(a) . h = (\phi_2'(\phi_1(a))) \circ \phi_1'(a) . h$

on a : $\phi_1'(a).h = (u'(a).h, Id'(a).h)$

$\phi_1'(a).h = (u(h), h)$

$\phi_2'(x,y)(h,k) = \phi_2(x,k) + \phi_2(h,y)$

$\phi'(a).h = \phi_2'(u(a), a) . (u(h), h)$

$= \phi_2(u(a), h) + \phi_2(u(h), a)$

$\phi'(a).h = \langle u(a), h \rangle + \langle u(h), a \rangle$

comme u est un endomorphisme symetique

on a : $\langle u(h), a \rangle = \langle h, u(a) \rangle$

$= \langle u(a), h \rangle$

Donc $\phi'(a).h = 2\langle u(a), h\rangle$

2) $\psi : E \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \|x\|^{-2}\langle u(x), x\rangle$ si $x \neq 0$ et $\psi(0) = 0$.

Etude de la differentiabilité de ψ

$$\psi(x) = \frac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} = \frac{\phi(x)}{\|x\|^2}$$

soit $f : x \mapsto \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$

on obtient f en posant $u = Id_E$ dans l'expression de ϕ ; or Id_E est un endomorphisme continue et symetrique de E. Donc f est differentiable sur E.

De plus $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Donc $\psi = \frac{\phi}{f}$ est differentiable sur $E \setminus \{0\}$

~~De plus $f(x) \neq$~~

calcul de $\psi'(x)$, $\forall x \in E \setminus \{0\}$

$$\psi'(x).h = \frac{f(x)\,\phi'(x).h - \phi(x)\,f'(x)\,h}{f^2(x)}$$

$$= \frac{2\|x\|^2\langle u(x), h\rangle - 2\langle u(x), x\rangle\langle x, h\rangle}{\|x\|^4}$$

* differentiabilité en 0

Si ψ est differentiable en 0, alors ψ admet une dérivée au point 0 suivant tout vecteur $v \in E$

Soit $v \in E \setminus \{0\}$.

$$\frac{\psi(0+h) - \psi(0)}{t} = \frac{\frac{\phi(tv)}{\|tv\|^2} - 0}{t} = \frac{\langle u(tv), tv\rangle}{t^2\, t\,\|v\|^2}$$

$$= \frac{t^2\langle u(v), v\rangle}{t^2\, t\,\|v\|^2} = \frac{\langle u(v), v\rangle}{t\,\|v\|^2}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\psi(0+tv) - \psi(0)}{t} = \infty$$

ψ n'admet pas de dérivée au point 0 suivant $v \in E\setminus\{0\}$
Donc ψ n'est pas différentiable en 0 -

Exercice 5

E espace de Banach

$$f : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$(A,B) \longmapsto B - \frac{1}{2}(Id_E - A + B^2)$$

1) * Montrons que f est continue

Soit $f_1 : \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$
$$(A,B) \longmapsto B$$

$$f_2 : \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$(A,B) \longmapsto \frac{1}{2}A$$

$$f_3 : \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$(A,B) \longmapsto -\frac{1}{2}Id_E$$

$$f_4 : \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$(A,B) \longmapsto -\frac{1}{2}B^2$$

- $f_1 = P_2$ la deuxième projection canonique de $\mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$
P_2 linéaire continue donc différentiable
- $f_2 = \frac{1}{2}P_1$ donc f_2 est différentiable
- f_3 est une application constante donc f_3 est continue et différentiable.
- $f_4 = -\frac{1}{2}\alpha\circ\beta$ avec $\beta : \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$
$$(A,B) \longmapsto (B,B)$$
$$\alpha : \mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$(u,v) \longmapsto u\circ v$$

Les deux applications composantes de β sont égales à $f_1 = P_2$ qui est différentiables en particulier P_2 est continue

α est bilineaire.
$\|\alpha(u,v)\| = \|u \circ v\| \leq \|u\| \|v\|$ donc α est bilineaire
Continue.
Donc f est differentiable par conséquent f est continue.
* On a : $f(Id_E, O_{\mathcal{L}(E)}) = O_{\mathcal{L}(E)} - \frac{1}{2}(Id_E - Id_E + O^2_{\mathcal{L}(E)})$
$= O_{\mathcal{L}(E)}$
* f est differentiable donc elle admet des derivées partielles en tout point (A, B)
Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ fixé

$$g : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$B \longmapsto f(A, B) = B - \frac{1}{2}(Id_E - A + B^2)$$

soit
$$g_1 : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$B \longmapsto B$$

$$g_2 : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$B \longmapsto -\frac{1}{2}(Id_E - A)$$

$$g_3 : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$
$$B \longmapsto B^2$$

$g_1 = Id_{\mathcal{L}(E)}$ alors $g_1' = g_1 = Id_{\mathcal{L}(E)}$
g_2 est une application constante.
donc $g_2'(B) = O_{\mathcal{L}(E)}$

$g_3 = \alpha \circ \gamma$ avec $\gamma : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$
$B \longmapsto (B, B)$

$g_3'(B).h = (\alpha'(\gamma(B)) \circ \gamma'(B)).h$
$\gamma'(B).h = (Id(h), Id(h)) = (h, h)$
$\alpha'(\gamma(B)).(h,h) = \alpha'(B,B)(h,h)$
$= \alpha(B, h) + \alpha(h, B)$

$g_3'(B).h = B \circ h + h \circ B$.

Scanned by CamScanner

Par suite

$g'(B) \cdot h = h - \frac{1}{2}(B \circ h + h \circ B)$

donc $\frac{\partial f}{\partial B}(A, B) \cdot h = h - \frac{1}{2}(B \circ h + h \circ B)$

on a $T(h) = \left(\frac{\partial f}{\partial B}(A, B) - \frac{\partial f}{\partial B}(A_0, B_0) \right) \cdot h$

$$T(h) = -\frac{1}{2}(B_0 h + h_0 B) + \frac{1}{2}(B_0 \circ h + h \circ B_0)$$

$$= \frac{1}{2}(B_0 \circ h - B \circ h) + \frac{1}{2}(h \circ B_0 - h \circ B)$$

$$T(h) = \frac{1}{2}(B_0 - B) \circ h + \frac{1}{2} h \circ (B_0 - B)$$

$$\|T(h)\| \leq \frac{1}{2}\|B_0 - B\| \|h\| + \frac{1}{2}\|h\| \|B_0 - B\|$$

$$\|T(h)\| \leq \|h\| \|B_0 - B\|$$

$$\frac{\|T(h)\|}{\|h\|} \leq \|B_0 - B\|$$

$$\|T\| \leq \|B_0 - B\|$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial B}(A, B) - \frac{\partial f}{\partial B}(A_0, B_0) \right\| \leq \|B - B_0\| \xrightarrow[(A,B) \to (A_0, B_0)]{} 0$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial B}$ est continue

on a : $\frac{\partial f}{\partial B}(Id_E, O_{\mathcal{L}(E)}) \cdot h = h$

Alors $\frac{\partial f}{\partial B}(Id_E, O_{\mathcal{L}(E)}) = Id_{\mathcal{L}(E)}$

or $Id_{\mathcal{L}(E)} \in Isom(\mathcal{L}(E), \mathcal{L}(E))$

Donc d'après le theorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de Id_E, V de $O_{\mathcal{L}(E)}$ dans $\mathcal{L}(E)$ et une unique application $\phi : U \to V$ tels que $\phi(Id_E) = O_{\mathcal{L}(E)}$ et $\forall A \in U, \exists B \in V$ tels que : $B = \phi(A)$

i.e que $f(A, \phi(A)) = 0$

donc $f(A,\phi(A)) = \phi(A) - \frac{1}{2}(Id_E - A + \phi(A)) = 0$

$$\phi(A) = \frac{1}{2}\left(Id_E - A + \phi(A)^2\right)$$

$$2\phi(A) = Id_E - A + \phi(A)^2$$

$$A = Id_E - 2\phi(A) + \phi(A)^2$$

$$A = Id_E - 2\phi(A) + \phi(A)^2$$

$$A = \left(Id_E - \phi(A)\right)^2$$

2) Montrons que R définie par $R(A) = Id_E - \phi(A)$ est differentiable

Comme f est differentiable sur $\mathcal{L}(E)\times\mathcal{L}(E)$. Alors la fonction implicite ϕ est differentiable sur U, et

on a : $\phi'(A) = -\left[\frac{\partial f}{\partial B}(A,\phi(A))\right]^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial A}(A, \phi(A))$

Soit $h \in \mathcal{L}(E)$

$$\phi'(Id_E).h = \left[\frac{\partial f}{\partial B}(Id_E, \phi(Id_E))\right]^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial A}(Id_E, \phi(Id_E)).f$$

$$\phi'(Id_E).h = -\left[\frac{\partial f}{\partial B}(Id_E, 0_{\mathcal{L}(E)})\right]^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial A}(Id_E, 0_{\mathcal{L}(E)}).h$$

$\frac{\partial f}{\partial B}(Id_E, 0_{\mathcal{L}(E)}) = Id_{\mathcal{L}(E)}$ Alors $\left[\frac{\partial f}{\partial B}(Id_E, 0_{\mathcal{L}(E)})\right]^{-1} = Id_{\mathcal{L}(E)}$

$$f(A,B) = B - \frac{1}{2}(Id_E - A + B^2)$$

Soit $B \in \mathcal{L}(E)$ fixé

Soit $k : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$

$\qquad A \longmapsto f(A,B) = B - \frac{1}{2}(Id_E - A + B^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial A}(A,B) = k'(A)$$

Soit $k_1 : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$

$\qquad A \longmapsto B - \frac{1}{2}Id_E + \frac{1}{2}B^2$

$k_2 : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$
$A \longmapsto A$

* k_1 est une application constante, donc elle est differentiable et $k_1'(A) = O_{\mathcal{L}(E)}$, $\forall A \in \mathcal{L}(E)$.
* $k_2 = Id_{\mathcal{L}(E)}$ lineaire continue, donc differentiable et $k_2'(A) = Id_{\mathcal{L}(E)}$ $\forall A \in \mathcal{L}(E)$

Donc k est differentiable et $k'(A) = \frac{1}{2} Id_{\mathcal{L}(E)}$

Donc $k'(A).h = \frac{1}{2} Id_{\mathcal{L}(E)}(h) = \frac{1}{2} h$

Alors $\phi'(Id_E).h = -Id_{\mathcal{L}(E)} \cdot \frac{1}{2} h$

$$\boxed{\phi'(Id_E).h = -\frac{1}{2} h}$$

$R(A) = Id_E - \phi(A)$

Soit $R_1 : U \longrightarrow \mathcal{L}(E)$
$A \longmapsto Id_E$

$R_2 = \phi$

R_1 est une application constante $R_1'(A) = 0$, $\forall A \in U$

Donc $R'(A) = -\phi'(A)$

$$\boxed{R'(Id_E).h = \frac{1}{2} h, \forall h \in \mathcal{L}(E)}$$

Exercice 4

Soit $\phi : E \to F$
$y \mapsto y'' + ayy' + by^2$

1) Soit $\phi_1 : E \to F$, $y \mapsto y''$; $\phi_2 : E \to F$, $y \mapsto yy'$; $\phi_3 : E \to F$, $y \mapsto y^2$

ϕ_1 est une application linéaire.

$\forall y \in E$, $\|\phi_1(y)\|_F = \|y''\|_F$

or $\forall t \in [0,1]$, $|y''(t)| \leq |y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|$

$$\sup_{t\in[0,1]} |y''(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} \left(|y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|\right)$$

$$\|y''\|_F \leq \|y\|_E$$

Alors $\|\phi_1(y)\|_F \leq \|y\|_E$ Donc ϕ_1 est une application linéaire continue

et $\phi_1'(y) = \phi_1$, $\forall y \in E$ (revoir le cours)

$\forall y \in E$, $\forall h \in E$, $\phi_1'(y).h = \phi_1(h) = h''$

$\phi_2 : \alpha \circ \beta$ où $\beta : E \to F \times F$
$y \mapsto (y, y')$

$\alpha : F \times F \to F$
$(u,v) \mapsto u.v$

. Les applications composantes de β sont :

$\beta_1 : E \to F$, $y \mapsto y$; $\beta_2 : E \to F$, $y \mapsto y'$

. β_1 et β_2 sont des applications linéaires

$\|\beta_1(y)\|_F = \|y\|_F$ or $\forall t \in [0,1]$, $|y(t)| \leq |y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|$

$$\sup_{t\in[0,1]} |y(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} \left(|y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|\right)$$

$\|y\|_F \leq \|y\|_E$

$\Rightarrow \|\beta_1(y)\|_F \leq \|y\|_E$ donc β_1 est continue

$\|\beta_2(y)\|_F = \|y\|_F$

$\forall t \in [0,1]$, $|y'(t)| \leq |y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|$

$\Rightarrow \|y'\|_F \leq \|y\|_E$ donc β_2 est continue

• α est bilinéaire

$\|\alpha(u,v)_F\| = \|uv\|_F = \sup_{t\in[0,1]} |u(t)v(t)|$

or $|u(t)v(t)| = |u(t)|\,|v(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |u(t)| \sup_{t\in[0,1]} |v(t)|$

$\sup_{t\in[0,1]} |u(t)v(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |u(t)| \sup_{t\in[0,1]} |v(t)|$

$\Rightarrow \|\alpha(u,v)\|_F \leq \|u\|_F \|v\|_F$

donc α est une application continue.

donc α est differentiable et $\phi_2(y)$

Par conséquent ϕ_2 est differentiable

$\phi_2(y).h = (\alpha\circ\beta)'(y).h$

$= \alpha'(\beta(y))\circ\beta'(y).h$

or $\beta'(y).h = (h, h')$

$\Rightarrow \phi_2'(y).h = \alpha'((y, y')).(h, h')$

$= \alpha'(y, h') + \alpha(h, y')$

$\phi_2'(y).h = yh' + hy'$

$\phi_3 : E \to F$, $y \mapsto y^2$ $\qquad$ $\phi_3 = \alpha\circ\gamma$ où $\gamma : E \to F\times F$, $y \mapsto (y, y)$

Les applications composantes de γ sont β_1 donc γ est differentiable

ϕ_3 est différentiable et $\phi_3'(y).h = (\alpha \circ \gamma)'(y).h$

$$= \alpha'(\gamma(y)) \circ \gamma'(y).h$$
$$= \alpha'((y,y)).(h,h)$$
$$= \alpha(y,h) + \alpha(h,y)$$

$$\phi_3'(y).h = yh + hy = 2yh$$

finalement ϕ est différentiable sur E et on a :

$\forall y, h \in E$; $\phi'(y).h = h'' + a(yh' + hy') + 2byh$.

$$\phi' : E \to \mathcal{L}(E,F)$$
$$y \mapsto \phi'(y)$$

soit $y_1, y_2 \in E$, $\forall h \in E$,

$$\|\phi'(y_1) - \phi'(y_2)\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{h \in E \setminus \{0\}} \frac{\|(\phi'(y_1) - \phi'(y_2))h\|}{\|h\|_E}$$

$$(\phi'(y_1) - \phi'(y_2)).h = a[y_1 h' + h y_1'] + 2by_1 h - a[y_2 h' + h y_2'] - 2by_2 h$$
$$= a[(y_1 - y_2)h' + h(y_1' - y_2')] + 2bh(y_1 - y_2)$$

$$\|(\phi'(y_1) - \phi'(y_2))h\| \leq \|a(y_1 - y_2)h'\|_F + \|ah(y_1' - y_2')\|_F + 2\|bh(y_1 - y_2)\|_F$$

$\forall t \in [0,1]$; $|a(t)(y_1(t) - y_2(t)).h'(t)| - |a(t)||y_1(t) - y_2(t)||h'$

$|a(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |a(t)|$; $|y_1(t) - y_2(t)| \leq |(y_1 - y_2)''(t)| + |(y_1 - y_2)'(t)| + |(y_1 - y_2)(t)|$

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \|y_1 - y_2\|_E$$

De même $|h'(t)| \leq \|h\|_E$ et $|b(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |b(t)|$

$|h(t)| \leq \|h\|_E$ et

$$|h(t)| \leq \|h\|_E$$

donc $|a(t)(y_1-y_2)(t)\cdot h'(t)| \leq \|a\|_E \|y_1-y_2\|_E \|h\|_E$

$\Rightarrow \|a(y_1-y_2)h'\|_F \leq \|a\|_E \|y_1-y_2\|_E \|h\|_E$

De même $\|ah(y_1'-y_2')\|_F \leq \|a\|_E \|h\|_E \|y_1-y_2\|_E$

$2\|bh(y_1-y_2)\|_F \leq 2\|b\|_E \|h\|_E \|y_1-y_2\|_E$

Alors $\|(\phi'(y_1)-\phi(y_2))h\|_F \leq \|a\|_E \|y_1-y_2\|_E \|h\|_E +$

$+\|a\|_E \|h\|_E \|y_1-y_2\|_E + 2\|b\|_E \|h\|_E \|y_1-y_2\|_E$

$\Rightarrow \frac{1}{\|h\|_E}(\|(\phi'(y_1)-\phi'(y_2)).h\|_F \leq 2\|a\|_E + 2\|b\|_E)\|y_1-y_2\|_E$

$\Rightarrow \|\phi'(y_1)-\phi'(y_2)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq 2(\|a\|_E+\|b\|_E)\|y_1-y_2\|_E$

Donc ϕ' est ~~li~~ lipschitzienne donc ϕ' est continue.

Par conséquent ϕ est de classe C^1 sur E.

$* \ \phi'(0) \cdot h = h''$

Posons $u(h) = h''$ u linéaire $u(h)=0 \Leftrightarrow h''=0$

$\Leftrightarrow h'(t) = c_1, \ c_1 \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0,1]$

$\Leftrightarrow h(t) = c_1 t + c_2, \ c_2 \in \mathbb{R}$

on a : $\begin{cases} h(0)=0 \\ h(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2=0 \\ c_1+c_2=0 \\ c_1=0 \end{cases}$

finalement ϕ est différentiable sur E et on a :

$\forall y, h \in E, \quad \phi'(y).h = h'' + a(yh'+hy') + 2byh$

$\Rightarrow h=0$ donc u est injective.

u est-elle surjective ?

Soit $f \in F$, existe-t-il $h \in E$ tq $u(h) = f \Leftrightarrow h'' = f$

$\Leftrightarrow h'(t) = \int_0^t f(s)\,ds + c_3, \ c_3 \in \mathbb{R}, \ \forall t \in [0,1]$

$\Leftrightarrow h(t) = \int_0^t \left(\int_0^s f(\alpha)\,d\alpha \right) ds + c_3 t + c_4 \ , c_4 \in \mathbb{R}$.

$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_4 = 0 \\ \int_0^1 \left(\int_0^s f(\alpha)\,d\alpha \right) ds + c_3 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow h(t) = \int_0^t \left(\int_0^s f(\alpha)\,d\alpha \right) ds - t \int_0^1 \left(\int_0^s f(\alpha)\,d\alpha \right) ds$

$h'' = f \in F \Rightarrow h$ est de classe C^2

$h(0) = 0$ et $h(1) = 0$ donc $h \in E$

Ainsi $\exists h \in E$ tq $u(h) = f$

Donc u est surjective.

Finalement u est bijective i.e $\phi'(0)$ est bijective

2) ϕ est de classe C^1 et $\phi'(0)$ est bijective alors d'après le théorème d'inversion locale, comme $\phi(0) = 0$, il existe un voisinage ouvert U de 0_E, un voisinage ouvert V de 0_F tq $\phi_{|U}$ est un C^1 difféomorphisme de U sur V.

Donc $\forall f \in V, \exists ! y \in U$ tq $\phi(y) = f$

comme V est un voisinage ouvert de 0_F, il existe $r > 0$ tq $B(0, r) \subset V$

Alors $\forall f \in B(0,r), \exists ! y \in U$ tq $\phi(y) = f$

Ainsi $\exists r > 0$ tq si $\|f\| < r$, $\exists ! y \in U$ tq $\phi(y) = f$

3) $\forall y \in E, \forall h \in E$, $\phi'(y).h = h'' + a(yh' + hy') + 2byh$

Soit $h \in E$ fixé

Soit $\psi(y) = h'' + a(yh' + hy') + 2byh$

$\psi = \psi_1 + \psi_2$ avec $\psi_1(y) = h''$ et ~~$\psi_2(y)$~~

$\psi_2(y) = a(yh' + hy') + 2byh$

φ_1 est une application constante donc φ_1 est différentiable et $\varphi_1'(y).k = 0_F$

φ_2 est linéaire continue (à montrer)

Donc φ_2 est différence et $\varphi_2'(y).k = \varphi_2(k)$
$= a(kh' + hk') + 2bkh$

$\varphi_2'(y).k = \varphi_2(k) = a$

Finalement φ est différentiable et $\varphi'(y).k = a(kh' + hk') + 2bkh$

donc ϕ est 2 fois différentiable et

$$\boxed{\phi''(y)(h, k) = a(kh' + hk') + 2bkh}$$

Prof SOHOU

TD Equations différentielles Ordinaires

28-11-201

Exercice 1

On considère l'équation différentielle

(E). $(1+t^2)y''(t) + t^2 y(t) y'(t) + e^{-t} y(t)^2 = 0$

1) Posons $u(t) = y(t)$ et $v(t) = y'(t)$

$$(E_1): \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{t^2}{1+t^2} u(t) v(t) - \frac{1}{1+t^2} e^{-t} u(t)^2 . \end{cases}$$

Montrons que y solution de (E) ssi (u,v) solution de (E_1)

Supposons que y solution de (E)

$$(E) \Leftrightarrow y''(t) = \frac{-t^2}{1+t^2} y(t) y'(t) - \frac{e^{-t}}{(1+t^2)} y(t)^2$$

Comme $u(t) = y(t)$ et $v(t) = y'(t)$

Alors $u'(t) = y'(t) = v(t)$

Ainsi $v'(t) = y''(t) = \frac{-t^2}{1+t^2} u(t) v(t) - \frac{e^{-t}}{1+t^2} u(t)^2$

donc (u,v) est solution de (E_1)

Réciproquement, on suppose que (u,v) est solution de (E_1).

on a : $\begin{cases} y(t) = u(t) \\ y'(t) = v(t) \\ y''(t) = v'(t) = -\frac{t^2}{1+t^2} u(t) v(t) - \frac{1}{1+t^2} e^{-t} u(t) \end{cases}$

~~Montrons~~ $= -\frac{t^2}{1+t^2} y(t) y'(t) - \frac{e^{-t}}{1+t^2} y(t)$

on obtient $y''(t) + \frac{t^2}{1+t^2} y'(t) y(t) + \frac{e^{-t}}{1+t^2} y(t)^2 = 0$

Donc y est solution de (E)

2) (E_1) : $\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\dfrac{t^2}{1+t^2} u(t)v(t) - \dfrac{e^{-t}}{1+t^2} u(t)^2 \end{cases}$

Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(t,(u,v)) \longmapsto \left(v, -\dfrac{t^2}{1+t^2}uv - \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}u^2\right)$

$\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie

* Justifions que f est continue.

Soient $f_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t,(u,v)) \longmapsto v$

$f_2 : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(t,(u,v)) \longmapsto -\dfrac{t^2}{1+t^2}uv - \dfrac{e^{-t}}{1+t^2}u^2$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$

f_1 est la 3^e composante canonique, donc f_1 est continue.

L'application $(t,(u,v)) \mapsto -\dfrac{t^2}{1+t^2}uv$ est une fonction rationnelle.

Aussi l'application $(t,(u,v)) \mapsto -\dfrac{u^2}{1+t^2}$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

La fonction $(t,(u,v)) \mapsto e^{-t}$ est la composée de l'application $(t,(u,v)) \longmapsto -t$ qui est une fonction polynôme et de l'application $\theta \mapsto e^{\theta}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. donc elle est continue.

Finalement les 2 composantes de f sont continues donc f est continue.

D'après le théorème de Péano, (E_1) admet des solutions théoriques.

3) L'unicité des solutions de E_1 ?

$\mathbb{R}^2$ est un espace de Banach.

f est continue

vérifions si f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

Soient (u_1, v_1) et $(u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(t,(u_1,v_1)) - f(t,(u_2,v_2)) = \left(v_1 - v_2, \frac{-t^2}{t^2+1}(u_1v_1 - u_2v_2) - \frac{e^{-t}}{1+t^2}(u_1^2 - u_2^2)\right)$$

$$|v_1 - v_2| \leq \max\{|u_1 - u_2|, |v_1 - v_2|\} = \|(u_1,v_1) - (u_2,v_2)\|_\infty$$

$$\left|\frac{-t^2}{1+t^2}(u_1v_1 - u_2v_2)\right| = \left|\frac{-t^2}{1+t^2}\right| |u_1v_1 - u_2v_2| \leq |u_1v_1 - u_2v_2|$$

$$u_1v_1 - u_2v_2 = v_1(u_1 - u_2) + u_2(v_1 - v_2)$$

$$\Rightarrow |u_1v_1 - u_2v_2| \leq |v_1(u_1 - u_2)| + |u_2(v_1 - v_2)|$$

on a : $u_2 = (u_2 - u_1) + u_1 \Rightarrow |u_2| \leq |u_2 - u_1| + |u_1|$

donc $|u_1v_1 - u_2v_2| \leq |v_1||u_1 - u_2| + (|u_1 - u_2| + |u_1|)|v_1 - v_2|$

$$\leq (|v_1| + |u_1 - u_2| + |u_1|)\max\{|u_1 - u_2|, |v_1 - v_2|\}$$

$$|u_1v_1 - u_2v_2| \leq (|v_1| + |u_1 - u_2| + |u_1|)\|(u_1,v_1) - (u_2,v_2)\|$$

$$\left|\frac{-e^{-t}}{1+t^2}(u_1^2 - u_2^2)\right| = \left|-\frac{e^{-t}}{1+t^2}\right| |u_1^2 - u_2^2| \leq |u_1^2 - u_2^2|$$

$$|u_1^2 - u_2^2| = |(u_1 - u_2)||(u_1 + u_2)| \leq |u_1 - u_2|(|u_1| + |u_2|)$$

$$|u_1^2 - u_2^2| \leq |u_1 - u_2|\,[|u_1| + |u_1 - u_2| + |u_1|]$$

$$\leq (2|u_1| + |u_1 - u_2|)\max\{|u_1 - u_2|, |v_1 - v_2|\}$$

$$|u_1^2 - u_2^2| \leq (2|u_1| + |u_1 - u_2|)\|(u_1 - v_1) - (u_2, v_2)\|_\infty$$

Alors $\|f(t,(u_1,v_1)) - f(t,(u_2,v_2))\|_\infty \leq [1 + |v_1| + |u_1| + |u_1 - u_2| + 2|u_1| + |u_1 - u_2|]\,\|(u_1,v_1) - (u_2,v_2)\|_\infty$ voir après

4) théorème des solutions partout définie

Soit $(E, \| \|_E)$ un espace de Banach. Et I un intervalle de $\mathbb{R}$ et bornée. $f : I \times E \to E$ continue. S'il existe $M > 0$ tq $\| f(t,x) - f(t,y) \|_E \leq M \|x-y\|_E$. $\forall t \in I$

$\forall (x,y) \in E^2$.

Alors il existe $u : I \to E$ qui vérifie

$u'(t) = f(t, u(t))$, $\forall t \in I$

$f(t,(u,v)) = \left(v, -\frac{t^2}{1+t^2} uv - \frac{e^{-t}}{1+t^2} u^2 \right)$

f n'est pas ~~bo~~ bornée par rapport à v. Donc f n'est pas borné. Par conséquent le théorème des solutions partout définie ne s'applique pas à f.

<u>Exercice 2</u>

on considère l'équation différentielle :

$$(E) \begin{cases} x' = -2y + 3 \\ y' = x + 3y - t^2 \\ z' = -x - y + 3z \end{cases}$$

1) Montrons que (E) est linéaire.

Posons $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a : $X'(t) = AX(t) + B(t)$

donc (E) est équation différentielle linéaire

2.) L'application $t \mapsto A$ est constante donc continue sur $\mathbb{R}$

L'application $t \mapsto B(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car ses composantes sont des fonctions polynomes.

Donc (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$

3.) Jordanisation de A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_A(X) = (2-\lambda)^3 \qquad E_2 = \ker(A-2I)$$

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x = -y \quad z = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \text{vect}(1,-1,0)$$

$\dim E_2 = 1 \neq 3$

Donc A n'est pas diagonalisable.

une réduite de Jordan de A est $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calcul d'une base correspondante à J.

Soit (V_1, V_2, V_3) cette base.

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2$$

$AV_2 = V_1 + 2V_2$

$$(A-2I)V_2 = V_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + z = 1 \\ x + y = -1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

$z = -1$

$x + y = -1$

$x = 1 - y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-y \\ y \\ -1 \end{pmatrix} \text{ pour } y = 0$$

$V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$AV_3 = V_2 + 2V_3$. Alors $(A - 2I)V_3 = V_2$

$\begin{cases} -2x - 2y + z = -1 \\ x + y = 0 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$ Pour $y = 0$

$z = -1$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -1 \end{pmatrix}$ $V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x = -y$

Donc la matrice de passage est : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

donc $A = PJP^{-1}$

Determinons la resolvante $R(t, t_0)$

$R(t, t_0) = \exp((t - t_0)A)$

en particulier $R(t, 0) = \exp(tA)$

$\exp(tA) = \exp(t(PJP^{-1}))$

$\exp(tA) = P\exp(tJ)P^{-1}$

$J = D + N$ $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

on verifie que $DN = ND$

Alors $\exp(D + N) = \exp(D)\exp(N)$

$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} I$

$\exp(tN) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n N^n$

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Alors $\exp(tN) = I + tN + \frac{1}{2}t^2N^2$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\exp(tJ) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\exp(tA) = e^{2t}\, P \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\exp(tA) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & -2t+\frac{1}{2}t^2 & +2t+\frac{1}{2}t+2 \\ t-\frac{1}{2}t^2 & 1+t-\frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^2 \\ -t & -t & 1+t \end{pmatrix}$$

Pour la verification on pose $t=0$, et on obtient $\exp(0) = I_3$.

$$R(t,t_0) = e^{2(t-t_0)}\begin{pmatrix} 1 & -2(t-t_0)+\frac{1}{2}(t-t_0)^2 & (t-t_0)-\frac{1}{2}(t-t_0)^2 \\ (t-t_0)-\frac{1}{2}(t-t_0)^2 & 1+(t-t_0)-\frac{1}{2}(t-t_0)^2 & \frac{1}{2}(t-t_0)^2 \\ t_0-t & t_0-t & 1+t-t_0 \end{pmatrix}$$

4) $u(t) = R(t,t_0)u(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t,s)B(s)\,ds$

Pour $t_0=0$

$u(t) = R(t,0)u(0) + \int_0^t R(t,s)\, B(s)\, ds$.

$$\|f(t,(u_1,v_1)) - f(t,(u_2,v_2))\|_\infty \leq (1+|v_1|+3|u_1|+2|u_1-u_2|)\ \|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_\infty$$

considérons $B((u_1,v_1),r)$ pour $\|\cdot\|_\infty$

si $(u_2,v_2) \in B((u_1,v_1),r)$

alors $|u_1-u_2| \leq \|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_\infty \leq r$

$$\|f(t,(u_1,v_1)) - f(t,(u_2,v_2))\|_\infty \leq (1+|v_1|+3|u_1|+2r)\ \|(u_1,v_1)-(u_2,v_2)\|_\infty$$

Soient (u_2,v_2) et $(u_3,v_3) \in B((u_1,v_1),r)$

$$~~\|f(t,(u_2,v_2))\|~~$$
$$\|f(t,(u_2,v_2)) - f(t,(u_3,v_3))\|_\infty \leq (1+|v_2|+3|u_2|+2|u_2-u_3|) \times \|(u_2,v_2)-(u_3,v_3)\|_\infty$$

or $v_2 = v_2 - v_1 + v_1$

$$|v_2| \leq |v_2-v_1| + |v_1| \leq \max\{|u_2-u_1|, |v_2-v_1|\} + |v_1|$$
$$\leq r + |v_1|$$

$$u_2 = u_2 - u_1 + u_1$$
$$|u_2| \leq |u_2-u_1| + |u_1| \leq r + |u_1|$$
$$u_2-u_3 = u_2-u_1 + u_1-u_3$$
$$|u_2-u_3| \leq |u_2-u_1| + |u_1-u_3| \leq 2r$$

Donc $\|f(t,(u_2,v_2)) - f(t,(u_3,v_3))\|_\infty \leq$

$$(1+r+|v_1|+3r+3|u_1|+4r)\ \|(u_2,v_2)-(u_3,v_3)\|_\infty$$
$$(1+r+|v_1|+3r+3|u_1|) \ \|(u_2,v_2)-(u_3,v_3)\|$$
$$\leq (1+8r+|v_1|+3|u_1|)\ \|(u_2,v_2)-(u_3,v_3)\|$$

Alors $f_{|\mathbb{R}\times B((u_1,v_1),r)}$ est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

donc f est localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a unicité des solutions de (E_1)

suite de l'exercice

5) $U(t) = R(t,0)\,U(0) + \int_0^t R(t,s)\,B(s)\,ds$

on a : $R(t,0)\,U(0) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & -2t+\frac{1}{2}t^2 & t-\frac{1}{2}t^2 \\ t-\frac{t^2}{2} & 1+t-\frac{t^2}{2} & \frac{1}{2}t^2 \\ -t & -t & 1+t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$R(t,0)\,U(0) = e^{2t}\left(2t-\frac{t^2}{2},\ -1-t+\frac{t^2}{2},\ t\right)$

$$R(t,s)\,B(s) = e^{2(t-s)}\begin{pmatrix} 1 & -2(t-s)+\frac{(t-s)^2}{2} & (t-s)-\frac{1}{2}(t-s)^2 \\ t-s-\frac{(t-s)^2}{2} & 1+(t-s)-\frac{(t-s)^2}{2} & \frac{(t-s)^2}{2} \\ -t+s & -t+s & 1+t-s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -s^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(t,s)\,B(s) = -s^2 e^{2(t+s)}\left(-2(t-s)+\frac{(t-s)^2}{2},\ 1+(t-s)-\frac{(t-s)^2}{2},\ -t+s\right)$$

$$x(t) = e^{2t}\left(2t-\frac{1}{2}t^2\right) + \int_0^t -s^2 e^{2(t-s)}\left(-2(t-s)-\frac{(t-s)^2}{2}\right)ds$$

$$y(t) = e^{2t}\left(-1-t+\frac{t^2}{2}\right) + \int_0^t -s^2 e^{2(t-s)}\left(1+(t-s)-\frac{(t-s)^2}{2}\right)ds$$

$$z(t) = te^{2t} + \int_0^t -s^2 e^{2(t-s)}(-t+s)\,ds.$$

une autre étape est de calculer chaque intégrale pour terminer la question.

Fiche de cours : CALCUL DIFFERENTIEL ET DERIVEE PARTIELLES.

Ceci n'est pas un cours mais un résumé des notions importantes. Pour alléger les écritures, on considérera toujours f une fonction définie sur U, un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, a est un vecteur de U, $U_0 = \{h \in U \; tq \; (a+h) \in U\}$.

$$f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \text{ telle que : } f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ \dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{pmatrix}$$

1 – Dérivées partielles.

f admet une dérivée partielle première (dp_1) en $a \in \mathbb{R}^p$ par rapport à x_j, si la limite suivante existe :

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_j - h, \dots, a_p) - f(a_1, a_2, \dots, a_p)}{h}}$$

Si elle existe, on note cette limite $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}$.

- Si $x \in \mathbb{R}^p$ $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ alors $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)\right)}$
- *Remarque importante* :
  Si f est une fonction de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, alors la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est aussi une **fonction de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$** .
  Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(M) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ correspond à la fonction dérivée partielle première de f, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable x_j, au point $M(x_1, x_2, \dots, x_p)$
- **Propriétés.**
  - . On dit que : $\boxed{f \text{ est } C^1(U), \text{si } f \text{ admet des } dp_1 \text{ continues sur } U}$.
  - **DL₁(a)** : Si f est $C^1(U)$ alors il existe une fonction ε avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et telle que :

$$\boxed{\forall\, h \in U_0, \quad f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \|h\|\, \varepsilon(h)}$$

  - $\boxed{Si\ f\ est\ C^1(U)\ \ alors\ f\ est\ continue\ sur\ U}$.

2 – Dérivées secondes.

Soit f qui admet une $dp_1 \frac{\partial f}{\partial x_i}$ sur U.

Si cette fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet en a une dp_1, $\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$, on la note : $f''_{x_j x_i}(a)$, ou $D^2_{ji}(a)$ ou : $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)}$

- **Théorème de Schwarz** SCHWARZ Hermann Amandus (1843-1921), Allemagne

$$\boxed{\text{Si sur U, les } dp_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} \text{ existent et sont continues, alors elles sont égales.}}$$

- On dit que $\boxed{f \text{ est } C^2(U) \text{ si ses } p^2, \text{dérivées partielles secondes } (dp_2), \text{existent et sont continues}}$.
- $\boxed{Si\ f\ est\ C^2(U) \Rightarrow f\ est\ C^1(U)}$ (et donc f est continue).

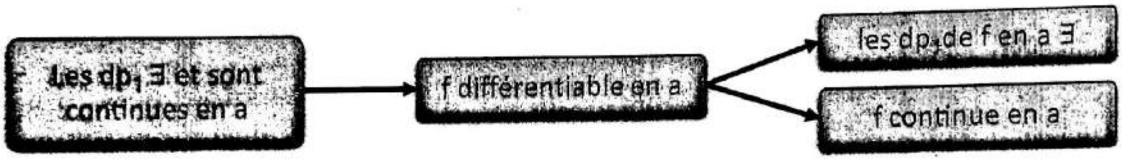
3 – Différentielles.

f est différentiable en a si $\left\{\begin{array}{c} \exists \text{ 1 appli. linéaire notée } d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \\ \exists \text{ fonction } \varepsilon \text{ telle que } \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \end{array}\right\}$ telle que :

$$\boxed{\forall h \in U_0, \qquad f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\|\, \varepsilon(h)}$$

- **Propriétés.**
  - $d_a f$ est unique.
  - Si f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $d_a f(h) = f'(a).h$.
  - $\boxed{f \text{ } différentiable \text{ } en \text{ } a \Rightarrow f \text{ } est \text{ } continue \text{ } en \text{ } a \text{ } (réciproque \text{ } fausse)}$.
  - $\boxed{f \text{ } différentiable \text{ } en \text{ } a \Rightarrow f \text{ } admet \text{ } de \text{ } dp_1 \text{ } en \text{ } a \text{ } (réciproque \text{ } fausse)}$.
  - f différentiable en a $\Rightarrow$ $\boxed{d_a f(h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j = \langle \overrightarrow{grad} \; f(a) \mid h \rangle}$ et $\boxed{d_a f(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}$
  - $\boxed{f \text{ } est \text{ } C^1(U) \Rightarrow f \text{ } est \text{ } différentiable \text{ } en \text{ } a \text{ } de \text{ } U \text{ } (réciproque \text{ } fausse)}$.
  - f est $C^1(U) \Leftrightarrow$ l'application $a \to d_a f$ est continue.
    (Avant on nommait *fonction continûment différentiable* une fonction C^1)

Bilan



4-Différentielles de fonctions C^1.

- **f est $C^1(U) \Rightarrow$**

$$\boxed{d_a f(h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).h_j = \langle \overrightarrow{grad} \; f(a) \mid h \rangle}$$

- $\boxed{\textit{f linéaire de } \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \Rightarrow f \text{ } est \text{ } C^1 \text{ } et \text{ } d_a f = f}$

- On note p_j la projection définie par : $p_j(h) = h_j$ (application linéaire), alors :
  $d_a p_j = p_j = dx_j$ (notation car indépendant de a),

$$\boxed{d_a f = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).dx_j}$$

- **Jacobien.**

$$\boxed{\mathcal{J}_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}}$$

$\mathcal{J}_f(a) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, est la **Matrice jacobienne** de f en a. **Le jacobien** de f en *a* est le déterminant de cette matrice.

- **Composition d'applications C^1.**

$$\mathbb{R}^q \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$$ Si f, g C^1, alors gof est C^1, et

$$\boxed{d_a\,(gof) = \left(d_{f(a)}\,g\,\right)o(d_a\,f)}$$

$$\boxed{\mathcal{J}_{gof}\,(a) = \mathcal{J}_g\big(f(a)\big).\mathcal{J}_f(a)}$$

$$\boxed{\frac{\partial (gof)_i}{\partial x_j}\,(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(a))\,.\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q \end{cases}}$$

6– Compléments.

- Taylor Young ordre 2 — U ouvert de $\mathbb{R}^p$, si f est $C^2(U)$,

$$\boxed{f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(a)\,.h_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\,(a)\,.h_i^2 \;+ \sum_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\;\partial x_j}\,(a)\,.\,h_i h_j + o\,(\|h\|^2)}$$

VARIABLE COMPLEXE

4 NOTION D'HOLOMORPHIE (1)

4.1. 1) En utilisant la définition, étudier la dérivabilité de $z \mapsto \frac{1}{z}$.

2) On pose $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$

Préciser le domaine d'holomorphie de cot.

3) Supposons que $P(z) = (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_k)$ où $z_1, z_2, \dots, z_k$ sont des éléments donnés de $\mathbb{C}$.

a) Montrer que, pour tout élément z de $\mathbb{C}\setminus\{z_1, z_2, \dots, z_k\}$

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \cdots + \frac{1}{z-z_k}$$

b) Supposons que : pour tout élément j de $\{1, 2, \dots, k\}$, $\mathrm{Re}\, z_j < 0$.

Montrer que pour tout nombre complexe z vérifiant $\mathrm{Re}\, z \geq 0$, nous avons :

$\forall j \in \{1, 2, \dots, k\}$ $\mathrm{Re}(z-z_j)^{-1} > 0$ et donc $P'(z) \neq 0$

4.2 G et Ω sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{C}$, f et h des fonctions complexes définies sur G avec $f(G) \subset \Omega$, g une application de Ω dans $\mathbb{C}$. On suppose que :

$$\begin{cases} g \text{ et } h \text{ sont holomorphes} \\ \forall w \in \Omega \quad g'(w) \neq 0 \text{ et } h \text{ injective} \\ f \text{ est continue et } h(z) = g(f(z)) \text{ pour tout élément } z \text{ de } G \end{cases}$$

. Montrer que f est holomorphe et donner une formule pour $f'(z)$

4.3 Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ tel que :

$\forall z \in \mathbb{C} \quad z \in \Omega \Rightarrow \bar{z} \in \Omega$

f est une application de Ω dans $\mathbb{C}$. Montrer que $z \mapsto g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe sur Ω si et seulement si f l'est.

4.4 1) Trouver l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ où f est dérivable dans chacun des cas suivants :

a) $f(x+iy) = x^3 - i(1-y)^3$ b) $f(x+iy) = x^4y^5 + i\,xy^3$ c) $f(x+iy) = y^2 \sin x + iy$

d) $f(x+iy) = \sin^2(x+y) + i\cos^2(x+y)$ e) $f(x+iy) = e^x\cos y - 2xy + i(e^x \sin y + x^2 - y^2)$

f) $f(x+iy) = -6(\cos x + i\sin y) + (2-2i)y^3 + 15(y^2+2y)$

2) déterminer les conditions sur les constantes réelles a, b, c, d qui rendent la fonction $x+iy \mapsto f(x+iy) = ax+by+i(cx+dy)$ entière

3) f est une fonction entière vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x+iy) = e^x f(iy)$ et $f(0) = 1$.

Posons, pour tout réel y, $\mathrm{Re}\, f(iy) = c(y)$ et $\mathrm{Im}\, f(iy) = s(y)$.

a) En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que :

$\forall y \in \mathbb{R}$ $c'(y) = -s(y)$ et $s'(y) = c(y)$

b) Montrer que $y \mapsto g(y) = [c(y) - \cos y]^2 + [s(y) - \sin y]^2$ vérifie : $\forall y \in \mathbb{R}$ $g'(y) = 0$

En déduire que : $\forall y \in \mathbb{R}$ $g(y) = 0$. En tirer les conséquences.

4.5 1) P est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $P(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$.
Trouver, si possible, une fonction $(x,y) \mapsto Q(x,y)$ telle que $x+iy \mapsto P(x,y) + iQ(x,y)$ soit entière.

2) P est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, où a, b et c sont des constantes réelles.

a) Montrer que P est harmonique si et seulement si $a = -c$.

b) Supposons que P est harmonique. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad P(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$$
où f est de la forme $z \mapsto Az^2$ avec A une constante complexe dont on déterminera l'expression en fonction de a, b et c.

4.6 f est une fonction holomorphe dans un ouvert U de $\mathbb{C}$. Posons :
$\forall x+iy \in U \quad P(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ et $Q(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$

1) Montrer que, pour tout élément $x+iy$ de U,

a) $f'(x+iy) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$

b) $|f'(x+iy)|^2 = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)^2 + \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)^2 = \frac{\partial P}{\partial}(x,y)^2 + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)^2 = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)^2 + \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)^2 + \frac{\partial Q}{\partial y}$

2) Supposons que : $U = \mathbb{C}$ et $\operatorname{Re}(z) \operatorname{Im} f(z) = 1$ pour tout nombre complexe z.
Montrer que f est constante sur $\mathbb{C}$.

3) Supposons que U est connexe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

a) f est constante sur U

b) P est constante sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+iy \in U\}$

c) Q est constante sur D

d) $\bar{f}$ est holomorphe sur U

e) $\forall z \in U \ [f(z) = 0$ ou $f'(z) = 0]$

f) $|f|$ est constante sur U

g) il existe des constantes réelles a, b et c non toutes nulles, vérifiant
$\forall z \in U \quad a \operatorname{Re} f(z) + b \operatorname{Im} f(z) + c = 0$

h) il existe une fonction φ strictement monotone et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, vérifiant
$\forall z \in U \quad \operatorname{Re} f(z) = \varphi(\operatorname{Im} f(z))$

Exercice 8.1

1) $f(x+iy) = x^2+y+ixy$

Dans chacun des cas suivants, calculer $L(\gamma)$, $\int_\gamma f(z)dz$ et préciser γ^*

a) $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $\gamma(t) = t+it^2$

b) $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $\gamma(t) = t+it$

c) $\gamma : [0,2] \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $\gamma(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0\le t\le 1 \\ 1+i(t-1) & \text{si } 1\le t\le 2 \end{cases}$

2) Calculer $J_1 = \int_\gamma x\,dz$ et $J_2 = \int_\gamma y\,dz$ le long des chemins suivants

a) $[0, 2+i]$

b) le demi-cercle $\{|x+iy| = R,\ y\ge 0\}$ parcouru une fois dans le sens direct

3) On considère le demi-cercle C de diamètre $[-3,3] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ parcouru une fois dans le sens direct. Calculer $\int_C e^z dz$ et comparer sa valeur à celle de $\int_{-3}^{3} e^x dx$.

4) C désigne le cercle unité parcouru dans le sens direct (une fois). Calculer $\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$, $n \in \mathbb{N}$

En déduire la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t\,dt$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n} t\,dt$

Obtenir aussi $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n+1} t\,dt$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n+1} t\,dt$

Exercice 8.2

1) Calculer $\int_\gamma \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz$ sachant que γ est un chemin joignant 0 à $\pi+2i$

2) γ est le cercle centré en 2 et de rayon 1 (parcouru une fois dans le sens direct). Calculer $\int_\gamma \frac{z+1}{z} dz$

3) On fixe a dans $]0,1[$ et r dans $]0, 1-a[$. Soient

$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto a+re^{it}$ et $g : \mathbb{C}\setminus\{-1,1\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto 2\frac{z-a}{z^2-1}$ et $\Gamma = g\circ\gamma$

a) Montrer que Γ est un lacet situé dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

b) Calculer $\int_\Gamma \frac{dz}{z}$

Exercice 9.1 Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de primitive dans les domaines indiqués entre parenthèses

1) $\frac{1}{z}$ $(0<|z|<+\infty)$ 2) $\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-1}$ $(0<|z|<1)$

3) $\frac{z}{1+z^2}$ $(1<|z|<+\infty)$ 4) $\frac{1}{z(1-z^2)}$ $(0<|z|<1)$

Exercice 9.2 1) f est une fonction holomorphe dans la bande $\Delta=\{z\in\mathbb{C} : |\operatorname{Im} z|<a\}$ où a est un nombre réel strictement positif donné. En plus $\lim\limits_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\Delta}} f(z)=0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge. Montrer que, pour tout élément α de $]-a, a[$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+i\alpha)dx$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+i\alpha)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

2) On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx$ pour $-\infty<\alpha<+\infty$

Exercice 9.3 A l'aide de la formule intégrale de Cauchy calculer $\int_{\gamma^*} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz$ ($\gamma(t)$ parcours γ^* une fois dans le sens direct) dans les cas suivants

1) $\int_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+i}$ 2) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$ 3) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}dz$ 4) $\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz$

5) $\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3}$ 6) $\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$ 7) $\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$ $(|a|<r<|b|,\ n\in\mathbb{N}^*)$

Exercice 9.4 f est une fonction entière.

1) Il existe (r, M, m) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$ tel que: $\forall z\in\mathbb{C}$ $|z|\geq r \Rightarrow |f(z)|\leq M|z|^m$.

a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $n>m \Rightarrow f^{(n)}(0)=0$

b) En déduire que f est un polynôme de degré $\leq m$

2) Il existe une fonction réelle g telle que : $\lim\limits_{r\to+\infty} g(r)=0$ et $[\forall z\in\mathbb{C}$ $|f(z)|\leq |z|\,g(|z|)]$

Montrer que f est constante.

3) Il existe un réel M tel que: $\forall z\in\mathbb{C}$ $\operatorname{Re} f(z)\leq M$.

En appliquant le théorème de Liouville à la fonction $z\mapsto \exp[f(z)]$, montrer que f est constante

Université Félix Houphouét Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année: 2015-2016

U.E.: Variable Complexe
Durée: 2h30

Exercice 1 f est une fonction entière vérifiant:
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+iy) = e^x f(iy)$ et $f(0) = 1$
Posons, pour tout réel y, $R_e f(iy) = c(y)$ et $Im f(iy) = s(y)$

1. En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que:
   $\forall y \in \mathbb{R}, c'(y) = -s(y)$ et $s'(y) = c(y)$
2. Montrer que $y \mapsto g(y) = (c(y) - cos y)^2 + (s(y) - sin(y))^2$ vérifie:
   $\forall y \in \mathbb{R}, g'(y) = 0$.
   En déduire que: $\forall y \in \mathbb{R}, g(y) = 0, c(y) = cos y$ et $s(y) = sin y$

Exercice 2 Evaluer $\int_\gamma \overline{z} dz$ dans les cas suivants;

1. $\gamma : t \mapsto t^2 + it$ definie sur $[a,b]$ tels que $\gamma(a) = 0$ et $\gamma(b) = 4+2i$
2. γ^* est la ligne brisée formée des segments de droite joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4+2i$.

Exercice 3

1. Soit $r \in [1, +\infty]$
   γ_r est le lacet de support
   $$\gamma_r^* = [-r, r] \cup \{z \in \mathbb{C} / |z| = r; Im z > 0\}$$
   parcouru une fois dans le sens direct. Montrer que;
   (a) $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{e}$
   (b)
   b1. $\int_{[-r,r]} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \int_{-r}^{r} \frac{cos t}{1+t^2} dt$
   b2. $\forall z \in \mathbb{C}, [|z| = r; Im z \geq 0] \Rightarrow |1+z^2| \geq r^2 - 1$ et $|e^{iz}| \leq 1$.
   b3. Si δ_r est le chemin de support $\delta_r^* = \{z \in \mathbb{C} / |z| = r; Im z > 0\}$ parcouru une fois dans le sens direct alors $|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz| \leq \pi \frac{r}{r^2-1}$
2. Justifer la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos t}{1+t^2} dt$ et montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{e}$

1

Université Félix Houphouet-Boigny
UFR Maths-Info
Année: 2015-2016

U.E.: Variable Complexe
Licence 3
Deuxieme Session
Durée: 2h

Exercise 1

1. Ω est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ tel que: $\forall z \in \Omega, \overline{z} \in \Omega$.
   f est une application de Ω dans $\mathbb{C}$. Montrer que $z \mapsto g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe sur Ω si et seulement si f l'est.

2. f est une fonction entière vérifiant: $\forall z \in \mathbb{C}, Ref(z)Imf(z) = 1$. Montrer que f est constante.

Exercice 2

1. On note C le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct. f est une fonction holomorphe dans un ouvert U contenant le disque fermé $\overline{D(O,1)} = \{z \in \mathbb{C}/|z| \leq 1\}$.
   (a)- Exprimer en fonction de $f(0)$ et $f'(0)$, $I = \int_C (2 + z + \frac{1}{z})\frac{f(z)}{z}dz$
   (b)- En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(e^{it})cos^2(\frac{t}{2})dt$.

2. Déterminer la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+3)}$ où $\gamma = \{z \in \mathbb{C}/|z-1| = 1\}$ parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice 3 En intégrant la fonction $z \mapsto e^{iz^2}$ sur la frontière du secteur $\Sigma = \{z \in \mathbb{C}/0 \leq |z| \leq R; 0 \leq Argz \leq \frac{\pi}{4}\}$ parcouru une fois dans le sens direct, montrer que

$$\int_0^{+\infty} cos(x^2)dx = \int_0^{+\infty} sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

On admettra que: $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{iz^2}dz = 0$ où γ_R est la fonction définie de $[0, \frac{\pi}{4}]$ dans $\mathbb{C}$ par: $\theta \mapsto Re^{i\theta}$.

1

TD Variable complexe Prof Feuto Justin

24/10/16

Determiner les nombres complexes qui verifient

$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = 1$

$\cos x = \cos\theta \Rightarrow \theta + 2k\pi, -\theta + 2k\pi$

$\sin x = \sin\theta \quad \theta + 2k\pi, \pi + \theta$

Exercice 1

En utilisant la definition de la derivée, étudier la derivabilité de la fonction $u : z \mapsto \frac{1}{z}$

Solution. la fonction u est continue. $\forall t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ et $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $0 < |t| < |z|$, on a: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{u(z+t)-u(z)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{1}{z+t}-\frac{1}{z}}{t}$

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(z+t)-u(z)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{z-(z+t)}{z(z+t)}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{-t}{z(z+t)}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-1}{z(z+t)} = -\frac{1}{z}$$

donc u est derivable sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et sa derivée est $u'(z) = -\frac{1}{z^2}$

u est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Exercice 2

On pose $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$

Preciser le domaine de l'holomorphie de cotz la ~~fonction~~ solution $z \mapsto \cos z$ est dérivable sur $\mathbb{C}$, de même, la fonction $z \mapsto \sin z$ est entière.

de plus $\cos' z = -\sin z$ et $\sin' z = \cos z$

on a : $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$$

$$\Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0$$

$$\Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Rightarrow e^{2iz} = 1$$

Posons $z = x + iy$ $\quad e^{2i(x+iy)} = e^{2ix} \cdot e^{-2y} = 1 \; (*)$

$$(\cos 2x + i\sin 2x) \cdot e^{-2y} = 1$$

$$\cos 2x + i\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \\ \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

donc $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

donc le domaine d'holomorphie est $\mathbb{C} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$(*) \Rightarrow |e^{2xi} \cdot e^{-2y}| = 1 \Rightarrow e^{-2y} = 1 \Rightarrow y = 0$$

calculons sa dérivée

f étant holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{k\pi\}$

on a : $f'(z) = \dfrac{-\sin^2 z - \cos^2 z}{\sin^2 z} = \dfrac{-(\sin^2 z + \cos^2 z)}{\sin^2 z}$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4}$$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

$$f'(z) = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

$\Omega \in \mathbb{C}$ ouvert tq $\forall z \in \Omega$, $\bar{z} \in \Omega$

$f : \Omega \to \mathbb{C}$, Montrer que $z \mapsto g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe sur Ω ssi f l'est

solution : soit ~~supposons que~~ $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ~~est~~ holomorphe sur Ω.

Posons $z = x+iy$, $\operatorname{Re} f(z) = P(x,y)$ et $\operatorname{Im} f(z) = Q(x,y)$

i.e $f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$

on a : $g(z) = \overline{f(x-iy)} = \overline{P(x,-y) + iQ(x,-y)}$

$= P(x,-y) - iQ(x,-y)$

Rappel : f est holomorphe sur Ω ssi P et Q sont differentiable en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $x+iy \in \Omega$ et verifiant les conditions de

i.e $\begin{cases} \operatorname{Re} g(z) = P(x,-y) \\ \operatorname{Im} g(z) = -Q(x,-y) \end{cases}$

Si f est holomorphe sur Ω alors P et Q admetten des derivées partielles en tout point (x,y) tel que $x+iy \in$ et verifient les conditions de cauchy-Riemann.

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \quad \text{et } \forall z = x+iy \in \Omega,$$

$$f'(x+iy) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Soient $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ les parties imaginaires de g respectivement.

Par definition $\tilde{P}(x,y) = P(x,-y)$ et $\tilde{Q}(x,y) = -Q(x,-y)$

Puisque P et Q admettent des derivées partielles en tout point (x,y) tel que $x+iy \in \Omega$, $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ admettent aussi des derivées partielle en (x,y)

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}P(x,-y) \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}P(x,-y) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}Q(x,-y) \\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}Q(x,-y) \end{cases}$$

or P et Q verifient les conditions de cauchy - Riemann , donc : $\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,-y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y}(x,y)$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,-y) = -\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x,y)$$

conclusion ; $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ verifient les conditions de cauchy-Riemann.

Donc g est holomorphe sur Ω.

Trouver l'ensemble des points de $\mathbb{C}$ où f est derivable dans les cas suivants ;

a) $f(x+iy) = x^3 - i(1-y)^3$

b) $f(x+iy) = x^4y^5 + ixy^3$

c) $f(x+iy) = y^2 \sin x + iy$

d) $f(x+iy) = \sin^2(x+y) + i\cos^2(x+y)$

~~e) f(x+iy)7~~

Solution

a) $f(x+iy) = x^3 - i(1-y)^3$

$P(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) = x^3$

$Q(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) = -(1-y)^3$

P et Q sont des polynômes dans $\mathbb{R}^2$ donc admettent des dérivées partielles en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

On a: $\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 3x^2 \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0 \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 3(1-y)^2$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases}$

$\Rightarrow 3x^2 = 3(1-y)^2 \rightarrow x^2 = (1-y)^2 \Rightarrow x = 1-y$ ou $x = -(1-y)$

Donc f est dérivable du point $z = x+iy$ lorsque

$x = 1-y$ ou $x = y-1$

L'ensemble de dérivabilité de f est $H = \{1-y+iy \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{y-1+iy \mid y \in \mathbb{R}\}$

4.6

4.5

8.1

Exercice 4.5

P est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $P(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

Trouvons si possible, une fonction $(x,y) \mapsto Q(x,y)$ telle que

$x+iy \mapsto P(x,y) + iQ(x,y)$ soit entière

P est une fonction polynôme de classe C^∞. En particulier de classe de C^2. Donc P admet des dérivées partielles d'ordre 2.

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}(x,y) = 2 - 3x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = -6x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 6xy$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 6x$$

$$\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Donc P est harmonique par conséquent il existe une fonction réelle Q telle que

$f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$ soit entière

* Déterminons $Q(x,y)$

f est entière, d'après la règle de Cauchy-Riemann on a : $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}Q(x,y) = 2 - 3x^2 + 3y^2 & (1) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 6xy & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow Q(x,y) = 2y - 3x^2y + y^3 + C(x)$

$(2) \Rightarrow C'(x) - 6xy = -6xy$

$C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = c$

$Q(x,y) = 2y - 3x^2y + y^3 + c$, avec $c \in \mathbb{R}$

Pour $c = 0$

$Q_0(x,y) = 2y - 3x^2y + y^3$ est telle que

$f(x,y) = P(x,y) + iQ_0(x,y)$ est une fonction entière

2/ $P(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

a) montrons que P est harmonique ssi $a = -c$

P harmonique $\Leftrightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0$

$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = 2ax + by \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = 2a$

$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = bx + 2cy \Rightarrow \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 2c$

Ainsi P est harmonique $\Leftrightarrow a + c = 0 \Rightarrow a = -c$

b) supposons P harmonique et montrons que

$P(x,y) = \mathrm{Re} f(x+iy)$ avec $f(x+iy) = Az^2$, $A \in \mathbb{C}$

$z = x+iy$, $A = \alpha + i\beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

P étant harmonique, il existe une fonction réelle $Q_0(x,y)$ telle que $f(x+iy) = P(x,y) + iQ_0(x,y)$ soit entière.

D'après la règle de cauchy-Riemann on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 2ax + by & (1) \\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = bx + 2cy & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow Q(x,y) = 2axy + \frac{1}{2}by^2 + C(x)$

$(2) \Leftrightarrow C'(x) + 2ay = -bx + 2ay$ avec $a = -c$

$\Rightarrow C'(x) = -bx$

$C(x) = -\frac{1}{2}bx^2 + k$

$Q(x,y) = 2axy + \frac{1}{2}by^2 - \frac{1}{2}bx^2 + k, \; k \in \mathbb{R}$

$f(x,y) = a(x^2 - y^2) + bxy + i\left(2axy + \frac{1}{2}by^2 - \frac{1}{2}bx^2 + k\right)$

est une fonction holomorphe telle que $P(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= (\alpha + i\beta)(x+iy)^2 \\ &= (\alpha + i\beta)(x^2 - y^2 + 2ixy) \\ &= \alpha(x^2 - y^2) + 2\alpha ixy - 2\beta xy \\ &= \left(\alpha(x^2-y^2) - 2\beta xy\right) + i\left(2\alpha xy + \beta(x^2 - y^2)\right) \end{aligned}$$

Par ~~définition~~ identification on a : $\begin{cases} \alpha(x^2-y^2) - 2\beta xy = a(x^2-y^2) \\ 2\alpha xy + \beta(x^2-y^2) = 2axy - \frac{1}{2}b(x^2-y^2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = a \\ \beta = -\frac{1}{2}b \\ k = 0 \end{cases}$$

Ainsi on trouve $A = a - \frac{1}{2}bi$

Donc $f(z) = \left(a - \frac{1}{2}bi\right)z^2$ est une fonction holomorphe telle que $P(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$

Exercice 4.6

Soit f holomorphe sur U ouvert de $\mathbb{C}$

$\forall x+iy \in U$, $P(x,y) = \mathrm{Re} f(x+iy)$

$Q(x,y) = \mathrm{Im} f(x+iy)$

2) Supposons $U = \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(z) \, \mathrm{Im} f(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Montrons que f est constante sur $\mathbb{C}$.

Soit $f : x+iy \longmapsto f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y)$

telle que $P(x,y) \cdot Q(x,y) = 1$

f est entière donc elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) & (a) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) & (b) \end{cases}$$

et $f'(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$

on a : $P(x,y)Q(x,y) = 1 \implies Q(x,y) = \frac{1}{P(x,y)}$

D'où
$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)}{P(x,y)^2} & (c) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)}{P(x,y)^2} & (d) \end{cases}$$

$$* \ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \overset{(c)}{=} -\frac{1}{P(x,y)^2}\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)$$

$$\overset{(a)}{=} -\frac{1}{P(x,y)^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\right) = -\frac{1}{P(x,y)}\left(-\frac{1}{P(x,y)^2}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)$$

$$= \frac{1}{P(x,y)^4}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$\implies \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{P(x,y)^4}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\left(1 + \frac{1}{P(x,y)^4}\right) = 0$$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$ car $1 + \frac{1}{P(x,y)^4} > 0$

$* \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \overset{(d)}{=} -\frac{1}{P(x,y)^2}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \overset{(a)}{=} \frac{1}{P(x,y)^2}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)$

$= \frac{1}{P(x,y)^2}\left(-\frac{1}{P(x,y)^2}\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{1}{P(x,y)^4}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x\right.$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{P(x,y)^4}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\left(1 + \frac{1}{P(x,y)^4}\right) = 0$ Donc $\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0$

Ainsi on a : $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0 \Rightarrow Q(x,y) = S(y)$

$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = S'(y) = 0 \Rightarrow S(y) = k$, $k \in \mathbb{R}^*$ i.e

$Q(x,y) = k$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{R}^*$

or $P(x,y)\,Q(x,y) = 1 \Rightarrow P(x,y) = \frac{1}{Q(x,y)}$

Donc $P(x,y) = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{R}^*$

Par conséquent $f(x+iy) = \frac{1}{k} + ik$, $x+iy \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$

d'où $f : z \mapsto \frac{1}{k} + ik$, $k \in \mathbb{R}^*$ constante

Exercice 8.1

1/ $f(x+iy) = x^2+y+ixy$

Dans chacun des cas suivants calculer $L(\gamma)$, $\int_\gamma f(z)\,dz$ et preciser γ^*

a) $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto \gamma(t) = t+it^2$

$L(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt$

on a: $\gamma'(t) = 1+2it \Rightarrow |\gamma'(t)| = \sqrt{1+4t^2}$

$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt$

Posons $x = \sqrt{1+4t^2} - 2t$

$x+2t = \sqrt{1+4t^2}$

$(x+2t)^2 = 1+4t^2$

$x^2+4t^2+4xt = 1+4t^2$

$x^2+4xt = 1$

$4t = \frac{1}{x} - x$

$t = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - x\right)$

$dt = \left(-\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4}\right)dx$

$x = \sqrt{1+4t^2} - 2t$

$t=0 \Rightarrow x = 1$

$t=1 \Rightarrow x = \sqrt{5}-2$

$$\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\,dt = \int_1^{\sqrt{5}-2} \left(x+\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}\right)\left(-\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{4}\right)dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{5}-2} -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx$$

$$-\frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{5}-2}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x^3}\right)dx = -\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{4}+\ln(x)+\frac{1}{-4x^2}\right]_1^{\sqrt{5}-2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\frac{(\sqrt{5}-2)^2}{4}+\ln(\sqrt{5}-2)-\frac{1}{4(\sqrt{5}-2)^2}\right)$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$f(x+iy) = x^2+y+ixy$$

$$f(\gamma(t)) = f(t+it^2) = t^2+t^2+it^3 = 2t^2+it^3$$

$$\gamma'(t) = 1+2it$$

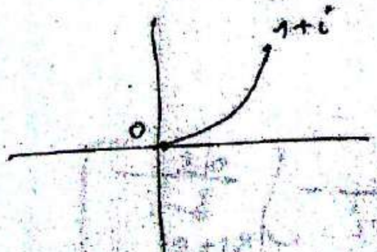
$$f(\gamma(t))\gamma'(t) = (2t^2+it^3)(1+2it)$$
$$= 2t^2+it^3+4it^3-2t^4$$

$$\int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (2t^2+it^3+4it^3-2t^4)\,dt$$
$$= \left[2\frac{t^3}{3}+i\frac{t^4}{4}+it^4-2\frac{t^5}{5}\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{3}+i\frac{1}{4}+i-\frac{2}{5} = \frac{4}{15}+i\frac{5}{4}$$

$\gamma^* = \gamma([0,1])$ $\quad \gamma(0)=0 \quad \gamma(1)=1+i$

$\cancel{\gamma^* = [0,1+i]}$ $\quad \gamma(t) = (t,t^2) \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases} \Rightarrow y=x^2$

γ^* est la parabole d'équation : $y=x^2$ sur $[0,1]$



Exercice 9.3

1) $\displaystyle\int_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+i} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z-(-i)} dz$

$f(z) = \sin z$ holomorphe sur $\mathbb{C}$

$\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto -i + 3e^{it}$

$\forall z \in D(-i, 3)$, $f(z) = \displaystyle\frac{1}{2\pi i} \int_{|z+i|=3} \frac{f(u)}{u-z} du = 2\pi i f(-i)$

6) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz = 2\pi i \frac{2!}{2!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^{2+1}} dz$

$= \cancel{\cos} - \pi i \cos(i)$ utilisation du corollaire

2) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$ $\quad z \longmapsto \frac{1}{z^2+1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$

On a : $\displaystyle\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$

Posons $P(z) = \displaystyle\frac{a}{z-i} + \frac{b}{z+i} = \frac{1}{z^2+1}$

$\displaystyle\lim_{z \to i} (z-i) P(z) = a = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$

$\displaystyle\lim_{z \to -i} (z+i) P(z) = b = \frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$

Donc $\displaystyle\frac{1}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\right)$

où $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left[\int_{|z|=2} \frac{dz}{z+i} - \int_{|z|=2} \frac{dz}{z-i}\right]$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z+i} = 2i\pi$, $f(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$

f est holomorphe dans $\mathbb{C}$

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z+i} = 2i\pi \times \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z-(-i)}\, dz$$

$$= 2i\pi \times f(-i) = 2i\pi \times 1 = 2i\pi$$

De même : $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-i} = 2i\pi \times \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=2} \frac{f(z)}{z-i}\, dz$

$$= 2i\pi f(i) = 2i\pi$$

Par conséquent $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{i}{2}\left[2i\pi - 2i\pi\right] = 0$

3) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\, dz$

Posons $f(z) = e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

on a : $\displaystyle\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z+1} = \frac{a(z+1)+b(z-1)}{(z-1)(z+1)}$$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{(a+b)z + a-b}{(z-1)(z+1)}$$

Par identification on a : $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases}$

$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

$b = -\frac{1}{2}$

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\, dz = \frac{1}{2}\left[\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\, dz - \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z+1}\, dz\right]$$

on a : $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\, dz = 2\pi i \times \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\, dz$

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\, dz = 2\pi i e$$

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z+1}\, dz =$$

Scanned by CamScanner

4) $\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\,dz$ $\quad x \mapsto \frac{\cos z}{z^2-\pi^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{-\pi,\pi\}$

on a: $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$\qquad t \longmapsto 4e^{it}$

Posons $f(z) = \cos z$ homorphe sur $\mathbb{C}$

on a: $\frac{1}{z^2-\pi^2} = \frac{1}{z+\pi} \cdot \frac{1}{z-\pi}$

Posons $P(z) = \frac{a}{z-\pi} + \frac{b}{z+\pi} = \frac{1}{z^2-\pi^2}$

$\lim_{z \to \pi} (z-\pi)P(z) = a = \frac{1}{2\pi}$

$\lim_{z \to \pi} (z+\pi)P(z) = b = -\frac{1}{2\pi}$

Donc $\frac{1}{z^2-\pi^2} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{z-\pi} - \frac{1}{z+\pi}\right]$

D'où $\int_{|z|=4} \cos z \frac{dz}{z^2-\pi^2} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{|z|=4}\frac{\cos z}{z-\pi} - \int_{|z|=4}\frac{\cos z}{z+\pi}\right]$

* $\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z-\pi} dz$

D'après la formule intégrale de cauchy

$\forall u \in D(0,4)$, $f(u) = \cos(u) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z-u} dz$

Pour $u=\pi$ on a : $\cos(\pi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z-\pi} dz$

Alors $\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz = \frac{1}{2\pi} \left[-2\pi i - (-2\pi i)\right] = 0$

Donc $\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz = 0$

5/ $\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3}$

on a : $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$

$t \longmapsto -1 + e^{it}$

on remarque que $1 \notin D(1,-1)$

considerons $f : z \longmapsto \frac{1}{(z-1)^3}$

f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et

$\bar{D}(-1,1) \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$

Donc $\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3} = 2\pi i \times \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+1|=1} \frac{f(z)}{z+1} dz$

$= 2\pi i \, f(-1)$

$= \frac{2\pi i}{(-2)^3}$

$\int_{|z+1|=4} \frac{dz}{(1+z)(z-1)^3} = -\frac{\pi i}{4}$

7/ $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)} = \frac{2\pi i}{(n-1)!}$ avec $|a|<r<|b|$, $n\in\mathbb{N}^*$

on a : $|a|<r \Rightarrow a\in D(0,r)$

$r<|b| \Rightarrow b\notin D(0,r)$

Considérons $f(z)=\dfrac{1}{z-b}$

f est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et $D(0,r)\subset\mathbb{C}\setminus\{b\}$

Donc $\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{dz}{(z-a)^n(z-b)} = \int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^n}dz = \int_{|z|=2}\frac{f(z)}{(z-a)^{n-1+1}}dz$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\times\frac{2\pi i}{(n-1)!}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^{n-1+i}}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

$$\int_{|z|=r}\frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

Suite Exercice 8.1

b) $\gamma(t)=t+it \quad \forall t\in[0,1]$

$L(\gamma(t)) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt$

$\gamma'(t) = 1+i \quad \forall t\in[0,1]$, $|\gamma'(t)|=\sqrt{2}$

$\Rightarrow L(\gamma(t)) = \int_0^1 \sqrt{2}\,dt = \left[t\sqrt{2}\right]_0^1 = \sqrt{2}$

$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$

$f(\gamma(t)) = f(t+it) = t^2+t+it^2 = t^2+t+it^2$

$f(\gamma(t))\times\gamma'(t) = (t^2+t+it^2)(1+i)$

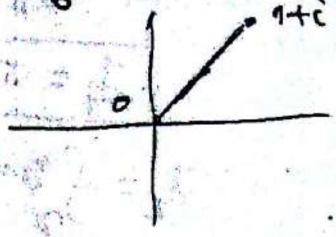
$= t^2+t+it^2+it^2-t^2$

$= t+i(2t^2+t)$

$$\int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 \left[t+i(2t^2+t)\right]dt$$
$$= \left[\frac{t^2}{2}+i\left(2\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}+i\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}+i\frac{7}{6}$$

$\gamma^* = \gamma([0,1])$ $\quad \gamma(0)=0 \quad \gamma(1)=1+i$

$\gamma(t)=(t,t) \Rightarrow \gamma^* = [0,1+i]$



c.) $\gamma : [0,2] \longrightarrow \mathbb{C}$

avec $\gamma(t) = \begin{cases} t+0i & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ 1+i(t-1) & \text{si } 1 \le t \le 2 \end{cases}$

$L(\gamma) = \int_0^2 |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt + \int_1^2 |\gamma'(t)|\,dt$

$\gamma'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t\in[0,1] \\ i & \text{si } t\in[1,2] \end{cases}$ $\quad |\gamma'(t)| = \begin{cases} 1 & \text{si } t\in[0,1] \\ 1 & \text{si } t\in[1,2] \end{cases}$

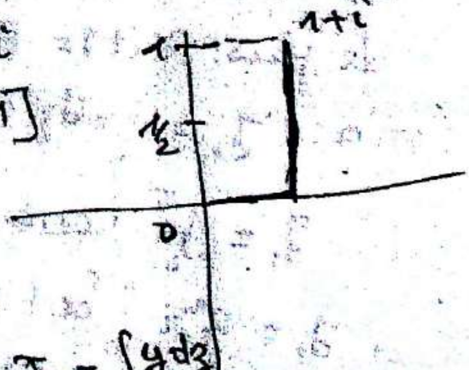
$L(\gamma) = \int_0^1 dt + \int_1^2 dt = 2$

$\gamma^* = \gamma([0,2]) = \gamma([0,1]) \cup \gamma([1,2])$

$\gamma(0)=0 \quad \gamma(1)=1 \quad \gamma(2)=1+i$

$\gamma([0,1]) = [\gamma(0),\gamma(1)] = [0,1]$

$\gamma([1,2]) = [1,1+i]$



2.) calcul de $J_1 = \int_\gamma x\,dz$ et $J_2 = \int_\gamma y\,dz$

a.) pour le segment $[0,2+i]$

$J_1 = \int_\gamma x\,dz$

Soit $f(z) = f(x+iy) = x$

Parametrage : $\gamma(t) = (2+i)t \Leftrightarrow \gamma(t) = 2t+it$

on a : $J_1 = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

$\gamma'(t) = 2+i$

$\Rightarrow J_1 = \int_0^1 2t(2+i)\,dt = 2(2+i)\int_0^1 t\,dt = 2(2+i)\times\frac{1}{2}$

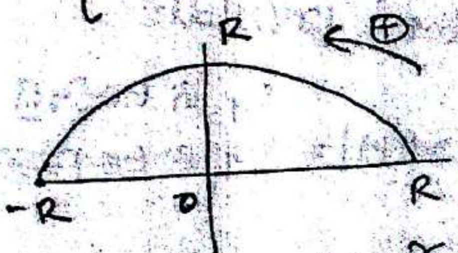
$\boxed{J_1 = 2+i}$

$J_2 = \int_\gamma y\,dz$ soit $f(x+iy) = y \Rightarrow f(\gamma(t)) = t$

$\Rightarrow J_2 = \int_0^1 t(2+i)\,dt \Rightarrow \boxed{J_2 = \frac{1}{2}(2+i)}$

$\{|x+iy| = R ; y \geq 0\}$

$|x+iy| = R \Rightarrow x^2+y^2 = R^2$



Paramétrage $\gamma : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \longmapsto Re^{it}$

$\Rightarrow \gamma(t) = Re^{it} \Rightarrow \gamma'(t) = iRe^{it}$

de plus $\gamma(t) = R\cos t + iR\sin t$

on a : $J_1 = \int_\gamma x\,dz = \int_0^\pi f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

$J_1 = \int_0^\pi (R\cos t . Rie^{it})\,dt$

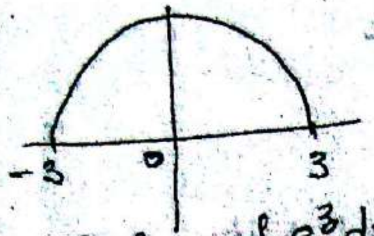
$\Rightarrow J_1 = R^2 i\int_0^\pi \cos t\, e^{it}\,dt$ et $J_2 = \int_\gamma y\,dz$ avec $f(x+iy) = y$

$\Rightarrow f(\gamma(t)) = R\sin t$

donc $J_2 = \int_0^\pi (R\sin t) \cdot (Rie^{it})\,dt$

$J_2 = R^2 i\int \sin t\, e^{it}\,dt$

3)



calculons $\int_C e^z dz$

on $\gamma(t) = 3e^{it}$, $t \in [0, \pi]$

$$\int_C e^z dz = \int_0^\pi f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

$\gamma'(t) = 3ie^{it}$, $f(\gamma(t)) = e^{3e^{it}}$

$$\Rightarrow \int \quad = \int_0^\pi 3i$$

$$= \left[e^{3e^{it}}\right]_0^\pi$$

$$= e^{-3} - e^{3}$$

$$= -2\left(\frac{e^3 - e^{-3}}{2}\right)$$

$$= -2\,\mathrm{sh}(3)$$

comparons ce résultat avec $\int_{-3}^{3} e^x dx$

on a : $\int_{-3}^{3} e^x dx = [e^x]_{-3}^{3} = e^3 - e^{-3} = -(e^{-3} - e^3)$

Donc $\int_C e^z dz = -\int_{-3}^{3} e^x dx$.

Remarque

γ : $C \cup [-3, 3]$

$z \mapsto e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ est un ouvert étoilé qui contient γ

donc $\int_\gamma e^z dz = 0$

$$\Rightarrow \int_{C\cup[-3,3]} e^z dz = 0 \Rightarrow \int_C e^z dz + \int_{-3}^{3} e^x dx = 0$$

$$\int_C e^z dz = -\int_{-3}^{3} e^x dx$$

4) Calculons $\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}$

$$\gamma : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto e^{it}$$

$$\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

avec $f(z) = \dfrac{\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}}{z}$, $\gamma'(t) = ie^{it}$

$$\Rightarrow \int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(e^{it}+\frac{1}{e^{it}}\right)^{2n}}{e^{it}}\cdot ie^{it}\,dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} i\left(e^{it}+\frac{1}{e^{it}}\right)^{2n}dt$$

$$= i\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{it}+e^{-it}\right)^{2n}dt$$

on a : $$\left(e^{it}-e^{-it}\right)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k}\, e^{itk}\cdot e^{-it(2n-k)}$$

$$\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z} = i\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k}\, e^{itk}\cdot e^{-it(2n-k)}\right)dt$$

$$\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z} = i\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n} C_{2n}^{k}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2it(k-n)}dt + i\,C_{2n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}dt$$

$$= i\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n} C_{2n}^{k}\,\frac{1}{2i(k-n)}\left[e^{2it(k-n)}\right]_{-\pi}^{\pi} + 2\pi i\,C_{2n}^{n}$$

$$= i\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n} C_{2n}^{k}\,\frac{1}{2i(k-n)}\left[e^{2i\pi(k-n)} - e^{-2i\pi(k-n)}\right] + 2\pi i\,C_{2n}^{n}$$

$$= i\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n} C_{2n}^{k}\,\frac{1}{2i(k-n)}\cdot 2i\sin\left[2\pi(k-n)\right] + 2\pi i\,C_{2n}^{n}$$

$$= i\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n} C_{2n}^{k}\,\frac{\sin\left[2\pi(k-n)\right]}{k-n} + 2\pi i\,C_{2n}^{n} = 2\pi i\,C_{2n}^{n}$$

Donc : $\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z} = 2\pi i\, C_{2n}^{n}$

$C \subset U$ ouvert

$\dfrac{\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}}{z} = \dfrac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}$

Posons $f(z) = (z^2+1)^{2n}$

* f est holomorphe sur $\mathbb{C}$
* f est de classe C^{∞}
* $\gamma : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ donc $\gamma^* \subset \mathbb{C}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u \in D(0,1)$

$f^{(2n)}(u) = \dfrac{(2n)!}{2i\pi} \int_\gamma \dfrac{f(z)}{(z-u)^{2n+1}} dz$

En particulier pour $u = 0$

on a : $f^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{2i\pi} \int_\gamma \dfrac{f(z)}{z^{2n+1}} dz$

$\dfrac{2i\pi}{(2n)!} f^{(2n)}(0) = \int_\gamma \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \dfrac{dz}{z}$

• $f(z) = (z^2+1)^{2n}$

c) Deduisons $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t\, dt$ et $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{2n} t\, dt$.

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t\, dt$

D'après $(*)$, on a : $\int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \dfrac{dz}{z} = i \int_{-\pi}^{\pi} (2\cos t)^{2n} dt$

$= 4^n i \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t\, dt$

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t\, dt = -\dfrac{i}{4^n} \int_C \left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n} \dfrac{dz}{z} = -\dfrac{i}{4^n} \cdot 2\pi i\, C_{2n}^{n}$

$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} t\, dt = \dfrac{\pi}{2^{(2n-1)}} C_{2n}^{n}$

Exercice 3.1

Rappel

$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$

F une primitive de f sur Ω et supp $\gamma \subset \Omega$

$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$ si $\gamma(b) = \gamma(a)$

Debut de l'exo

ouvert de $\mathbb{C}$

$f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} / |z| > 0\}$

- soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad \gamma'(t) = ire^{it}$
$t \longmapsto re^{it}$ lacet situé dans Ω

$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} \times ire^{it}\,dt$

$= \int_0^{2\pi} i\,dt$

$= [it]_0^{2\pi} = 2\pi i$

γ est un lacet $(\gamma(0) = \gamma(2\pi) = r)$ situé dans Ω et ~~$f(z)$~~ car $\forall t \in [0, 2\pi]$, $|\gamma(t)| = r \in]0, +\infty[$ et $\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0$. Donc f n'admet pas de primitive dans Ω.

Comparer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+i\alpha)\,dx$ $\quad |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\,dx \qquad \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x+i\alpha)\,dx$$

$\Delta = \{ z\in\mathbb{C} \,/\, |\operatorname{Im} z| < a \}$ ouvert étoilé de $\mathbb{C}$

f holomorphe dans Δ.

Pour tout réel $R>0$, $\gamma = [-R, R, R+i\alpha, -R+i\alpha, -R]$

est un lacet situé dans Δ.

$$\forall R\in\mathbb{R}_+^* \quad 0 = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{[R,R+i\alpha]} f(z)\,dz +$$

$$\int_{[R+i\alpha, -R+i\alpha]} f(z)\,dz + \int_{[-R+i\alpha,-R]} f(z)\,dz$$

$$0 = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_0^{\alpha} f(R+it)\,i\,dt - \int_{-R}^{R} f(x+i\alpha)\,dx - \int_0^{\alpha} f(-R+it)\,i\,dt$$

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx - \int_{-R}^{R} f(x+i\alpha)\,dx = -\int_0^{\alpha} f(R+it)\,i\,dt + \int_0^{\alpha} f(-R+it)\,i\,dt$$

Soit $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$, $\exists R_\varepsilon\in\mathbb{R}_+^* : \forall z\in\mathbb{C},\ |z|\geq R_\varepsilon \Rightarrow |f(z)|<\varepsilon$

$\forall R\geq R_\varepsilon$, $\forall t\in[0,\alpha]$, $|\pm R+it| = \sqrt{R^2+t^2} \geq R \geq R_\varepsilon$

et donc $|f(\pm R+it)| < \varepsilon$

$$\forall R\geq R_\varepsilon \quad \left| \int_{-R}^{R} f(x)\,dx - \int_{-R}^{R} f(x+i\alpha)\,dx \right| \leq 2\alpha\varepsilon.$$

Ainsi $\lim_{R\to+\infty}\left[-\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{-R}^{R} f(x+i\alpha)\,dx \right] = 0$

Scanned by CamScanner

Ω $\displaystyle\int_{-R}^{R} f(x+i\alpha)\,dx = \int_{-R}^{R} f(x+i\alpha)\,dx - \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$

Donc $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x+i\alpha)\,dx = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{C}$

2.) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (un rapel)

Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos\alpha x\,dx \quad -\infty < \alpha < +\infty$

Soit $f(z) = e^{-z^2}$, $z \in \mathbb{C}$

f est holomorphe pour $\mathbb{C}$

$\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (converge)

d'après la question précédente

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x+i\frac{\alpha}{2}\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

$\displaystyle\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x+i\frac{\alpha}{2}\right)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

$\displaystyle e^{\frac{\alpha^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-ix\alpha}\,dx = \sqrt{\pi}$

$\displaystyle\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2-\frac{\alpha^2}{4}+ix\alpha\right)}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$

$\displaystyle\Rightarrow e^{\frac{\alpha^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-ix\alpha}\,dx = \sqrt{\pi}$

$\displaystyle\Rightarrow e^{\frac{\alpha^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left(\cos(x\alpha) + i\sin(x\alpha)\right)dx = \sqrt{\pi}$

$\displaystyle\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)\,dx - i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin(\alpha x)\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos(\alpha x)\,dx = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4}}, \quad \forall |z| = r$$

<u>Exercice 9.4</u>

1- $\exists (r, M, m) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N} \mid \forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geq r \Rightarrow |f(z)| \leq M$

avec f une fonction entière

$n > m \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0$

a) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > m \Rightarrow$ f est entière donc holomorphe sur $\mathbb{C}$, en particulier sur le disque fermé de centre 0 et de rayon λ ($\overline{D(0,\lambda)}$)

D'après la formule des estimations

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\lambda^n} \sup\limits_{z \in \mathcal{C}(0,\lambda)} |f(z)|$. D'après l'hypothèse $\forall z \in \mathcal{C}(0,\lambda)$, on a : $|f(z)| \leq M \lambda^m$

$\Rightarrow |z| = \lambda \Rightarrow |z| > r$ pour $\lambda > r$

$$\Rightarrow \sup |f(z)| \leq M \lambda^m$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\lambda^n} M \lambda^m$

~~Pour $\lambda > r$~~, $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\lambda^n} M \lambda^m$

$$\leq n!\, M \lambda^{m-n} = \frac{n!\, M}{\lambda^{n-m}}$$

Pour $n > m$, $0 \leq |f^{(n)}(0)| \leq \lim\limits_{\lambda \to +\infty} \left(n!\, M \frac{1}{\lambda^{n-m}} \right) = 0$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n > m$$

b) En déduire que f est un polynôme de degré $\leq m$

f est entière sur $\mathbb{C}$ donc admet un développement de taylor au voisinage de 0.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{avec } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

or d'après a) $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall n > m$ i.e $a_n = 0$ $\forall n >$

donc $f(z) = \sum_{0 \leq n \leq m} a_n z^n$

Par conséquent f est un polynôme de degré $\leq m$ au voisinage 0.

2) $\lim_{r \to +\infty} g(r) = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |z| g(|z|)$

Montrons que f est constante

Considérons le disque $\bar{D}(0, r)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$

f étant holomorphe on a :

$\forall n \in \mathbb{N} : \quad |f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in C(0,r)} |f(z)|$

$z \in C(0,r) \Leftrightarrow |z| = r$

$\forall z \in C(0,r)$, $|f(z)| \leq r g(r)$

$\forall z \in C(0,r)$; $\sup_{z \in C(0,r)} |f(z)| \leq r g(r)$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} r g(r) = \frac{n!}{r^{n-1}} g(r)$

Pour $n > 0$ on a : $\lim_{r \to +\infty} \frac{n!}{r^{n-1}} g(r) = 0$

Il vient que $f^{(n)}(0) = 0$; $\forall n > 0$

f est donc un polynôme de degré 0

En utilisant le developpement de Taylor autour de 0,

on a : $f(z) = a_0$ avec $f(0) = a_0$

donc f est constante.

3) $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re} f(z) \leq M$

Montrons que f est $z \mapsto e^z$ sont entière. donc

$g = \exp \circ f$ est entière comme composé de fonctions entières

Scanned by CamScanner

$|g(z)| = |\exp(f(z))| = |\exp(\mathrm{Re} f(z) + i\,\mathrm{Im} f(z))|$

$|g(z)| = |\exp(\mathrm{Re}(f(z))) \cdot \exp(i\,\mathrm{Im}[f(z)])|$

$|g(z)| = \exp(\mathrm{Re}(f(z)))$

$|g(z)| \leq e^M$ d'après l'hypothèse

g est donc une fonction entière et bornée d'après le theorème de liouville g est constante

$\Rightarrow g(z) = \exp(f(z)) = g(0) = \exp(f(0))$

$g'(z) = f'(z)\exp(f(z)) = 0$

or $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(f(z)) \neq 0$ donc $f'(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Alors comme $\mathbb{C}$ est connexe. f est constante.

exercice 8.2

1) calculons $\int_\gamma \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz$.

* la fonction $z \mapsto \cos\left(\frac{z}{2}\right)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$
* $\mathbb{C}$ est un ouvert étoilé
* $z \mapsto \cos\left(\frac{z}{2}\right)$ admet une primitive. une primitive est $z \mapsto 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)$.

Alors $\int_\gamma \cos\left(\frac{z}{2}\right) dz = 2\left[\sin\left(\frac{\pi + 2i}{2}\right) - \sin 0\right] = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right)$

$= -2\cos i$

UNISAT **2012-2013**
L3-Maths **2 heures**

Devoir 1 d'analyse complexe

Nous rappelons que l'image d'un connexe par une fonction continue est encore un connexe et que pour $|z| < 1$, $\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k}$

Exercice 1 (5 points). Soit $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Un logarithme sur Ω est une fonction continue $f : \Omega \to \mathbb{C}$ vérifiant $\exp \circ f = id_\Omega$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction logarithme continue sur le cercle unite. (On pourra procéder par l'absurde)
2. Quel est le lien entre les différents logarithmes sur un ouvert connexe donnée ?

Correction 1. 1. Rappelons que si $z \in \mathbb{C}$, $e^z = e^{\operatorname{Re} z}e^{i \operatorname{Im} z}$ a pour module $e^{\operatorname{Re} z}$, et donc $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2ki\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Supposons par l'absurde que f soit un logarithme continu sur le cercle, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\exp(f(e^{i\theta})) = e^{i\theta}$, autrement dit $f(e^{i\theta}) - i\theta \in 2i\pi\mathbb{Z}$. La fonction $\theta \mapsto f(e^{i\theta}) - i\theta$ est continue sur $\mathbb{R}$ connexe, à valeurs dans le discret $2\pi i\mathbb{Z}$, donc constante égale à $2k\pi i$ ($k \in \mathbb{Z}$). En particulier, on obtient une contradiction en évaluant cette fonction en $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$.

2. Si f et g sont deux logarithmes sur $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, alors la fonction e^{f-g} est constante égale à 1 sur U, et par le même argument que dans la question précédente on en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f = g + 2k\pi i$.

Exercice 2 (10 points). On définie le logarithme principale sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

où $\operatorname{Arg} z$ est l'argument principal de z, c'est-à-dire $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière
$$F(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1}.$$
2. On suppose $|z| < 1$. Prouver que $F(z) = \operatorname{Log}(1+z) - \operatorname{Log}(1-z)$.
3. On suppose $|z| < 1$ et $\operatorname{Im}(z) \geq 0$. Prouver $0 \leq \operatorname{Arg}(1+z) < \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(1-z) \leq 0$. Quelles sont les inégalités lorsque $\operatorname{Im}(w) \leq 0$? Montrer l'implication
$$|z| < 1 \Rightarrow |\operatorname{Arg}(1+z) - \operatorname{Arg}(1-z)| < \pi$$
4. On suppose $|z| < 1$. Justifier : $F(z) = \operatorname{Log}(\frac{1+z}{1-z})$.
5. On suppose $|w| < 1$ et on pose $z = \frac{1+w}{1-w}$. Montrer $|z-1| < |z+1|$. En déduire $\operatorname{Re}(z) > 0$.
6. Réciproquement montrer que pour tout z avec $\operatorname{Re}(z) > 0$ il existe un unique w tel que $z = \frac{1+w}{1-w}$. Exprimer w en fonction de z et prouver $|w| < 1$.
7. En deduire :
$$\operatorname{Re}(z) > 0 \Rightarrow \operatorname{Log} z = 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{2j+1}$$

8. En déduire : $2(\frac{1}{3}+\frac{1}{81}) < \text{Log}\,2 < 2(\frac{1}{3}+\frac{1}{72})$.

Correction 2. 1. Pour $|z| > 1$ on a $\lim_{j\to+\infty} \frac{2|z|^{2j+1}}{2j+1} = +\infty$ donc le rayon de convergence est au plus 1. Pour $|z| < 1$ on a $\lim_{j\to+\infty} \frac{2|z|^{2j+1}}{2j+1} = 0$ donc le rayon de convergence est au moins 1. Le rayon de convergence est 1

2. On sait que $|z| < 1 \Rightarrow \text{Log}(1+z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k}$. Donc $-\text{Log}(1-z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k}$. Dans la somme les exposants k pairs donnent des contributions opposées. Il ne reste que les exposants impairs $k = 2j+1$, $j \in \mathbb{N}$. Et on trouve bien $\text{Log}(1+z) - \text{Log}(1-z) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k+1}}{2k+1}$

3. Le nombre complexe $z' = 1+z$ vérifie, lorsque $|z| < 1$ et $\text{Im}(z) \geq 0$, $\text{Im}(z') \geq 0$ et $\text{Re}(z') > 0$. Sa coordonnée polaire angulaire est donc comprise entre zero et $\frac{\pi}{2}$. Donc $0 \leq \text{Arg}(1+z) < \frac{\pi}{2}$. Par contre $z" = 1-z$ est lui situé dans le quadrant $\text{Im}(z") \leq 0$ et $\text{Re}(z") > 0$ et a donc une coordonnée polaire angulaire dans $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$. Lorsque $\text{Im}(z) \leq 0$ les inégalités sont par le même argument $0 \leq \text{Arg}(1-z) < \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(1+z) \leq 0$.
Si $\text{Im}(z) \geq 0$ on obtient $0 \leq \text{Arg}(1+z) - \text{Arg}(1-z) < \pi$, et si $\text{Im}(z) \leq 0$ on obtient $0 \leq \text{Arg}(1-z) - \text{Arg}(1+z) < \pi$. Dans tous les cas $|\text{Arg}(1+z) - \text{Arg}(1-z)| < \pi$

4. On a $\exp(F(z)) = \exp(\text{Log}(1+z))\exp(-\text{Log}(1-z)) = (1+z)(1-z)^{-1}$. Et la partie imaginaire de $F(z)$ est $\text{Arg}(1+z) - \text{Arg}(1-z)$ donc par la question précédente dans $]-\pi, \pi[$. Par définition de Log cela veut effectivement dire que $F(z) = \text{Log}(\frac{1+z}{1-z})$.

5. On a $z - 1 = \frac{2w}{1-w}$ et $z + 1 = \frac{2}{1-w}$ donc $|z-1| = |w||z+1|$. L'éventualité $z + 1 = 0$ est exclue car elle donnerait $0 = \frac{2}{1-w}$, donc $0 = 2$. Donc $z+1$ est non nul et $|w| < 1 \Rightarrow |z-1| = |w||z+1| < |z+1|$. Dans le plan complexe les points équidistants de -1 et de $+1$ sont ceux de la médiatrice du segment $[-1, +1]$, c'est-à-dire l'axe imaginaire. Les points plus proches de 1 que de -1 sont ceux du demi-plan a droite de la médiatrice, c'est-à-dire $\text{Re}(z) > 0$

6. L'égalité pour z fixé $z = \frac{1+w}{1-w}$ équivaut à $z - zw = 1 + w$ (car $w = 1$ est impossible si $z - zw = 1 + w$), qui équivaut à $z - 1 = (z+1)w$, qui équivaut lorsque $z \neq -1$ à $w = \frac{z-1}{z+1}$. Donc effectivement lorsque $z \neq -1$, il existe un unique w et il est donné par la formule $w = \frac{z-1}{z+1}$. Lorsque $\text{Re}(z) > 0$ on a expliqué dans la réponse précédente que $|z-1| < |z+1|$ donc effectivement $|w| < 1$.

7. Par la question précédente en posant $w = \frac{z-1}{z+1}$, on a $|w| < 1$ et $z = \frac{1+w}{1-w}$. Donc $\text{Log}(z) = F(w)$ et il suffit de remplacer dans la définition de $F(w)$ le nombre complexe w par $\frac{z-1}{z+1}$ d'où la formule demandée.

8. Pour $z = 2$ on a $w = \frac{1}{3}$. La serie est a termes positifs. On peut minorer (strictement) sa somme par les deux premiers termes ce qui donne $2\frac{1}{3} + 2\frac{1}{3}(\frac{1}{3})^3 = 2(\frac{1}{3} + \frac{1}{81})$. Pour la majoration, qui sera stricte, on remplace $\frac{2}{2j+1}(\frac{1}{3})^{2j+1}$ pour $j \geq 1$ par $\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{2j+1} = 2\frac{1}{9}(\frac{1}{9})^j$. La somme infinie $\sum_{j\geq 1}\frac{2}{2j+1}(\frac{1}{3})^{2j+1}$ est donc strictement inférieure a $2\frac{1}{9}\sum_{j\geq 1}(\frac{1}{9})^j = 2\frac{1}{72}$, d'où la majoration $\text{Log}\,2 < 2(\frac{1}{3} + \frac{1}{72})$. On prendra note que si l'on calcule explicitement ces inégalités donnent les deux premières décimales de $\text{Log}\,2 = 0,693147\ldots$

Exercice 3 (5 points). Soit $\sqrt{z}$ la détermination principale de la racine carrée sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, c'est-à-dire $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2} \operatorname{Log} z)$.

1. Que vaut $\sqrt{i}$? Que vaut $\sqrt{-i}$?
2. Soit $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \Omega$ définie par $\gamma(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Calculer $\int_\gamma \sqrt{z} dz$

Correction 3. Sachant $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2} \operatorname{Log} z)$ et que $\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$, où $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, on a :

1. $\operatorname{Log}(i) = \ln(1) + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$. Donc $\sqrt{i} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} i} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. De même nous avons $\sqrt{-i} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ car $\operatorname{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ et $e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. Le chemin γ est défini par

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{C} \\ & \theta & \mapsto & e^{i\theta}, \end{array}$$

on a

$$\begin{aligned} \int_\gamma \sqrt{z} dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} i e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{3\theta}{2}} d\theta = i \left[\frac{2}{3i} e^{i\frac{3\theta}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3}\left(e^{\frac{3i\pi}{4}} - 1\right) = \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

CORRECTION

EXAMEN U.E : VARIABLE COMPLEXE

1ère session 2015-2016

EXERCICE 1

f est une fonction entière vérifiant :
$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+iy) = e^x f(iy)$ et $f(0)=1$.
Posons, pour tout réel y, $\operatorname{Re} f(iy) = c(y)$ et
$\operatorname{Im} f(iy) = s(y)$.

1 - Montrons en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann que :
$\forall y \in \mathbb{R}$; $c'(y) = -s(y)$ et $s'(y) = c(y)$

On a $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$; $f(x+iy) = e^x f(iy) =$
$$= e^x \operatorname{Re} f(iy) + i e^x \operatorname{Im} f(iy).$$

Posons $\begin{cases} P(x,y) = e^x \operatorname{Re} f(iy) = e^x c(y) \\ Q(x,y) = e^x \operatorname{Im} f(iy) = e^x s(y) \end{cases}$

Alors $f(x+iy) = P(x,y) + i\,Q(x,y) = e^x c(y) + i e^x s(y)$.

D'après les conditions de Cauchy-Riemann,

on a : $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c(y)e^x = s'(y)e^x \\ c'(y)e^x = -s(y)e^x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} c(y) = s'(y) \\ c'(y) = -s(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c'(y) = -s(y) \\ s'(y) = c(y) \end{cases}$

Car $\begin{cases} \frac{\partial P}{x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[C(y)e^{x}\right] = C(y)e^{x} \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[C(y)e^{x}\right] = C'(y)\, e^{x} \end{cases}$ et

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{x}S(y)\right] = e^{x}S(y) \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{x}S(y)\right] = e^{x}\, S'(y). \end{cases}$$

2- Montrons que $y \mapsto g(y) = (C(y)-\cos y)^2 + (S(y)-\sin y)^2$ vérifie : $\forall y \in \mathbb{R},\ g'(y) = 0$.

On a $\forall y \in \mathbb{R}$, $g'(y) = 2\left(C'(y)+\sin(y)\right)\left(C(y)-\cos y\right) +$
$2\left(S'(y)-\cos y\right)\left(S(y)-\sin y\right)$.

En remplaçant $C'(y) = -S(y)$ et $S'(y) = C(y)$; on obtient :

$$\Rightarrow g'(y) = 2\left[(C(y)-\cos y)(-S(y)+\sin y) + (C(y)-\cos y)(S(y)-\sin y)\right]$$

$$= 2\left[-(C(y)-\cos(y))(S(y)-\sin y) + (C(y)-\cos y)(S(y)-\sin y)\right]$$

$g'(y) = 0$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}$; $g'(y) = 0$.

Déduisons que : $\forall y \in \mathbb{R}$; $\begin{cases} g(y) = 0 \\ C(y) = \cos y \\ S(y) = \sin y \end{cases}$.

* Montrons que $g(y) = 0$.

D'après ce qui précède ; on a $\forall y \in \mathbb{R}$; $g'(y) = 0$
or $\mathbb{R}$ est connexe, donc ~~$\forall y \in \mathbb{R}$; $\exists! c \in \mathbb{R}$ tq~~ g est constante sur $\mathbb{R}$.
~~$g(y) = c$~~
Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R}$; $\exists! c \in \mathbb{R}$ tq $g(y) = c$.

calculons $g(0)$:
g est constante sur $\mathbb{R}$; donc $g(0) = c$.

On a $g(0) = (C(0) - \cos 0)^2 + (S(0) - \sin 0)^2$

$= (C(0) - 1)^2 + S^2(0)$.

Par ailleurs ; $f(0) = e^{0x} f(i \times 0)$

$= C(0) + i\,S(0) = 1$

Donc $\begin{cases} C(0) = 1 \\ S(0) = 0 \end{cases}$; par identification.

D'où $g(0) = (1-1)^2 + 0^2 = 0$.

Ainsi $\underline{\forall y \in \mathbb{R} ;\ g(y) = 0}$

* Montrons que $\begin{cases} C(y) = \cos y \\ S(y) = \sin y \end{cases}$.

On a $\forall y \in \mathbb{R} ;\ g(y) = 0 \Leftrightarrow$

$\Updownarrow$

$\forall y \in \mathbb{R} ;\ (C(y) - \cos y)^2 + (S(y) - \sin y)^2 = 0$

$\Updownarrow$

$\forall y \in \mathbb{R} ,\ \begin{cases} C(y) - \cos y = 0 \\ S(y) - \sin y = 0 \end{cases}$; $\boxed{\begin{array}{l} \text{Car } \forall a, b \in \mathbb{R} \\ a^2 + b^2 = 0 \\ \Updownarrow \\ a = 0 \text{ et } b = 0 \end{array}}$

$\Updownarrow$

$\forall y \in \mathbb{R} ;\ \begin{cases} C(y) = \cos y \\ S(y) = \sin y. \end{cases}$

Exercice 2

Evaluons $\int_\gamma \bar{z}\,dz$ dans les cas suivants :

1. $\gamma : t \longmapsto t^2 + it$ definie sur $[a,b]$ tels que

$$\begin{cases} \gamma(a) = 0 \\ \gamma(b) = 4 + 2i . \end{cases}$$

Soit $f : z \longmapsto \bar{z}$.

Alors $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

Déterminons a et b.

$$\begin{cases} \gamma(a) = 0 \\ \gamma(b) = 4 + 2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ia = 0 \\ b^2 + ib = 4 + 2i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \text{ et } a = 0 \\ b^2 = 4 \text{ et } b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases} .$$

Donc $\int_\gamma f(z)dz = \int_0^2 \overline{\gamma(t)} \times \gamma'(t)\,dt$

$\gamma'(t) = 2t + i$ et $\overline{\gamma(t)} = t^2 - it$.

Alors $\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_0^2 (2t+i)(t^2 - it)dt$

$$= \int_0^2 \left[2t^3 + t + i(-2t^2 + t^2)\right]dt$$

$$= \int_0^2 \left[(2t^3 + t) - it^2\right] dt$$

$$= \left[\frac{t^4}{2} + \frac{t^2}{2} - i\frac{t^3}{3}\right]_0^2$$

$$= 8 + 2 - i \times \frac{8}{3} = 10 - \frac{8}{3}i$$

Ainsi $\int_\gamma \bar{z}\,dz = 10 - \frac{8}{3}i$

2- γ^* est la ligne brisée formée des segments de droite joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4+2i$.

Calculons $\int_{\gamma^*} \bar{z}\, dz$.

Déterminons le support γ^* : paramétrons-le.

On a : $\gamma^* = \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$; où γ_1^* et γ_2^* sont respectivement les segments de droites joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4+2i$.

Paramétrons γ_1^* et γ_2^*.

On a : $\gamma_1^* = [0, 2i]$ et $\gamma_2^* = [2i, 4+2i]$.

Alors $\gamma_1 : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto 2it \end{array}$; et

$\gamma_2 : \begin{array}{l} [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto (1-t)\times 2i + t(4+2i) \end{array}$

Donc $\forall\, t \in [0,1]$; $\gamma_1(t) = 2it$ et

$\gamma_2(t) = 4t + 2i$.

Ainsi $\int_{\gamma^*} \bar{z}\, dz = \int_{\gamma_1^*} \bar{z}\, dz + \int_{\gamma_2^*} \bar{z}\, dz$.

* $\int_{\gamma_1^*} \bar{z}\, dz = \int_0^1 \overline{\gamma_1(t)} \times \gamma_1'(t)\, dt$

$= \int_0^1 -2it \times 2i\, dt = 4\int_0^1 t\, dt$.

$$\boxed{\int_{\gamma_1^*} \bar{z}\, dz = 2.}$$

* $\int_{\gamma_2^*} \bar{z}\, dz = \int_0^1 \overline{\gamma_2(t)} \times \gamma_2'(t)\, dt$

$= \int_0^1 (4t - 2i) \times 4\, dt$

$= 4 \int_0^1 (4t - 2i)\, dt$

$= 4 \left[2t^2 - 2it\right]_0^1$

$= 4\,(2 - 2i)$

$$\boxed{\int_{\gamma_2^*} \bar{z}\, dz = 8 - 8i}$$

En somme, $\int_{\gamma^*} \bar{z}\, dz = \int_{\gamma_1^*} \bar{z}\, dz + \int_{\gamma_2^*} \bar{z}\, dz$

$\Rightarrow \int_{\gamma^*} \bar{z}\, dz = 2 + 8 - 8i = 10 - 8i$

Donc $\boxed{\int_{\gamma^*} \bar{z}\, dz = 10 - 8i}$

Exercice 3

1- Soit $r \in [1, +\infty[$.

γ_r est le lacet de support :

$\gamma_r^* = [-r, r] \cup \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = r ; \operatorname{Im} z > 0\}$.

parcouru une fois dans le sens direct.

a- Montrons que $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2} dz = \frac{\pi}{e}$.

Posons $g(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$.

Alors $g(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2} = \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+i)}$

$$= \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i} = \frac{f(z)}{z-i}.$$

avec $f(z) = \frac{e^{iz}}{z+i}$.

Donc $\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = \int_{\gamma_r} \frac{\frac{e^{iz}}{z+i}}{z-i} dz$

$$= \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-i} dz.$$

$f : z \longmapsto \frac{e^{iz}}{z+i}$ est ~~holo~~

holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$;

d'après la formule intégrale de Cauchy ;

on a : $f(i) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-i} dz$; $f(i) = \frac{e^{i \times i}}{i+i} = \frac{e^{-1}}{2i}$.

D'où $\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-i}\,dz = 2i\pi \times f(i).$

$$= 2i\pi \times \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}.$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \frac{\pi}{e}}$

b) b_1 - Montrons que : $\displaystyle\int_{[r,r]} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt.$

On a $g(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$; $\forall z \in [-r,r] \subset \mathbb{R}.$

Alors $g(z) = \dfrac{1}{1+z^2}\left[\cos(z) + i\sin(z)\right]$;

$$g(z) = \frac{\cos z}{1+z^2} + i\,\frac{\sin z}{1+z^2} \; ; \forall z \in [-r,r] \subset \mathbb{R}.$$

Donc $\displaystyle\int_{[-r,r]} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{\cos z}{1+z^2}\,dz + i\int_{-r}^{r} \frac{\sin z}{1+z^2}\,dz.$

or $\forall z \in [-r,r] \subset \mathbb{R}$; la fonction $z \mapsto \sin z$ est impaire ; donc $\displaystyle\int_{-r}^{r} \frac{\sin z}{1+z^2}\,dz = 0.$

D'où $\boxed{\displaystyle\int_{[-r,r]} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz = \int_{-r}^{r} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt}$

b2 – Montrons que : $\forall z \in \mathbb{C}$;

$[\,|z| = r \,;\, \operatorname{Im} z \geq 0\,] \Rightarrow |1+z^2| \geq r^2 - 1$.

. Supposons que $\forall z \in \mathbb{C}$; $|z| = r$ et $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Rappel : $\forall a, b \in \mathbb{C}$;

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \leq |a-b|.$$

Donc en prenant, $a = z^2$ et $b = -1$;

on obtient : $\forall z \in \mathbb{C} : \big|\,|z^2| - |-1|\,\big| \leq |z^2 - (-1)|$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}$; $\big|\,|z|^2 - 1\,\big| \leq |z^2 + 1|$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}$; $|r^2 - 1| \leq |z^2 + 1|$; car $|z| = r$.

Rappel : soit $\beta \geq 0$. ~~soit~~ $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$|\alpha| \leq \beta \Rightarrow \begin{cases} \alpha \leq \beta & (*) \\ -\alpha \leq \beta. & (**) \end{cases}$$

Donc en utilisant la relation $(*)$; on obtient : $\forall z \in \mathbb{C}$; $r^2 - 1 \leq |z^2 + 1|$.

D'où $\forall z \in \mathbb{C}$; $|z^2 + 1| \geq r^2 - 1$.

* Montrons que $\forall z \in \mathbb{C}$; $|e^{iz}| \leq 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y} \times e^{ix}$

Donc $|e^{iz}| = |e^{-y} \times e^{ix}| = e^{-y} \times |e^{ix}| = e^{-y}$

car $\forall x \in \mathbb{R}$; $|e^{ix}| = 1$.

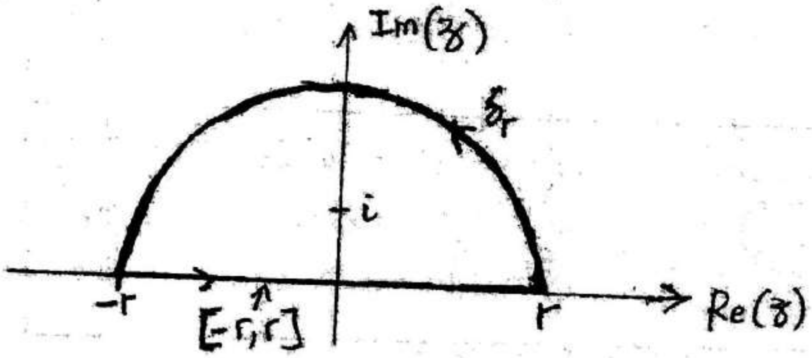
Or $\operatorname{Im} z > 0 \Leftrightarrow y > 0 \Rightarrow -y < 0$;
donc $e^{-y} < 1$.

Par conséquent ; $\forall z \in \mathbb{C}$; $\operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow |e^{iz}| < 1$

b_3 - Supposons que γ_r est le chemin de support $\gamma_r^* = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = r,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ parcouru une seule fois dans le sens direct.

Montrons que $\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz\right| \leq \pi \frac{r}{r^2-1}$.

Paramétrons γ_r.



Soit $z \in \gamma_r^*$; Alors ~~z(t)=~~
$z \in \{ re^{it} \mid t \in [0,\pi] ; r \geq 1 \}$.

Posons $z = re^{it}$; $t \in [0, \pi]$.

Alors $\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\, dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{ire^{it}}}{1+r^2e^{2it}} \times rie^{it}\, dt\right|$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$.

$\Rightarrow e^{ire^{it}} = e^{ir(\cos t + i \sin t)} = e^{-r\sin t} \times e^{ir\cos t}$.

Donc $\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{-r\sin t} \times e^{ir\cos t}}{1+r^2e^{2it}} \times rie^{it}\,dt\right|$

$$\leq \int_0^{\pi} \left| \frac{e^{-r\sin t} \times e^{ir\cos t} \times rie^{it}}{1+r^2e^{2it}} \right| dt$$

On a $\left| \frac{e^{-r\sin t} \times e^{ir\cos t} \times rie^{it}}{1+r^2e^{2it}} \right| =$

$$\frac{|e^{-r\sin t}| \times |e^{ir\cos t}| \times |rie^{it}|}{|1+r^2e^{2it}|} \leq \frac{re^{-r\sin t}}{|1+r^2e^{2it}|}$$

Comme $\mathrm{Im}\, z > 0$; $\sin t > 0$ donc $e^{-r\sin t} < 1$

D'où $\frac{re^{-r\sin t}}{|1+r^2e^{2it}|} < \frac{r}{|1+r^2e^{2it}|}$

D'après la question b2) ;

$|1+z^2| \geq r^2-1$; donc $|1+r^2e^{2it}| \geq r^2-1$

et par suite $\frac{1}{|1+r^2e^{2it}|} \leq \frac{1}{r^2-1}$;

Ainsi $\boxed{\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{r}{r^2-1}\,dt = \pi \frac{r}{r^2-1}}$

3- Justifions la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{1+t^2}$ est paire.

Restreignons-nous à l'intervalle $[0,+\infty[$

Etude en $+\infty$.

$\forall\, t \in [0,+\infty[\,;\quad \left|\dfrac{\cos t}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.

or $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ converge ; donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2+1}dt$ converge.

Par conséquent $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos t}{1+t^2}dt$ converge.

Montrons que: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos t}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{e}$.

On a: $\displaystyle\int_{\gamma_r}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int_{[-r,r]}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz + \int_{\delta_r}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$.

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-r}^{r}\frac{\cos t}{1+t^2}dt + \int_{\delta_r}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-r}^{r}\frac{\cos t}{1+t^2}dt + \int_0^{\pi}\frac{e^{ir(\cos t + i\sin t)}}{1+r^2e^{2it}}\times rie^{it}dt$$

En passant à la limite lorsque $r \longrightarrow +\infty$; on obtient

$$\frac{\pi}{e} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos t}{1+t^2}dt + \lim_{r\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{e^{ir(\cos t+i\sin t)}}{1+r^2e^{2it}}\times ire^{it}dt.$$

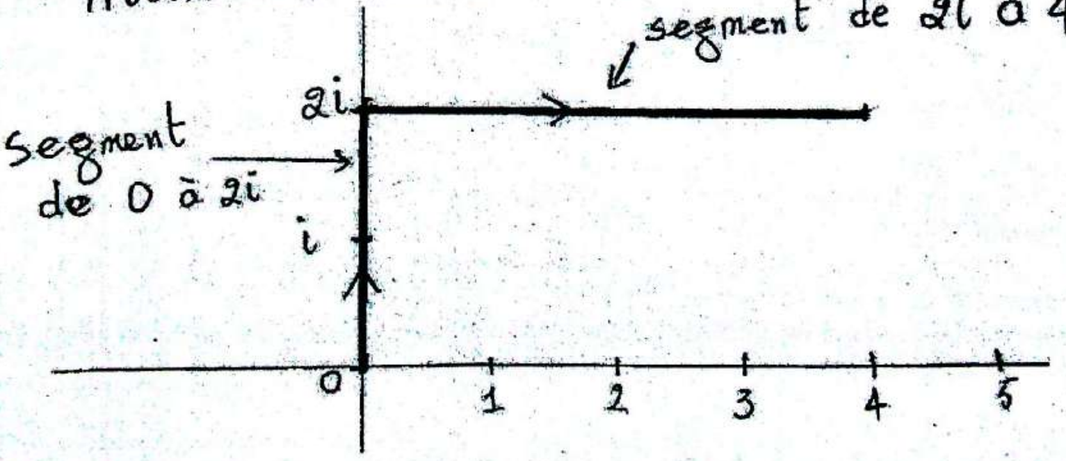
Or $\displaystyle\left|\int_{\delta_r}\frac{e^{iz}}{1+z^2}dz\right| \leq \pi.\frac{r}{r^2-1} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $\lim\limits_{r \to +\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{ir(\cos t + i\sin t)}}{1 + r^2 e^{2it}} \times ire^{it} dt = 0$

par conséquent ; $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{e}}$

REMARQUE : EXERCICE 2

La ligne brisée formée des segments de droite joignant 0 à $2i$ et $2i$ à $4+2i$ se represente graphiquement de la manière suivante :



ANALYSE IV

Série 3

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_\gamma y dz$, où γ est la composition des segments de 0 à i et de i à $i+2$.

(2) $\int_\gamma \sin 2z dz$, où γ est le segment de $i+1$ à $-i$.

(3) $\int_\gamma z e^{z^2} dz$, où γ est le cercle de rayon 1 et de centre zero.

Corrigé exercice 1. (1) On considère les courbes $\gamma_1(t) = it$, $0 \le t \le 1$ et $\gamma_2(t) = i + 2t$, $0 \le t \le 1$. Donc

$$\begin{aligned} \int_\gamma y dz &= \int_{\gamma_1} y dz + \int_{\gamma_2} y dz = \int_0^1 t i dt + \int_0^1 1 \cdot 2 dt \\ &= i/2 + 2. \end{aligned}$$

De manière analogue on calcule les autres intégrales.
(2) $\frac{1}{2}(\cos(2+2i) - \cos(-2i))$
(3) La fonction ze^{z^2} est la dérivée de la fonction $\frac{1}{2}e^{z^2}$, qui est analytique. L'intégrale de la dérivée d'une fonction analytique sur un courbe fermée est nulle. Alors $\int_\gamma z e^{z^2} dz = 0$.

Exercice 2. Calculer $\int_\gamma \frac{1}{z-1} dz$, où γ est le cercle de rayon 2 et de centre 1, parcouru une fois dans le sens anti-horaire.

Corrigé exercice 2. Nous avons $\gamma(t) = 2e^{it} + 1$, $0 \le t \le 2\pi$. Donc

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2e^{it} + 1 - 1} 2ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Exercice 3. Calculer $\int_\gamma (1/z) dz$, où γ est le cercle de rayon 1 et centre 2 parcouru une fois dans le sens anti-horaire.

Corrigé exercice 3. La détermination principale du $\ln z$ est analytique dans le domaine $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ avec dérivée $1/z$. La courbe γ est fermée et appartient au domaine d'analyticité de $\ln z$. Donc, selon le théorème fondamental du Calcul, nos avons $\int_\gamma (1/z) dz = 0$.

Exercice 4. Calculer $\int_\gamma \bar{z}^2 dz$, le long des deux chemins suivants :

(1) γ est la droite de $(0,0)$ à $(1,1)$.

(2) γ est la composition des segments de $(0,0)$ à $(1,0)$ et de $(1,0)$ à $(1,1)$.

En vue de ces résultats, est-ce que $\bar{z}^2$ peut être la dérivée d'une fonction analytique $F(z)$?.

Corrigé exercice 4. (1) **Méthode 1.** On peut paramétriser la courbe en utilisant $\gamma(t) = te^{i\pi/4}$, $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Avec ce choix on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{z}^2 dz &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(te^{-i\pi/4}\right)^2 e^{i\pi/4} dt \\
&= \int_0^{2\pi} t^2 e^{-i\pi/4} dt \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} e^{-i\pi/4}.
\end{aligned}$$

Méthode 2. On peut paramétriser la courbe comme $\gamma(t) = t + it$, $0 \leq t \leq 1$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overline{z}^2 dz &= \int_0^1 (-2it^2)(1+i) dt \\
&= \frac{2-2i}{3} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} e^{-i\pi/4}.
\end{aligned}$$

(2) On paramétrise les deux courbes de la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= t, \; 0 \leq t \leq 1 \\
\gamma_2(t) &= 1 + i(t-1), \; 1 \leq t \leq 2.
\end{aligned}$$

En faisant $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ on obtient

$$\int_\gamma \overline{z}^2 dz = \int_{\gamma_1} \overline{z}^2 dz + \int_{\gamma_2} \overline{z}^2$$

$$= \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (1 - i(t-1))^2 i dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 t^2 dz + \int_1^2 (-it^2 + (2+2i)t - 2) dt \\
&= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - i\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 + (2+2i)\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 - [2t]_1^2 \\
&= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} i
\end{aligned}$$

La fonction $\overline{z}^2$ ne peut pas être analytique sur l'intérieur du triangle formé par ces trois courbes vu que les intégrales obtenues en (1) et (2) ne sont pas égales. .

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$, $\int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|}$, $\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z}$, $\int_{|z|=1} \left|\frac{dz}{z}\right|$

(2) $\int_\gamma z^2 dz$, où γ est la courbe $\gamma(t) = e^{it} \sin^3 t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Corrigé exercice 5. (1) On peut paramétriser la courbe $|z| = 1$ comme $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Donc $\gamma'(t) = ie^{it}$, $|z| = 1$, $|dz| = dt$, $\left|\frac{dz}{z}\right| = dt$. Alors nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i, \\
\int_{|z|=1} \frac{dz}{|z|} &= \int_0^{2\pi} ie^{it} = \int_0^{2\pi} \cos t dt + i \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0, \\
\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{z} &= \int_0^{2\pi} e^{-it} dt = 0, \\
\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} &= \int_0^{2\pi} \left|\frac{dz}{z}\right| = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.
\end{aligned}$$

(2) Nous avons $z^2 = F'(z)$, où $F(z) = \frac{1}{3}z^3$ est analytique. Donc, si $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$ sont les deux extrémités de la courbe γ,

$$\int_\gamma z^2 = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(0) - F(i) = -\frac{i}{3}.$$

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes :

(1) $\int_\gamma (z^3 + 3)dz$, où γ est la moitié supèrieure du cercle de centre 0 et de rayon 1.

(2) $\int_\gamma (z^3 + 3)dz$, où γ est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

(3) $\int_\gamma e^{1/z}dz$, où γ est le cercle de centre $5i + 1$ et de rayon 3.

(4) $\int_\gamma \cos(3 + 1/(z-3))dz$, où γ est le carré avec sommets $0, 1, 1+i, i$.

Corrigé exercice 6. (1) La fonction $F(z) = 1/4z^4 + 3z$ est une primitive de $z^3 + 3$ analytique dans $\mathbb{C}$. Donc, $\int_\gamma (z^3 + 3)dz = F(-1) - F(1) = 1/4 - 3 - 1/4 - 3 = -6$.
(2) La fonction $z^3 + 3$ est analytique dans $\mathbb{C}$, qui est simplement connexe et γ est fermée, donc selon le théorème de Cauchy, $\int_\gamma (z^3 + 3)dz = 0$.
(3) $e^{1/z}$ est analytique dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, et 0 n'appartient pas à l'intérieur de γ, donc selon le théorème de Cauchy, $\int_\gamma e^{1/z}dz = 0$.
(4) $\cos(3 + 1/(z-3))$ est analytique dans $\mathbb{C}\backslash\{3\}$, et 3 n'appartient pas à l'intérieur de γ, donc selon le théorème de Cauchy, $\int_\gamma \cos(3 + 1/(z-3))dz = 0$.

ANALYSE IV

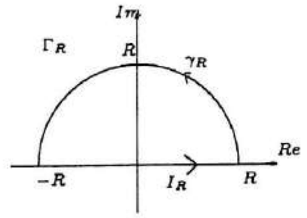
Série 9

informations: http://cag.epfl.ch
sections IN + SC

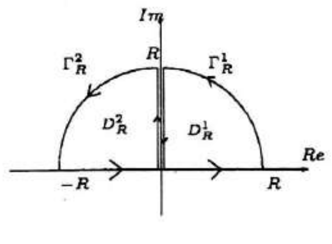
Exercice 1. Utiliser les formules intégrales de Cauchy pour calculer :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx.$$

Corrigé exercice 1. Soit $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx$. Cette intégrale est bien définie, car la fonction $g(x) = \frac{1}{1+x^4}$ est continue sur $[-R, R]$ $(R > 0)$ et $\int_R^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\, dx < \int_R^{\infty} \frac{1}{x^4}\, dx = \frac{1}{3R^3} < \infty$.
On se place maintenant dans le plan complexe : $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$, $z \in \mathbb{C}$. Cette fonction est holomorphe dans $\mathbb{C}$ sauf en 4 points qui sont les racines $4^{\text{ème}}$ de -1 (c'est à dire les solutions de $z^4 + 1 = 0$) : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$, $z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i)$, et $z_4 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.
Donc $f(z) = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$.
Soit Γ_R l'arc fermé, composé du segment réel $I_R = [-R, R]$ et du demi-cercle γ_R :
Alors, $\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz + \int_{-R}^{R} f(z)\, dz$. On considère également les arcs Γ_R^1 et Γ_R^2 délimitant



les domaines D_R^1 et D_R^2 :
On peut voir aussi que : $\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_R^1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_R^2} f(z)\, dz$.



Donc $\int_{-R}^{R} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_R^1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_R^2} f(z)\, dz - \int_{\gamma_R} f(z)\, dz$, et $I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)\, dz$.
On calule donc $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz$: On sait que $\| \int_{\gamma_R} f(z)\, dz\| \leq \|\gamma_R\| \max_{z\in\gamma_R} \|f(z)\|$, avec $\|\gamma_R\| = \pi R$.
De plus si $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, alors $\|1 + z^4\|^2 = 1 + R^8 + 2R^4 \cos 4\theta \geq 1 + R^8 - 2R^4 = (R^4 - 1)^2$ et donc $\max_{z\in\gamma_R} \|f(z)\| \leq \dfrac{1}{(R^4-1)}$. Ainsi $\| \int_{\gamma_R} f(z)\, dz\| \leq \frac{\pi R}{(R^4-1)}$, qui tend vers 0 quand R tend vers l'infini
On calcule à présent $\int_{\Gamma_R^1} f(z)\, dz$: $z_1 \in D_R^1$ et on définit $f_1(z)$ tel que $f(z) = \frac{f_1(z)}{z-z_1}$. Alors en appliquant la formule intégrale de Cauchy on trouve :

$$\int_{\Gamma_R^1} f(z)\, dz = \int_{\Gamma_R^1} \frac{f_1(z)}{z - z_1}\, dz = 2i\pi f_1(z_1) = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}(1-i).$$

De même on a $z_2 \in D_R^2$ et on définit $f_2(z)$ tel que $f(z) = \frac{f_2(z)}{z-z_2}$. Alors en appliquant la formule intégrale de Cauchy on trouve :

$$\int_{\Gamma_R^2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_R^2} \frac{f_2(z)}{z-z_2}\,dz = 2i\pi f_2(z_2) = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}(1+i).$$

Ainsi on trouve $I = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}(1-i) + \frac{\pi}{4}\sqrt{2}(1+i) - 0 = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}$.

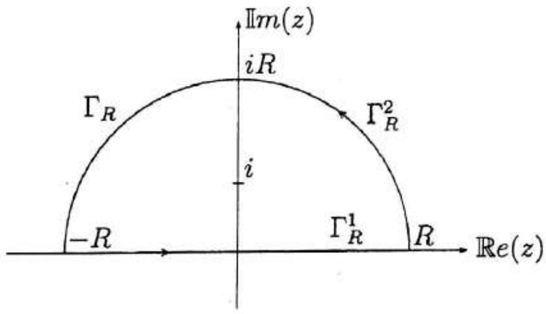
Exercice 2. Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx$ au moyen d'une formule intégrale de Cauchy.

Corrigé exercice 2. On remarque pour commencer que cette intégrale est bien définie. En effet, la fonction $\dfrac{1}{1+x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\left|\dfrac{\cos(x)}{1+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

On remarque alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx$ est la partie réelle de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx$.

Calculons maintenant cette dernière intégrale en passant aux nombres complexes.

Pour cela, on considère la figure suivante :



Soit $R > 1$. L'arc fermé Γ_R se compose de deux parties : l'arc Γ_R^1 qui est le segment de droite de $-R$ à R sur l'axe des réels et l'arc Γ_R^2 qui est un demi-cercle de rayon R. Les orientations sont indiquées par les flèches. Considérons la fonction $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{i+z}$. Cette fonction est holomorphe sur $D = \{z \in \mathbb{C} : \mathbb{I}m(z) > -1/2\}$ qui est un ouvert simplement connexe contenant Γ_R.

Appliquons la formule de Cauchy avec $n = 0$ pour la fonction f et l'arc Γ_R au point i. Il vient :

$$f(i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z-i}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz.$$

Puisque $f(i) = \frac{e^{-1}}{2i}$, nous avons $\forall R > 1$:

$$\pi e^{-1} = \int_{\Gamma_R^1} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz + \int_{\Gamma_R^2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz.$$

Faisons tendre R vers l'infini dans la relation ci-dessus.

- Le terme de gauche, πe^{-1} est une constante.
- Paramétrons l'arc Γ_R^1 : $z(x) = x$, $x \in [-R, R]$. La première intégrale donne

$$\int_{\Gamma_R^1} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int_{-R}^{+R} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx$$

puisque $\int_{-R}^{+R} \frac{\sin(x)}{1+x^2}dx = 0$ grâce à l'imparité de sinus.

- Paramétrons l'arc Γ_R^2 : $z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. La deuxième intégrale donne

$$\int_{\Gamma_R^2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos t + i \sin t)}}{1+R^2e^{2it}} Rie^{it}dt.$$

D'où, en prenant le module :

$$\left| \int_{\Gamma_R^2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz \right| \leq \int_0^{\pi} \left| \frac{e^{iR(\cos t + i \sin t)}}{1+R^2e^{2it}} Rie^{it} \right| dt \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1}.$$

En effet, $|e^{iR(\cos t + i \sin t)}| \leq 1$ puisque, pour $t \in [0, \pi]$ on a $\sin t \geq 0$ et donc $e^{-R \sin t} \leq 1$ pour le numérateur. Pour le dénominateur, $|1 + R^2e^{2it}|$ est la distance entre le point -1 et un point parcourant le cercle centré à l'origine et de rayon R^2 ; le minimum de cette distance vaut $R^2 - 1$. Donc,

$$\left| \int_{\Gamma_R^2} \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz \right| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 1} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

Finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx = \pi e^{-1}.$$

Exercice 3.

Calculer à l'aide du théorème des résidus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx.$$

Corrigé 3.

La fonction $\frac{x^2}{1+x^6}$ est paire, continue et on a $\frac{x^2}{1+x^6} < \frac{x^2}{x^6} = \frac{1}{x^4}, \forall x \in \mathbb{R}$; on en déduit que $\frac{x^2}{1+x^6}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx.$$

Considérons maintenant la fonction complexe $f(z) = \frac{z^2}{1+z^6}$. Ses pôles sont les 6 racines de $z^6 = -1$, soit $z_k = e^{i\pi/6 + ik\pi/3}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, tous situés sur le cercle unité et d'ordre 1.

Choisissons l'arc pour le théorème des résidus :

On prend l'arc formé des trois parties :

(1) le rayon partant de l'origine, d'angle 0, de longueur R : $\Gamma_{R,1}$: $z(t) = tR, t \in [0, 1]$, $\quad dz = Rdt$,

(2) le rayon partant de l'origine, d'angle $\pi/3$, de longueur R, parcouru vers le centre : $\Gamma_{R,2}$: $z(t) = (1-t)Re^{i\pi/3}, t \in [0, 1]$, $\quad dz = -Re^{i\pi/3}dt$,

(3) l'arc du cercle de rayon R joignant les extrémités de ces rayons : $\Gamma_{R,3}$: $z(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi/3]$, $\quad dz = iRe^{it}dt$

et appelons Γ_R l'arc obtenu en joignant $\Gamma_{R,1}$, $\Gamma_{R,3}$, puis $\Gamma_{R,2}$.

Le seul pôle contenu dans Γ_R est z_0. Calculons le résidu de f en ce pôle :

$$Res(f, z_0) = \frac{z_0^2}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)(z_0 - z_4)(z_0 - z_5)}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i), & z_0 - z_0 &= 0,\\
z_1 &= i, & z_0 - z_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i),\\
z_2 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i), & z_0 - z_2 &= \sqrt{3},\\
z_3 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{3}-i), & z_0 - z_3 &= \sqrt{3}+i,\\
z_4 &= -i, & z_0 - z_4 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+3i),\\
z_5 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3}-i), & z_0 - z_5 &= i
\end{aligned}$$

et donc

$$Res(f, z_0) = \frac{\sqrt{3}+i}{i\sqrt{3}(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+3i)} = \frac{\sqrt{3}+i}{i\sqrt{3}(6+2i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}+i}{i\sqrt{3}(2)\sqrt{3}(\sqrt{3}+i)} = \frac{-i}{6}.$$

On a :

(1) $\displaystyle\int_{\Gamma_{R,1}} f(z)dz = \int_0^1 \frac{t^2R^2Rdt}{1+t^6R^6},$

(2) $\displaystyle\int_{\Gamma_{R,2}} f(z)dz = \int_0^1 \frac{(1-t)^2R^2e^{2i\pi/3}(-R)e^{i\pi/3}dt}{1+(1-t)^6R^6e^{6i\pi/3}} = \int_{\Gamma_{R,1}} f(z)dz,$

(3) $\displaystyle|\int_{\Gamma_{R,3}} f(z)dz| \to 0$ car :

$$|\int_{\Gamma_{R,3}} f(z)dz| = R\,|\int_0^{\pi/3} \frac{R^2e^{2it}}{1+R^6e^{6it}}dt| \leq \pi/3\frac{R^3}{R^6-1}.$$

On tire du théorème des résidus que :

$$\int_{\Gamma_{R,3}} f(z)dz + 2\int_{\Gamma_{R,1}} f(z)dz = 2i\pi\frac{-i}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

et donc, lorsque R tend vers l'infini que

$$\frac{\pi}{3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6}dx.$$

Exercice 4. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2+2x+5}\,dx.$$

Indication On considèrera

$$\int_\Gamma \frac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\,dz$$

où Γ est le contour donné par $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{R} : -R \leq z \leq R\}$, $\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ où R est un réel positif qui tendra vers l'infini.

Corrigé 4. Le dénominateur de l'intégrant, x^2+2x+5, ne s'annule pas pour $x \in \mathbb{R}$; de plus, $\frac{\cos \pi x}{x^2+2x+5} = O(\frac{1}{x^2})$ si $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$, ce qui assure que l'intégrale existe.

Posons

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2+2x+5}\, dx$$

et considérons la fonction $f(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+5}$ et l'arc Γ donné. Les pôles de f sont $z_1 = -1+2i$ qui est entouré par l'arc Γ et $z_2 = -1-2i$ qui ne l'est pas et on a donc $z^2+2z+5 = (z-z_1)(z-z_2)$. Le résidu de f en z_1 est :

$$Res(f, z_1) = \frac{e^{i\pi z_1}}{(z_1 - z_2)} = \frac{e^{i\pi(-1+2i)}}{(-1+2i+1+2i)} = \frac{1}{4i} e^{-i\pi} e^{-2\pi} = -\frac{1}{4i} e^{-2\pi}.$$

Le théorème des résidus appliqué à f et à Γ donne :

$$\int_\Gamma \frac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\, dz = 2i\pi Res(f, z_1) = -\frac{1}{2}\pi e^{-2\pi}.$$

Paramétrons l'arc Γ_2 : $z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Donc :

$$\int_{\Gamma_2} \frac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\, dz = \int_0^\pi \frac{e^{i\pi R(\cos t + i \sin t)}}{R^2 e^{2it} + 2Re^{it} + 5} iRe^{it} dt$$

et on a :

$$\left| \int_{\Gamma_2} \tfrac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\, dz \right| \leq R \int_0^\pi \frac{e^{-\pi R \sin t}}{\mid R^2 e^{2it} + 2Re^{it} + 5 \mid}\, dt.$$

Pour $t \in [0, \pi]$, $e^{-\pi R \sin t} \leq 1$. De plus, $\mid R^2 e^{2it} + 2Re^{it} + 5 \mid = \mid z(t) - z_1 \mid\mid z(t) - z_2 \mid \geq (R - \sqrt{5})^2$, puisque $\mid z_1 \mid = \mid z_2 \mid = \sqrt{5}$. Finalement,

$$\left| \int_{\Gamma_2} \tfrac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\, dz \right| \leq \frac{R}{(R-\sqrt{5})^2}$$

et donc $\displaystyle\int_{\Gamma_2} \frac{e^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\, dz$ tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini. Il reste donc du théorème des résidus, après avoir fait tendre R vers l'infini :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x^2+2x+5}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x + i \sin \pi x}{x^2+2x+5}\, dx = -\frac{\pi}{2} e^{-2\pi}$$

et par conséquent :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{x^2+2x+5}\, dx = -\frac{\pi}{2} e^{-2\pi}.$$

Exercice 5. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{4+x^4}\,dx.$$

<u>Indication</u> On considère

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{4+z^4}\,dz$$

où Γ est le contour donné par $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{R} : -R \leq z \leq R\}$, $\Gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |\,z\,| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ où R est un réel positif qui tendra vers l'infini.

Corrigé 5. Premièrement, $4 + x^4 \geq 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$ donc le dénominateur de l'intégrant ne s'annule pas ; de plus, $\frac{\cos x}{4+x^4} = O(\frac{1}{x^4})$, si $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$, ce qui assure que l'intégrale existe.

Posons

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{4+x^4}\,dx = 1/2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{4+x^4}\,dx$$

et considérons la fonction $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{4+z^4}$ et l'arc Γ donné. Les pôles de f sont $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+i$ qui sont entourés par l'arc Γ et $z_3 = -1-i$, $z_4 = 1-i$ qui ne le sont pas et on a donc $4 + z^4 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$. Calculons pour commencer

$$\begin{aligned} z_1 - z_1 &= 0, & z_2 - z_1 &= -2,\\ z_1 - z_2 &= 2, & z_2 - z_2 &= 0,\\ z_1 - z_3 &= 2(1+i), & z_2 - z_3 &= 2i,\\ z_1 - z_4 &= 2i, & z_2 - z_4 &= 2(-1+i). \end{aligned}$$

Le résidu de f en z_1 est alors (rappelant que $2 = (1-i)(1+i)$) :

$$Res(f, z_1) = \frac{e^{iz_1}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{e^{i(1+i)}}{8i(1+i)} = -\frac{e^{i(1+i)}}{16} i(1-i) = \frac{e^{(-1+i)}}{16}(-1-i).$$

Le résidu de f en z_2 est :

$$Res(f, z_2) = \frac{e^{iz_2}}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} = \frac{e^{i(-1+i)}}{-8i(-1+i)} = -\frac{e^{i(-1+i)}}{16} i(1+i) = \frac{e^{-(1+i)}}{16}(1-i).$$

Le théorème des résidus appliqué à f et à Γ donne :

$$\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{4+z^4}\,dz = 2i\pi \frac{-ie^{-1}}{8}(\cos 1 + \sin 1) = \frac{\pi e^{-1}}{4}(\cos 1 + \sin 1)\,.$$

Paramétrons l'arc Γ_2 : $z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Donc :

$$\int_{\Gamma_2} \frac{e^{iz}}{4+z^4}\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{iR(\cos t + i \sin t)}}{R^4 e^{4it} + 4} iRe^{it} dt$$

et on a :

$$\left|\int_{\Gamma_2} \tfrac{e^{iz}}{4+z^4}\,dz\right| \leq R \int_0^\pi \frac{e^{-R\sin t}}{|\,R^4 e^{4it} + 4\,|}\,dt.$$

Pour $t \in [0, \pi]$, $e^{-R\sin t} \leq 1$. De plus, $\mid R^4 e^{4it} + 4 \mid \geq R^4 - 4$. Finalement,

$$\left| \int_{\Gamma_2} \frac{e^{iz}}{4+z^4}\, dz \right| \leq \frac{R}{R^4 - 4}$$

et donc $\displaystyle\int_{\Gamma_2} \frac{e^{iz}}{4+z^4}\, dz$ tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini. Il reste donc du **théorème des résidus**, après avoir fait tendre R vers l'infini .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^4+4}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x^4+4}\, dx = \frac{\pi e^{-1}}{4} (\cos 1 + \sin 1)$$

et par conséquent :

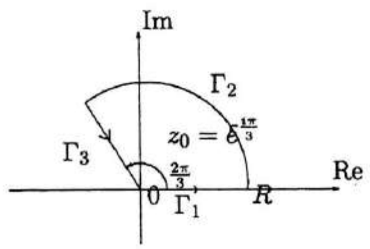
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+4}\, dx = \frac{\pi e^{-1}}{8} (\cos 1 + \sin 1).$$

Exercice 6. On cherche à calculer $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\, dx$.

(1) Vérifier que l'intégrale I est bien définie.

(2) On pose $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$. Trouver les pôles de f.

(3) Appliquer le théorème des résidus à la fonction f sur le **contour suivant, avec $R > 1$** :



(4) Montrer que $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\, dz = (1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}) \int_0^R \frac{1}{1+x^3}\, dx.$

(5) Montrer que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz = 0$. 6) En déduire que $I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Corrigé 6. (1) La fonction $\frac{1}{1+x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus $1 + x^3 > x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Donc $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^3}\, dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\, dx < +\infty$. Ainsi I est bien définie.

(2) Les pôles de f sont les solutions de $1 + z^3 = 0$. On trouve donc $z_k = e^{\frac{(1+2k)i\pi}{3}}$, **pour $k = 0, 1, 2$.**

(3) Le seul pôle inclus dans $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{3} \Gamma_i$ est $z_0 = e^{\frac{i\pi}{3}}$. Donc le **théorème des résidus** donne :

$$\sum_{i=0}^{3} \int_{\Gamma_i} f(z)\, dz = 2i\pi \mathrm{Res}(f, z_0).$$

(4) On a $\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^3}\,dx$.
On paramètre Γ_3 par $z(t) = te^{\frac{2i\pi}{3}}$, avec t qui décroit de R à 0. On trouve $dz = e^{\frac{2i\pi}{3}}\,dt$. Donc :

$$\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = \int_R^0 \frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{1+t^3e^{\frac{6i\pi}{3}}}\,dt = -e^{\frac{2i\pi}{3}}\int_0^R \frac{1}{1+t^3}\,dt.$$

Donc $\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = (1-e^{\frac{2i\pi}{3}})\int_0^R \frac{1}{1+x^3}\,dx$.

(5) On paramètre Γ_2 par $z(t) = Re^{it}$, avec t qui varie de 0 à $\frac{2\pi}{3}$. Donc $dz = Rie^{it}dt$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{Rie^{it}}{1+R^3e^{3it}}\,dt,\\ \|\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz\| &\le \frac{2\pi}{3}R \max_{t\in[0,\frac{2\pi}{3}]} \frac{1}{\|1+R^3e^{3it}\|},\\ &\le \frac{2\pi}{3}\frac{R}{R^3-1}.\end{aligned}$$

Donc $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0$.

(6) On a $\mathrm{Res}(f,z_0) = \{\frac{z-z_0}{1+z^3}\}_{z=z_0}$. Or $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)}$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,z_0) &= \{\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\}_{z=z_0},\\ &= \{\frac{1}{(z+1)(z-e^{\frac{-i\pi}{3}})}\}_{z=e^{\frac{i\pi}{3}}},\\ &= \frac{1}{(1+e^{\frac{i\pi}{3}})2i\sin(\frac{\pi}{3})}.\end{aligned}$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans l'équation (1), on trouve que :

$$\begin{aligned}(1-e^{\frac{2i\pi}{3}})I &= \frac{2i\pi}{(1+e^{\frac{i\pi}{3}})2i\sin(\frac{\pi}{3})}\\ I &= \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{3})(1+e^{\frac{i\pi}{3}}-e^{\frac{2i\pi}{3}}-e^{i\pi})}\\ &= \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{3})(2+e^{\frac{i\pi}{2}}(e^{-\frac{i\pi}{6}}-e^{\frac{i\pi}{6}}))}\\ &= \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{3})(2+2\sin(\frac{\pi}{6}))}\\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

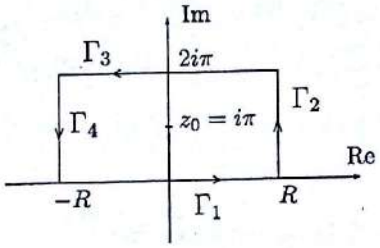
Exercice 7. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche à calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}\,dx$.

(1) Vérifier que si $\lambda \leq 0$ ou $\lambda \geq 1$, alors la fonction $\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}$ n'est pas intégrable.

(2) Vérifier que si $0 < \lambda < 1$, alors la fonction $\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}$ est intégrable.

(3) On pose $f(z) = \frac{e^{\lambda z}}{1+e^z}$. Quels sont les pôles de f ?

(4) Appliquer le théorème des résidus sur le contour suivant, avec $R > 0$:



(5) Montrer que $\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = (1 - e^{\lambda 2i\pi}) \int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}\,dx$.

(6) Montrer que $\lim_{R\to\infty} |\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz| = \lim_{R\to\infty} |\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz| = 0$.

(7) En déduire que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$.

Corrigé 7. (1) On a $\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. Or, pour $\lambda \geq 1$ la limite de $\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}$ en $+\infty$ n'est pas zéro.
De même pour $\lambda \leq 0$, la limite de $\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}$ en $-\infty$ n'est pas zéro. Donc l'intégrale n'est pas définie pour $\lambda \geq 1$ ou $\lambda \leq 0$.

(2) $\frac{1}{1+e^x} < \frac{1}{e^x}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et donc $\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} < e^{(\lambda-1)x}$ qui est intégrable sur $[0, \infty[$ si $\lambda < 1$.
$\frac{1}{1+e^x} < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et donc $\frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} < e^{\lambda x}$ qui est intégrable sur $]-\infty, 0]$ si $\lambda > 0$.
Donc $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}\,dx$ est définie pour $0 < \lambda < 1$.

(3) Les pôles de f sont donnés par $z \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = -1$. C'est à dire $z = (2k+1)i\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(4) Le seul pôle de f contenu dans $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{4} \Gamma_i$ est $z_0 = i\pi$. Donc

$$\oint_{\Gamma} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma_i} f(z)\,dz = 2i\pi \mathrm{Res}(f, z_0).$$

(5) Soit $I_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}\,dx$. Alors $\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = I_R$.
De plus une paramétrisation de Γ_3 est $z(t) = 2i\pi - t$, avec $t \in [-R, R]$.
Donc $\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{\lambda(2i\pi - t)}}{1+e^{(2i\pi - t)}}\,dt = -e^{\lambda 2i\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-\lambda t}}{1+e^{-t}}\,dt$. Après un changement de variable, on trouve donc que :

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = (1 - e^{\lambda 2i\pi}) I_R.$$

(6) On paramètre Γ_2 par $z(t) = R+it$, $t \in [0, 2\pi]$. Donc $\int_{\Gamma_2} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{\lambda(R+it)}}{1+e^{R+it}} i\, dt = e^{\lambda R} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\lambda it}}{1+e^R e^{it}} i\, dt$.
Donc $\| \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz\| \leq e^{\lambda R} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\|1+e^R e^{it}\|}\, dt \leq 2\pi \frac{e^{\lambda R}}{e^R - 1}$, qui tend vers 0 en l'infini, car $\lambda \in]0, 1[$.

De même, $| \int_{\Gamma_4} f(z)\, dz|$ tend vers 0 en l'infini.

(7) On calcule maintenant $\mathrm{Res}(f, z_0)$. Comme $z_0 = i\pi$ est un pôle d'ordre 1 de f, donc $\mathrm{Res}(f, z_0) = \{\frac{(z-z_0)e^{\lambda z}}{1+e^z}\}_{z=z_0}$. Si on développe e^z autour de $z_0 = i\pi$, on trouve

$$e^z = e^{i\pi} + e^{i\pi}(z - i\pi) + \frac{e^{i\pi}}{2!}(z - i\pi)^2 + \cdots$$

Ainsi $1 + e^z = -(z - i\pi) - \frac{(z-i\pi)^2}{2} - \cdots = -(z - i\pi)(1 + \frac{z-i\pi}{2} + \cdots)$, et $\mathrm{Res}(f, z_0) = -e^{\lambda i\pi}$.

On trouve donc $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x}\, dx = 2i\pi \frac{e^{\lambda i\pi}}{e^{2\lambda i\pi} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{\lambda\pi i} - e^{-\lambda\pi i}} = \frac{\pi}{\sin(\lambda\pi)}$.

Exercice 8. Calculer, en utilisant le théorème des résidus

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$$

Corrigé 8. La fonction $f(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$ est paire. Elle est continue et bornée sur $[0, 1]$. De plus, $1 + x^2 \geq x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, et donc $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$, $\forall x \geq 1$. Finalement, $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, $\forall x \geq 1$ et f est intégrable. Il est donc justifié de calculer l'intégrale.

Posons $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$. Cette fonction est holomorphe dans $\mathbb{C} - \{-i, +i\}$, les points $-i$ et $+i$ étant les pôles de f, chacun d'ordre 2.

On tente d'appliquer le théorème des résidus avec le contour fermé union des arcs ($R > 1$)

$$\Gamma_R = \{z = t : t \in \mathbb{R},\ -R \leq t \leq R\}, \qquad \Gamma_C = \{z = Re^{it} : 0 \leq t \leq \pi\},$$

parcouru dans le sens positif (ici des t croissants). Le seul pôle entouré par cet arc est le point $z = i$ et on a

$$Res(f, z = i) = \left| \frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+i)^2} \right|_{z=i} = \left| \frac{2iz}{(z+i)^3} \right|_{z=i} = \frac{1}{4i}.$$

Montrons que $\int_{\Gamma_C} f(z)dz$ tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini. On a, pour $z = Re^{it} \in \Gamma_C$:

$$|f(z)| = R^2 \frac{|e^{2it}|}{|(1 + R^2 e^{2it})^2|} \leq \frac{R^2}{(R^2 - 1)^2}$$

et donc

$$\left|\int_{\Gamma_C} f(z)dz\right| \leq \pi \frac{R^3}{(R^2 - 1)^2}$$

qui tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini.

Par le théorème des résidus, il reste, en faisant tendre R vers l'infini :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 9. Calculer, en utilisant le théorème des résidus

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Indications :

(1) Montrer que $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ixe^{-ix}}{(1+x^2)^2} dx$.

(2) Utiliser le théorème des résidus avec l'arc fermé $\Gamma_R \cup \Gamma_S$ où $\Gamma_R = \{x \in \mathbb{R} : -R \leq x \leq R\}$ et $\Gamma_S = \{z \in \mathbb{C} : | z | = R, \mathbb{I}m(z) \leq 0\}$, R étant un nombre qui tendra vers l'infini.

Corrigé 9. La fonction $g(x) = \frac{ixe^{-ix}}{(1+x^2)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet, g est continue sur $[-1,1]$ et pour $| x | \geq 1$, $\frac{1}{(1+x^2)^2} \leq \frac{1}{x^4}$, donc $| \frac{ixe^{-ix}}{(1+x^2)^2} | \leq \frac{1}{x^3}$. Ecrivant $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ on a que $\frac{ix \cos x}{(1+x^2)^2}$ est impaire et $\frac{x \sin x}{(1+x^2)^2}$ est paire. On a donc bien $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ixe^{-ix}}{(1+x^2)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2} dx$.

La fonction $f(z) = \frac{ize^{-iz}}{(1+z^2)^2}$ possède deux pôles d'ordre 2, $z_1 = -i$ et $z_2 = i$ et on peut écrire $1 + z^2 = (z-i)(z+i)$.

Seul le pôle $z_1 = -i$ est entouré par le contour donné. Soit $g(z) = ie^{-iz} \frac{z}{(z-i)^2}$; calculons sa dérivée :

$$\begin{aligned}
g'(z) &= ie^{-iz} \left[(-i) \frac{z}{(z-i)^2} + \frac{1(z-i)^2 - z2(z-i)}{(z-i)^4} \right] \\
&= ie^{-iz} \left[(-i) \frac{z}{(z-i)^2} + \frac{-z-i}{(z-i)^3} \right] = ie^{-iz} \left[\frac{(-i)z(z-i) - z - i}{(z-i)^3} \right] \\
&= e^{-iz} \left[\frac{z^2 - 2iz + 1}{(z-i)^3} \right]
\end{aligned}$$

et donc

$$g'(-i) = \frac{-1}{4ei}.$$

Donc $Res(f, -i) = \frac{i}{4e}$.

On montre que, lorsque R tend vers l'infini, $\int_{\Gamma_R} f(z) dz$ tend vers 0. En effet, pour $z(t) = Re^{it}$, $t \in [\pi, 2\pi]$, on a :

$$| f(z) | = | \frac{ize^{-iz}}{(1+z^2)^2} | = R \; | \frac{e^{-iR\cos t + R \sin t}}{(1+R^2 e^{2it})^2} | \leq \frac{R}{(R^2-1)^2}$$

et donc :

$$| \int_{\Gamma_R} f(z) dz | \leq \frac{\pi R^2}{(R^2-1)^2}.$$

Par le théorème des résidus, on tire alors, R tendant vers l'infini .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)^2} dx = -(2i\pi)\frac{i}{4e} = \frac{\pi}{2e}.$$

En effet, le contour donné se parcourt dans le sens négatif, ce qui justifie le changement de signe.

ARITHMETIQUE

Université Félix Houpouet BOIGNY
UFR MI

2012/2013

DEVOIR DE CONTROLE CONTINU
Licence 3ième année : UV de THEORIE DES NOMBRES
1ière SESSION - Mardi 17 juin 2013 - 2h

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{A} = \{f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}\}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques muni du produit de convolution de DIRICHLET : $(f * g)(n) = \sum_{d/n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{dd'=n} f(d)g(d')$.

On note $(T_D(f))(n) = \sum_{d/n} f(d)$ la transformée de DIRICHLET de f, et on rappelle que :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 \; si \; n = 1 \\ 0 \; si \; \exists \; 1 \neq d^2/n \\ (-1)^r \; si \; n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r} \; et \; p_i \neq p_j. \end{cases}$$

étant la fonction de MOBÏUS, l'élément neutre de la loi $*$ vaut : $e(n) = (T_D(\mu))(n) = \begin{cases} 1 \; si \; n = 1 \\ 0 \; sinon \end{cases}$.

1. **Montrer que la convolution est associative.**
2. **On suppose que** $f \in \mathcal{A}$ est multiplicative i.e $f \in \mathcal{M}$, c'est-à-dire que : $f(1) = 1 \; et \; f(mn) = f(m)f(n)$, $\forall (m,n) = 1$. Montrer alors que $f^{-1}(1) = 1$ et que f^{-1} **existe (exprimer pour cela** par récurrence $f^{-1}(n)$ en fonction des $f^{-1}(d)$ où d/n)
Effectuer enfin une récurrence sur mn (en évacuant le cas $mn = 1$) pour établir que : $f^{-1}(mn) = f^{-1}(m)f^{-1}(n)$, $\forall (m,n) = 1$. D'où l'on pourra conclure que : f^{-1} est **multiplicative** (on sera amené a utiliser le fait que $[(f^{-1} * f)(n)][(f^{-1} * f)(m)] = 0$).
3. **<u>Application</u>** : Considérons $f(n) = (-1)^{n+1}$: Montrer que $f \in \mathcal{M}$. Déterminer f^{-1} et **l'exprimer en fonction de** μ. On pourra calculer $f^{-1}(p^\alpha)$ où p est premier (on discernera les cas $p = 2 \; et \; p \neq 2$).

EXERCICE 2

a) **Soit** $k \leq n$ **des entiers naturels, montrez que** $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est un entier naturel. (Utiliser **la formule sur** $v_p(n!)$ et le fait que si $\frac{P}{Q} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} \in \mathbb{Q}$, alors $\frac{p}{q} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \alpha_i \geq 0$).

b) **Montrer que 1009 est un nombre premier.** 713 est-il résidu quadratique modulo 1009.

c) **Soit le nombre** $x = [\overline{1}]$.
- **Ce nombre est t'il réduit** ? que vaut son conjugué x' (c'est-à-dire l'autre racine du **polynôme de degré 2** dont x est racine). Que vaut le produit xx' ?
- **Calculer** x en résolvant une équation du second degré. x s'appelle le nombre **d'or. Calculer les six premières réduites de x. Que constatez-vous au niveau des numérateurs et dénominateurs** ? Exprimez cela en termes de suite : C'est la suite **de FIBONACCI.** En déduire la réduite : $\frac{p_{30}}{q_{30}}$.

EXERCICE 3

a) **Résoudre la congruence** : $125x \equiv 275 \; mod 450$. Combien trouvez-vous de solution ?

b) **Résoudre le système congruentiel** : $\begin{cases} x \equiv -3 \; mod 12 \\ x \equiv 3 \; mod 5 \\ x \equiv 7 \; mod 49 \end{cases}$

c) **Donner le DFC de** $\sqrt{31}$ **donnez-en la** $8^{ième}$ **réduite et donner une majoration de** $\left|\sqrt{31} - \frac{p_8}{q_8}\right|$

-FIN-

9

	UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY	
UFR LMI	Examen de 1ère session	2014-2015
L3 MATHS	Théorie des nombres	Durée 2 H

Exercice 1

Soient $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $a \geq 2$ et $m \leq n$. On note $d = (a^n - 1) \wedge (a^m - 1)$.

1. Montrer que $a^n \equiv a^r [a^m - 1]$ pour un certain entier positif $r < m$.
2. En déduire que $d = (a^r - 1) \wedge (a^m - 1)$, en suite que $d = a^{n \wedge m} - 1$.
3. A quelle condition $a^m - 1 | a^n - 1$?

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

a) $93\,x - 21\,y = -3$

b) $63\,x + 7\,y = 8$

c) $176x + 44y = 88$.

Exercice 3

A) 1) Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à -1 modulo 6.

2) Soit n un entier > 2. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui ne sont pas congrus à 1 modulo n.

B) 1) a) Enonces et démontrer le Petit Théorème de Fermat.

b) Justifier la méthode RSA en cryptographie, en utilisant le Théorème d'Euler.

2) a) Montrer que si p est un nombre premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$, il n'existe pas d'entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a^2 + 1$ soit multiple de p.

b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

UNISAT	Examen de 1ère session	2015-2016
L3 MATHS	Théorie des nombres	Durée 3 H

Exercice 1

1) Déterminer dans $\mathbb{Z}^2$ les solutions de l'équation $82x + 52y = 2$.

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

a) $45\,x + 85\,y = 10$

b) $246\,x + 116\,y = 9$.

3) Résoudre le système $\begin{cases} x \wedge y = 18 \\ x \vee y = 540 \end{cases}$ avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$

Exercice 2

1. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à -1 modulo 6. (Indication : si $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers, considérer un facteur premier de $6p_1 \ldots p_r - 1$.)

2. Soit n un entier strictement positif. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui ne sont pas congrus à 1 modulo n.

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $6 | n(n+1)(n+2)$.

Exercice 3

1) a) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est un nombre premier.

b) Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un intègre si et seulement si n est un nombre premier.

2) a) Calculer $(3^{123} - 5) \wedge 25$.

b) Calculer le pgcd de $2^{445} + 7$ et 15.

Université FHB
UFR-MI
Licence 3 : S M
Année académique 2015 – 2016

Examen de de théorie des nombres,
session 2016, 2-h30

Exercice 1 : (3-points)

Calculer les *pgcd* suivants :

1. $(4^{123} - 15) \wedge 35$
2. $(2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2 : (6-points)

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1. $35x + 125y = 5$
2. $123x - 54y = 6$
3. $\begin{cases} x \cdot y & = & 327 \\ x \vee y & = & 109 \end{cases}$

Exercice 3 : (4-points) Démontrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 4 : Cryptogaphie, méthode RSA (7-points)

Bob donne sa clef publique $\sigma \in \mathcal{S}(\Omega)$ à Alice. $\mathcal{S}(\Omega)$ est l'ensemble des permutations de l'ensemble

$\Omega = \{0, 1, \cdots, 9\} \cup \{A, B, \cdots, Z\}$ et σ est le produit de cycles

$$\sigma = (1, N, S, T)(0, A, E)(7, N, M)(1, I, 2, K, 7)(3, B, H, Z)$$

1. Ecrire σ en produit de cycles à supports disjoints.
2. Alice envoie le message suivant à Bob :

HOMM0 0I Z0UR0UT0 EMM00 KAIN

Découvrez le message que Bob lira.

UNIVERSITE FELIX HOUPHOUET BOIGNY		
UFR LMI	Examen de $2^{ème}$ session	2015-2016
L3 MATHS	Théorie des nombres	Durée 2 H 30

Exercice 1

Soient $a, m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $a \geq 2$ et $m \leq n$. On note $d = (a^n - 1) \wedge (a^m - 1)$.

1. Montrer que $a^n \equiv a^r [a^m - 1]$ pour un certain entier positif $r < m$.
2. En déduire que $d = (a^r - 1) \wedge (a^m - 1)$, en suite que $d = a^{n \wedge m} - 1$.
3. A quelle condition $a^m - 1 | a^n - 1$?

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations

a) $39\,x - 12\,y = 3$

b) $16x + 44y = 22$

c) $35\,x + 63\,y = 14$.

Exercice 3

A) 1) a) Enoncez et démontrer le Petit Théorème de Fermat.

b) Enoncez et démontrer le Théorème d'Euler et justifier la méthode RSA en cryptographie.

B) Alice veut recevoir des messages chiffrés en utilisant le RSA

Elle choisit $p = 41$ et $q = 29$

1) Déterminer le module N et $\varphi(N)$.

Elle choisit $e = 13$ et calcule sa clé privée d.

2) Déterminer d la clé privée d'Alice (modulo $\varphi(N)$).

Bob veut envoyer le message S C I E N C E S à Alice.

3) En utilisant le code ASCII, quel est son message?

caractère	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
code	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77

caractère	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
code	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

4) Trouver le chiffré de son message après avoir regroupé en blocs de trois chiffres.

5) Comment Alice déchiffre-t-elle le message de Bob ? Déchiffrer le.

Exercice 4

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout entier k compris entre 1 et $p-1$, $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ est divisible par p.
2. En déduire que pour tous entiers a et b, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$.
3. Montrer que pour tout entier n, $n^p \equiv n \pmod p$ (c'est le petit théorème de Fermat.)
4. Qu'obtient-on si p ne divise pas n ?

1 Fiche 1 Divisibilité, division euclidienne

Exercice 1: Combien 17! admet-il de diviseurs ?

Exercice 2 Trouver le reste de la division par 17 du nombre 100^{1000}.

Exercice 3 Sachant que l'on a $94268 = 355 \times 265 + 193$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 94268 par chacun des nombres 265 et 355.

Exercice 4 Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Exercice 5 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24.$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Exercice 6 Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Exercice 7

1. Pour tout couple de nombres réels (x, y) montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a la relation
$$(*)\ x^n - y^n = (x-y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$
2. Soit (a, b, p) des entiers éléments de $\mathbb{N}$. Montrer que s'il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $b = a + pl$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $b^n = a^n + pm$.
3. Soient a, b, p des entiers éléments de $\mathbb{N}$, en utilisant la question 2, montrer que si $a - b$ est divisible par p,
$$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$$
est aussi divisible par p. En déduire, à l'aide de la question 2 et de la formule $(*)$, que si $a - b$ est divisible par p^n i.e. il existe un entier $l \in \mathbb{N}$ tel que $a - b = l.p^n$, alors $a^p - b^p$ est divisible par p^{n+1}.

Exercice 8

1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout nombre impair est 1.
2. Montrer de même que tout nombre pair vérifie $x^2 = 0[8]$ ou $x^2 = 4[8]$.
3. Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $2(ab + bc + ca)$.
4. En déduire que ces deux nombres ne sont pas des carrés puis que $ab + bc + ca$ non plus.

Indications

Exercice 1 Il ne faut surtout pas chercher à calculer $17! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16 \times 17$, mais profiter du fait qu'il est déjà "presque" factorisé.

Exercice 2 Il faut travailler modulo 17, tout d'abord réduire 100 modulo 17. Se souvenir que si $a \equiv b[n]$ alors $a^k \equiv b^k[n]$. Enfin calculer ce que cela donne pour les exposants $k = 1, 2, 3, \ldots$ en essayant de trouver une règle générale.

Exercice 3 Le reste d'une division euclidienne est plus petit que le quotient !

Exercice 4 Utiliser les modulos (ici modulo 8), un entier est divisible par 8 si et seulement si il est équivalent à 0 modulo 8. Ici vous pouvez commencer par calculer $7^n[8]$.

Exercice 5 Constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement des diviseurs de2, ... (tous distincts).

Exercice 6 Ecrire $n = p^2 + q^2$ et étudier les différents cas de parité de p et q.

Exercice 7

1. On pourra écrire de deux manières différentes la quantité $y(x^n - y^n) + (x - y)x^n$.
2. Utiliser la formule $(*)$.
3. Utiliser la question 2 et la formule $(*)$.

Exercice 8

1. Écrire $n = 2p + 1$.
2. Écrire $n = 2p$ et discuter selon que p est pair ou impair.
3. Utiliser la première question.
4. Par l'absurde supposer que cela s'écrive comme un carré, par exemple $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$ puis discuter selon que n est pair ou non.

2

Indications

Exercice 1 Il ne faut surtout pas chercher à calculer $17! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16 \times 17$, mais profiter du fait qu'il est déjà "presque" factorisé.

Exercice 2 Il faut travailler modulo 17, tout d'abord réduire 100 modulo 17. Se souvenir que si $a \equiv b[n]$ alors $a^k \equiv b^k[n]$. Enfin calculer ce que cela donne pour les exposants $k = 1, 2, 3, \ldots$ en essayant de trouver une règle générale.

Exercice 3 Le reste d'une division euclidienne est plus petit que le quotient !

Exercice 4 Utiliser les modulos (ici modulo 8), un entier est divisible par 8 si et seulement si il est équivalent à 0 modulo 8. Ici vous pouvez commencer par calculer $7^n[8]$.

Exercice 5 Constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement des diviseurs de2, ... (tous distincts).

Exercice 6 Ecrire $n = p^2 + q^2$ et étudier les différents cas de parité de p et q.

Exercice 7

1. On pourra écrire de deux manières différentes la quantité $y(x^n - y^n) + (x - y)x^n$.
2. Utiliser la formule (*).
3. Utiliser la question 2 et la formule (*)

Exercice 8

1. Écrire $n = 2p + 1$.
2. Écrire $n = 2p$ et discuter selon que p est pair ou impair.
3. Utiliser la première question.
4. Par l'absurde supposer que cela s'écrive comme un carré, par exemple $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$ puis discuter selon que n est pair ou non.

Exercice 1: Combien 17! admet-il de diviseurs ?

Indication

Il ne faut surtout pas chercher à calculer $17! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 16 \times 17$, mais profiter du fait qu'il est déjà "presque" factorisé.

Correction Écrivons la décomposition de $17! = 1.2.3.4 \ldots 17$ en facteurs premiers. $17! = 2^{15}.3^6.5^3.7^2.11.13.17$. Un diviseur de 17! s'écrit $d = 2^\alpha.3^\beta.5^\gamma.7^\delta.11^\epsilon.13^\eta.17^\mu$ avec $0 \leq \alpha \leq 15$, $0 \leq \beta \leq 6$, $0 \leq \gamma \leq 3$, $0 \leq \delta \leq 2$, $0 \leq \epsilon \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$. De plus tout nombre d de cette forme est un diviseur de 17!. Le nombre de diviseurs est donc $(15+1)(6+1)(3+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 10\,752$.

Exercice 2 Trouver le reste de la division par 17 du nombre 100^{1000}.

Indication Il faut travailler modulo 17, tout d'abord réduire 100 modulo 17. Se souvenir que si $a \equiv b[17]$ alors $a^k \equiv b^k[17]$. Enfin calculer ce que cela donne pour les exposants $k = 1, 2, 3, \ldots$ en essayant de trouver une règle générale.

Correction Il sagit de calculer 100^{1000} modulo 13. Tout d'abord $100 \bmod 17 = 15$

$100 \equiv 15[17]$ donc $100^{1000} \equiv 15^{1000}[17]$. Or $15^2 \equiv 4[17]$, $15^4 \equiv 16[17] \equiv -1[17]$. Donc $15^{1000} \equiv 15^{4\times 250} \equiv (-1)^{250} \equiv 1[17]$.

$100^{1000} \bmod 17 = 1$.

Exercice 3 Sachant que l'on a $94268 = 354 \times 265 + 458$, déterminer, sans faire la division, le reste de la division du nombre 94268 par chacun des nombres 265 et 354.

Indication Attention le reste d'une division euclidienne est plus petit que le quotient !

Correction La seule chose à voir est que pour une division euclidienne le reste doit être plus petit que le quotient. Donc les divisions euclidiennes s'écrivent : $94268 = 265 \times 354 + 458 = 265 \times 354 + 265 + 193 = 265 \times 355 + \boxed{193}$ et

$94268 = 265 \times 354 + 458 = 265 \times 354 + 354 + 104 = 266 \times 354 + \boxed{104}$.

Exercice 4 Démontrer que le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 si n est impair ; dans le cas n pair, donner le reste de sa division par 8.

Indication Utiliser les modulos (ici modulo 8), un entier est divisible par 8 si et seulement si il est équivalent à 0 modulo 8. Ici vous pouvez commencer par calculer $7^n[8]$.

Correction Raisonnons modulo 8 :

$$7 \equiv -1 \pmod 8.$$

Donc

$$7^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \pmod 8.$$

Le reste de la division euclidienne de $7^n + 1$ par 8 est donc $(-1)^n + 1$ donc Si n est impair alors $7^n + 1$ est divisible par 8. Et si n est pair $7^n + 1$ n'est pas divisible par 8.

Exercice 5 Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24.$$

3

$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Correction Il suffit de constater que pour 4 nombres consécutifs il y a nécessairement : un diviseur de 2, un diviseur de 3, un diviseur de 4 (tous distincts). Donc le produit de 4 nombres consécutifs est divisible par $2 \times 3 \times 4 = 24$.

Exercice 6 Montrer que si n est un entier naturel somme de deux carrés d'entiers alors le reste de la division euclidienne de n par 4 n'est jamais égal à 3.

Correction

Ecrire $n = p^2 + q^2$ et étudier le reste de la division euclidienne de n par 4 en distinguant les différents cas de parité de p et q.

Exercice 7

Correction

Pour 2 Si p divise $b - a$ alors p divise aussi $b^n - a^n$ d'après la formule (*).

Pour 3 On utilise le résultat de la question précédente avec $n = p - k - 1$ pour écrire b^{p-k-1} en fonction de a^{p-k-1} modulo p dans $\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1}$. On peut alors conclure.

$b^m = a^m + (b-a)\sum_{l=0}^{m-1} a^l b^{m-l-1}$

$\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k \left(a^{n-k-1} + (b-a)\sum_{l_k=0}^{n-k-2} a^{l_k} b^{n-k-1-l_k-1}\right) =$

$\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} a^k \left(a^{p-k-1} + (b-a)\sum_{l_k=0}^{p-k-2} a^{l_k} b^{p-k-1-l_k-1}\right) =$

$= \sum_{k=0}^{p-1} a^k a^{p-k-1} + \sum_{k=0}^{p-1} a^k (b-a)\sum_{l_k=0}^{p-k-2} a^{l_k} b^{p-k-1-l_k-1}$

$= pa^{p-1} + (b-a)\sum_{k=0}^{p-1} a^k \sum_{l_k=0}^{p-k-2} a^{l_k} b^{p-k-1-l_k-1}$

multiple de p.

Exercice 8

Soit n un nombre impair, alors il s'écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Maintenant $n^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4p(p+1) + 1$. Donc $n^2 \equiv 1[8]$.

1. Si n est pair alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Et $n^2 = 4p^2$. Si p est pair alors p^2 est pair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 8, donc $n^2 \equiv 0[8]$. Si p est impair alors p^2 est impair et donc $n^2 = 4p^2$ est divisible par 4 mais pas par 8, donc $n^2 \equiv 4[8]$.

2. Comme a est impair alors d'après la première question $a^2 \equiv 1[8]$, et de même $c^2 \equiv 1[8]$, $c^2 \equiv 1[8]$. Donc $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3[8]$. Pour l'autre reste, écrivons $a = 2p+1$ et $b = 2q+1$, $c = 2r+1$, alors $2ab = 2(2p+1)(2q+1) = 8pq + 4(p+q) + 2$. Alors $2(ab+bc+ca) = 8pq + 8qr + 8pr + 8(p+q+r) + 6$, donc $2(ab+bc+ca) \equiv 6[8]$.

3. Montrons par l'absurde que le nombre $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas le carré d'un nombre entier. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^2 + b^2 + c^2 = n^2$. Nous savons que $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3[8]$. Si n est impair alors $n^2 \equiv 1[8]$ et si n est pair alors $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$. Dans tous les cas n^2 n'est pas congru à 3 modulo 8. Donc il y a une contradiction. La conclusion est que l'hypothèse de départ est fausse donc $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas un carré. Le même type de raisonnement est valide pour $2(ab+bc+ca)$.

4

Pour $ab + bc + ca$ il faut rafiner un peut l'argument. Si $ab + bc + ca = n^2$ alors selon la parité de n nous avons $2(ab + bc + ca) \equiv 2n^2 \equiv 2[8]$ ou à $0[8]$. Nous remarquons enfin que ab, bc; ca sont trois nombres impairs, et donc leur somme est impaire. Par conséquent n est impair (sinon n^2 serait pair), donc $ab + bc + ca \equiv n^2 \equiv 1[8]$. Ce qui aboutit à une contradiction. Nous avons montrer que $ab + bc + ca$ n'est pas un carré.

1 Fiche 2 pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

Exercice 1 Calculer le pgcd des nombres suivants :

1. 1026, 612.
2. 360, 780, 150.
3. 540, 9090, 2250.

Exercice 2
Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Exercice 3 Calculer par l'algorithme d'Euclide : $18480 \wedge 9828$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

Exercice 4 Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \operatorname{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{Z}$:
a) $1665x + 1035y = 45$ b) $1665x + 3735y = 45$
c) $148x + 332y = 12$.

Fiche 2 pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide
Indications
Exercice 1 Il s'agit ici d'utiliser la décompo ,ition des nombres en facteurs premiers.
Exercice 2 Soient a, b deux entiers de pgcd 18 et de somme 360. Soit a', b' tel que $a = 18a'$ et $b = 18b'$. Alors considérer leur somme.

1

2 Fiche 2 pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide

Correction

Exercice 1

1. $1026 = 2 \times 3^3 \times 19$ et $612 = 2^2 \times 3^2 \times 17$
   donc le pgcd de 1026 et 612 est $2 \times 3^2 = 18$.
   $\text{pgcd}(1026, 612) = 18$
2. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$ et $150 = 2 \times 3 \times 5^2$ et donc le pgcd de ces trois nombres est $2 \times 3 \times 5 = 30$.
   $\text{gcd}(360, 780, 150) = 30$
3. $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$; $9090 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 101$ et $2250 = 2 \times 3^2 \times 5^3$

$\text{pgcd}(540, 9090, 2250) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90.$

Exercice 2

Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6480.

Soient a, b deux entiers de pgcd 18 et de somme 360. Soit a', b' tel que $a = 18a'$ et $b = 18b'$. Alors a' et b' sont premiers entre eux, et leur somme est $360/18 = 20$.

Nous pouvons facilement énumérer tous les couples d'entiers naturels (a', b') $(a' \leq b')$ qui vérifient cette condition, ce sont les couples :

$$(1,19), (3,17), (7,13), (9,11), (11,9), (13,7), (17,3), (19,1).$$

Pour obtenir les couples (a, b) recherchés ($a \leq b$, puis $b \leq a$) il suffit de multiplier les couples précédents par 18 :

$$(18,342), (54,306), (126,234), (162,198),$$
$$(198,162), (234,126), (306,54), (342,18).$$

$(a \wedge b)(a \vee b) = ab$
$a \vee b = \dfrac{6480}{18} = 360$
$18 = 2 \times 3^2$; $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
$a = 2^{\alpha_1} \times 3^{\alpha_2} \times 5^{\alpha_3}$ et $b = 2^{\beta_1} \times 3^{\beta_2} \times 5^{\beta_3}$
avec $(\alpha_1; \beta_1) = (1;3)$ ou $(3;1)$, $(\alpha_2; \beta_2) = (2;2)$
et $(\alpha_3; \beta_3) = (0;1)$ ou $(1;0)$,
$(a,b) \in \{(2 \times 3^2; 2^3 \times 3^2 \times 5), (2 \times 3^2 \times 5; 2^3 \times 3^2), (2^3 \times 3^2 \times 5; 2 \times 3^2), (2^3 \times 3^2; 2 \times 3^2 \times 5),\}$.

Exercice 3 Calculer par l'algorithme d'Euclide : $18480 \wedge 9828$. En déduire une écriture de 84 comme combinaison linéaire de 18480 et 9828.

$18480 - 9828 = 8652$

2

$9828 - 8652 = 1176$
$8652 - 7 \times 1176 = 420$
$1176 - 2 \times 420 = 336$
$420 - 336 = 84$
$336 - 4 \times 84 = 0$

pgcd $(18480, 9828) = 84$;
$25 \times 18480 + (-47) \times 9828 = 84$.

Exercice 4 Notons $a = 1\,111\,111\,111$ et $b = 123\,456\,789$.

1. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
2. Calculer $p = \text{pgcd}(a, b)$.
3. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = p$.

Correction

1. $a = 9b + 10$.
2. Calculons le pgcd par l'algorithme d'Euclide. $a = 9b + 10$, $b = 12345678 \times 10 + 9$, $10 = 1 \times 9 + 1$, $10 = 1 \times 9 + 1$. Donc le pgcd vaut 1;
3. Nous reprenons les équations précédentes en partant de la fin: $1 = 10 - 9$, puis nous remplaçons 9 grâce à la deuxième équation de l'algorithme d'Euclide: $1 = 10 - (b - 12345678 \times 10) = -b + 1234679 \times 10$. Maintenant nous remplaçons 10 grâce à la première équation: $1 = -b + 12345679(a - 9b) = 1234579a - 111111112b$.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{Z}$:
a) $1665x + 1035y = 45$ b) $1665x + 3735y = 45$ c) $148x + 332y = 12$.

$3735/45 = 83$
$83 \times 45 = 3735$
$1665\,(83u + 9) + 3735\,(-37u - 4) = 45$
$37\,(83u + 9) + 83\,(-37u - 4) = 1$

En divisant par 45 nous obtenons l'équation équivalente : $37x + 83y = 1$. Comme le pgcd de 37 et 83 est 1, donc d'après le théorème de Bézout cette équation a des solutions. Par exemple une solution particulière est $(x_0, y_0) = (9, -4)$. Les solutions sont exactement les couples $(x, y) = (x_0 - 83k, y_0 + 37k)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

4 Fiche 3 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Indications

Exercice 1 Pour 1 et 3 utiliser l'égalité

$$x^b - 1 = (x-1)\left(x^{b-1} + \cdots + x + 1\right).$$

Exercice 2 Raisonner par l'absurde et utiliser le théorème de Gauss.

Exercice 3 Écrire

$$C_p^i = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-(i+1))}{i!}$$

et utiliser le théorème de Gauss. Raisonner avec les modulos, c'est-à-dire prouver $a^p \equiv a[p]$.

Exercice 4

1. Il faut être très soigneux : n est fixé une fois pour toute, la récurrence se fait sur $k \in \mathbb{N}$.
2. Utiliser la question précédente avec $m = n + k$.
3. Par l'absurde, supposer qu'il y a seulement n nombres premiers, considérer $n+1$ nombres du type F_i. Appliquer le "principe du tiroir" : *si vous avez $n+1$ chaussettes rangées dans n tiroirs alors il existe (au moins) un tiroir contenant (plus de) deux chaussettes.*

Exercice 5 Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2\ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

1. X est non vide donner un exemple .
4. Par l'absurde

Exercice 6 Raisonner par contraposition (ou par l'absurde) : supposer que n n'est pas de la forme 2^k, alors n admet un facteur irréductible $p > 2$. Utiliser aussi $x^p + 1 = (x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{p-1})$ avec x bien choisi.

5 Fiche 3 Nombres premiers, nombres premiers entre eux

Corrigés

Exercice 1 Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer :

1. $(2^a-1)|(2^{ab}-1)$;
2. $(2^a-1)\wedge(2^b-1)=(2^{a\wedge b}-1)$;
3. $(2^a-1$ premier $)\Rightarrow(a$ premier $)$.Réciproque?

Correction

Pour 1. $2^{ab}-1=(2^a)^b-1=(2^a-1)\left((2^a)^{b-1}+\cdots+2^a+1\right)$

Pour 2. $(2^a-1)\wedge(2^b-1)=(2^{a\wedge b}-1)$?

- comme a est un multiple de $a\wedge b$, d'après 1, $2^{a\wedge b}-1$ divise 2^a-1; idem pour 2^b-1.

Donc $2^{a\wedge b}-1$ divise $(2^a-1)\wedge(2^b-1)$

- Si d divise 2^a-1 et 2^b-1 alors d divise $(2^a-1)\wedge(2^b-1)$

soit $\delta=a\wedge b$ $\quad \exists x,y\in\mathbb{Z}$

$\delta=ax+by$

$2^\delta=2^{ax+by}=2^{ax}2^{by}=(2^a)^x(2^b)^y=(dq+1)^x(dt+1)^y=1+ds$

d divise $2^\delta-1$

donc $(2^a-1)\wedge(2^b-1)$ divise $2^\delta-1$

Pour 3. Montrons plutôt la contraposée. Soit $p=ab$ un entier avec $a,b\in\mathbb{N}^*$. Montrons que 2^p-1 n'est pas premier.

Nous savons que
$$x^b-1=(x-1)(x^{b-1}+\cdots+x+1),$$
pour $x=2^a$ nous obtenons :
$$2^p-1=2^{ab}-1=(2^a)^b-1=(2^a-1)\left(2^{a(b-1)}+\cdots+2^a+1\right).$$
De plus 2^a-1 n'est ni 1 ni 2^{ab} donc nous avons décomposé 2^p-1 en produit d'entiers différents de 1. Donc 2^p-1 n'est pas premier.

Par contraposition nous obtenons que si 2^p-1 est premier alors p est premier.

$2^7-1=127$ est premier; 7 est premier

Réciproque? fausse en général car

11 est premier $2^{11}-1=2047=23\times 89$ n'est pas premier

Exercice 2 Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a+b$ et ab.

Correction

Soit a et b des entiers premiers entre eux. Raisonnons par l'absurde et supposons que ab et

$a+b$ ne sont pas premiers entre eux. Il existe alors δ un nombre premier divisant ab et $a+b$. L'entier δ ne peut diviser a et b car a et b sont premiers entre eux. Par exemple supposons que δ ne divise pas b cela implique que δ et b sont premiers entre eux.

D'après le théorème de Gauss, comme δ divise ab et δ premier avec b alors δ divise a.

Maintenant δ divise a et divise $a+b$ alors δ divise $a+b-a=b$. δ est un facteur premier de a et de b ce qui est absurde.

Exercice 3 Soit p un nombre premier.

1. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}, 0 < i < p$ on a :

$$C_p^i \text{ est divisible par } p.$$

2. Montrer par récurence que :

$$\forall p \text{ premier}, \forall a \in \mathbb{N}^*, \text{ on a } a^p - a \text{ est divisible par } p.$$

Indication
Écrire

$$C_p^i = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$

et utiliser le théorème de Gauss.

Raisonner avec les modulos, c'est-à-dire prouver $a^p \equiv a[p]$.

Correction

1. Étant donné $0 < i < p$, nous avons

$$C_p^i = \frac{p!}{i!(p-i)!} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-(i+1))}{i!}$$

Comme C_p^i est un entier alors $i!$ divise $p(p-1)\dots(p-(i+1))$. Mais $i!$ et p sont premiers entre eux (en utilisant l'hypothèse $0 < i < p$). Donc d'après le théorème de Gauss: $i!$ divise $(p-1)\dots(p-(i+1))$, autrement dit il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \times i! = (p-1)\dots(p-(i+1))$. Maintenant nous avons $C_p^i = pk$ donc p divise C_p^i.

2. Il s'agit de montrer le petit théorème de Fermat: pour p premier et $a \in \mathbb{N}^*$, alors $a^p \equiv a[p]$. Fixons p. Soit l'assertion

$$(\mathcal{H}_a) \quad a^p \equiv a[p].$$

Pour $a=1$ cette assertion est vraie ! Étant donné $a \leq 1$ supposons que $\mathcal{H}_a$ soit vraie. Alors

$$(a+1)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i a^i.$$

7

Mais d'après la question précédente pour $0 < i < p$, p divise C_p^i. En termes de modulo nous obtenons:

$$(a+1)^p \equiv C_p^0 a^0 + C_p^p a^p \equiv 1 + a^p [p].$$

Par l'hypothèse de récurrence nous savons que $a^p \equiv a[p]$, donc

$$(a+1)^p \equiv a + 1[p].$$

Nous venons de prouver que $\mathcal{H}_{a+1}$ est vraie. Par le principe de récurrence alors quelque soit $a \in \mathbb{N}^*$ nous avons: $a^p \equiv a[p]$

$a^{p-1} - 1 \equiv 0[p]$.
$a^{p-1} \equiv 1[p]$

Exercice 4

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \geq 1$ on a :

$$2^{2^{n+k}} - 1 = (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1).$$

2. On pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour $m \neq n$, F_n et F_m sont premiers entre eux.
3. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Correction

1. Fixons n et montrons la récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. La formule est vraie pour $k = 0$. Supposons la formule vraie au rang k. Alors

$$\begin{aligned}(2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k} (2^{2^{n+i}} + 1) &= (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=0}^{k-1} (2^{2^{n+i}} + 1) \times (2^{2^{n+k}} + 1) \\ &= (2^{2^{n+k}} - 1) \times (2^{2^{n+k}} + 1) = (2^{2^{n+k}})^2 - 1 = 2^{2^{n+k+1}} - 1.\end{aligned}$$

Nous avons utiliser l'hypothèse de récurrence dans ces égalités. Nous avons ainsi montrer la formule au rang $k+1$. Et donc par le principe de récurrence elle est vraie.

2. Écrivons $m = n + k$, alors l'égalité précédente devient:

$$F_m + 2 = (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=n}^{m-1} F_i.$$

Soit encore :

$$F_n \times (2^{2^n} - 1) \times \prod_{i=n+1}^{m-1} F_i \;-\; F_m = 2.$$

Si d est un diviseur de F_n et F_m alors d divise 2 (ou alors on peut utiliser le théorème de Bézout). En conséquent $d = 1$ ou $d = 2$. Mais F_n est impair donc $d = 1$. Nous avons montrer que tous diviseurs de F_n et F_m est 1, cela signifie que F_n et F_m sont premiers entre eux.

3. Supposons qu'il y a un nombre fini de nombres premiers. Nous les notons alors $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Prenons alors $n+1$ nombres de la famille F_i, par exemple $\{F_1, \ldots, F_{n+1}\}$. Chaque F_i, $i = 1, \ldots, n+1$ est divisible par (au moins) un facteur premier p_j, $j = 1, \ldots, n$. Nous avons $n+1$ nombres F_i et seulement n facteurs premiers p_j. Donc par le principe des tiroirs il existe deux nombres distincts F_k et $F_{k'}$ (avec $1 \leq k, k' \leq n+1$) qui ont un facteur premier en commun. En conséquent F_k et $F_{k'}$ ne sont pas premiers entre eux. Ce qui contredit la question précédente. Il existe donc une infinité de nombres premiers.

Exercice 5 Soit X l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que X est non vide.
2. Montrer que le produit de nombres de la forme $4k+1$ est encore de cette forme.
3. On suppose que X est fini et on l'écrit alors $X = \{p_1, \ldots, p_n\}$.
   Soit $a = 4p_1p_2\ldots p_n - 1$. Montrer par l'absurde que a admet un diviseur premier de la forme $4k+3$.
4. Montrer que ceci est impossible et donc que X est infini.

Correction

1. X est non vide car, par exemple pour $k = 2$, $4k+3 = 11$ est premier.
2. $(4k+1)(4\ell+1) = 16k\ell + 4(k+\ell) + 1 = 4(4k\ell + k + \ell) + 1$. Si l'on note l'entier $k' = 4k\ell + k + \ell$ alors $(4k+1)(4\ell+1) = 4k'+1$, ce qui est bien de la forme voulue.
3. Remarquons que 2 est le seul nombre premier pair, les autres sont de la forme $4k+1$ ou $4k+3$. Ici a n'est pas divisible par 2, supposons –par l'absurde– que a n'a pas de diviseur de la forme $4k+3$, alors tous les diviseurs de a sont de la forme $4k+1$. C'est-à-dire que a s'écrit comme produit de nombre de la forme $4k+1$, et par la question précédente a peut s'écrire $a = 4k'+1$. Donc $a \equiv 1[4]$. Mais comme $a = 4p_1p_2\ldots p_n - 1$, $a \equiv -1 \equiv 3[4]$. Nous obtenons une contradiction. Donc a admet une diviseur premier p de la forme $p = 4\ell+3$.

4. Dans l'ensemble $X = \{p_1, \dots, p_n\}$ il y a tous les nombres premiers de la formes $4k+3$. Le nombre p est premier et s'écrit $p = 4\ell + 3$ donc p est un élément de X, donc il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $p = p_i$. Raisonnons modulo $p = p_i$: $a \equiv 0[p]$ car p divise a. D'autre part $a = 4p_1 \dots p_N - 1$ donc $a \equiv -1[p]$. (car p_i divise $p_1 \dots p_n$). Nous obtenons une contradiction donc X est infini: il existe une infinité de nombre premier de la forme $4k+3$. Petite remarque, tous les nombres de la forme $4k+3$ ne sont pas des nombres premiers, par exemple pour $k=3$, $4k+3=15$ n'est pas premier.

Exercice 6 Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^N + 1$ soit premier, montrer que $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2^k$. Que penser de la conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{2^n} + 1$ est premier ?

Correction

1. Supposons que $a^n + 1$ est premier. Nous allons montrer la contraposée. Supposons que n n'est pas de la forme 2^k, c'est-à-dire que $n = p \times q$ avec p un nombre premier > 2 et $q \in \mathbb{N}$. Nous utilisons la formule

$$x^p + 1 = (x+1)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{p-1})$$

avec $x = a^q$:

$$a^n + 1 = a^{pq} + 1 = (a^q)^p + 1 = (a^q + 1)(1 - a^q + (a^q)^2 \dots + (a^q)^{p-1}).$$

Ces deux derniers facteurs sont > 1. Et donc $a^n + 1$ n'est pas premier. Par contraposition si $a^n + 1$ est premier alor $N = 2^k$.

2. Cette conjecture est fausse, mais pas facile à vérifier sans une bonne calculette ! En effet pour $n = 5$ nous obtenons :

$$2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417.$$

IV) Lien de l'arithmétique avec la cryptographie

4.1 Introduction :

Définitions

Cryptographie = Science de protection de l'information

Cryptage (codage = chiffrement) : transformer (par une clé) un message *clair* en un message incompréhensible.

Décryptage = (décodage = déchiffrement) : reconstituer le message *initial* à partir du message crypté.

Cryptanalyse : Analyse des textes chiffrés pour retrouver des informations dissimulées et Analyse des procédés de chiffrement afin d'en découvrir les failles de sécurité.

Cryptologie = Cryptographie + Cryptanalyse

4.2 Remarque :

* La cryptographie est dite *symétrique* si la même clé qui sert à crypter sert aussi à décrypter.

* Les chasseurs de codes, par analyse approfondie arrivent à la casser après un certain temps

4.3 La cryptographie à clé publique (dite révélée) - le RSA

La méthode de cryptographie RSA a été inventée en 1977 par Ron Rivest, Adi Shamir et Len Adleman, à la suite de la découverte de la cryptographie à clé publique par Diffie et Hellman. Le RSA est encore le système cryptographique à clé publique le plus utilisé de nos jours.

Principe de fonctionnement

Si Bob souhaite recevoir des messages en utilisant le RSA, il procède de la façon suivante:

a) Création des clés :

Bob crée 4 nombres p, q, e et d :

p et q sont deux grands nombres premiers *distincts*.

(Leur génération se fait *au hasard*, en utilisant un algorithme de test de primalité probabiliste).

e est un entier premier avec le produit $(p-1)(q-1) = \varphi(n)$ où $n = pq$.

$\exists d, k$ tels que $1 = de - k\varphi(n)$ (Identité de Bezout)

d est tel que $ed \equiv 1$ modulo $\varphi(n)$.

Autrement dit, $ed - 1$ est un multiple de $(p-1)(q-1)$. (On peut fabriquer d à partir de e, p et q, en utilisant l'algorithme d'Euclide étendu, $d = e^{-1} \bmod \varphi(n)$).

b) Distribution des clés :

Le couple (n, e) constitue la clé publique de Bob où $n = pq$. Il la rend disponible par exemple en la mettant dans un annuaire (ou sur le web). Le couple (n, d) constitue sa *clé privée*. Il la garde secrète.

Envoi du message codé : Alice veut envoyer un message codé à Bob. Elle le représente sous la forme d'un ou plusieurs entiers M compris entre 0 et $n-1$. Alice possède la clé publique (n, e) de Bob. Elle calcule $C \equiv M^e \bmod n$. C'est ce dernier nombre qu'elle envoie à Bob.

Réception du message codé : Bob reçoit C et calcule, grâce à sa clé privée, $D \equiv C^d \bmod n$.

D'après le Théorème Euler, si M est premier avec n alors $(M^{\varphi(n)}) \equiv 1 \bmod n$ donc
$D \equiv M^{ed} \equiv M^{1+k\varphi(n)} \equiv M\left(M^{\varphi(n)}\right)^k \equiv M \pmod{n}$.
d'où $D \equiv M \bmod n$

Bob a donc reconstitué le message initial.

Cette cryptographie est dite *asymétrique.*

$\boxed{\text{Forces et faiblesses}}$

a) Forces

* Difficulté de factorisation de n (connue), donc difficulté de connaître p et q permettant de calculer $\varphi(n)$ par conséquent de déterminer d à partir de e.

En considérant que les ordinateurs les plus puissants doublent leurs performances une fois tous les 18 mois, on estime qu'avec des nombres premiers de plus de 100 chiffres il faut attendre 2075 pour "casser" le RSA.

* le destinataire est le seul capable de calculer $M^{de} \equiv M$; même l'expéditeur ne peut décrypter à l'aide de sa clef son propre message crypté.

* L'inexistence d'une clé secrète entre les deux correspondants. Un abonné n'est pas obligé d'avoir une clef secrète par correspondant. Il a juste besoin d'avoir dans un annuaire la clef publique de chaque correspondant.

Si $k = 1000$ abonnés devaient correspondre chacun doit consulter dans l'annuaire les clés comportant les $k = 1000$ clés publiques et non garder sur lui k^2 clés secrètes, ce nombre correspond à $card(E_k \times E_k) = cardE_k \times cardE_k$

$E_k \times E_k = E_k^2 = \{(s_i, s_j) : s_i, s_j \in E_k\}$.

*L'expéditeur n'a pas à connaître la clé secrète de son correspondant pour crypter; il n'y a pas de "déduction simple" entre les deux clés.

b) Faiblesses

* Lenteur de l'algorithme RSA.

* Rien ne prouve que cette sécurité ne soit pas mise à mal dans le futur par l'évolution rapide des algorithmes et des moyens matériels.

4.4 Exercice Chiffrement RSA
Alice veut recevoir des messages chiffrés en utilisant le RSA

Elle choisit $p = 71$ et $q = 61$

1) Déterminer le module N et $\varphi(N) = (p-1)(q-1)$

Elle choisit $e = 17$ et calcule sa clé privée d.

2) Déterminer d la clé privée d'Alice (modulo $\varphi(N)$).

Bob veut envoyer le message W E B M A S T E R à Alice. En utilisant le code ASCII, quel est son message?

3) Trouver le chiffré de son message après avoir regroupé en blocs de trois chiffres.

4) Comment Alice déchiffre-t-elle le message de Bob ? Déchiffrer le.

Correction

1) $N = 71 \times 61 = 4331$
et $\varphi(N) = (p-1)(q-1) = 70 \times 60 = 4200 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$
17 est premier avec $\varphi(N)$: $ed \equiv 1 \bmod \varphi(N)$
2) Déterminer d la clé privée d'Alice.
$4200 = 17 \times 247 + 1$

$1 = 17 \times (-247) + 1 \times 4200$
$d = -247 \equiv -247 + 4200 = 3953 \bmod 4200$
$d = 17^{-1} \bmod 4200 = 3953$

Bob veut envoyer le message W E B M A S T E R par le code ASCII correspond à (87, 69, 66, 77, 65, 83, 84, 6

3) $(m_1 = 876; m_2 = 966; 776; 583; 846; m_6 = 982)$
$m_i^e \bmod N = c_i$
$876^{17} \bmod 4331 = 2741$
$(c_1, c_2, \ldots, c_6) = (\,876^{17} \;\; 966^{17} \;\; 776^{17} \;\; 583^{17} \;\; 846^{17} \;\; 982^{17}\,) \bmod 4331 =$
$(\,2741 \;\; 3285 \;\; 3667 \;\; 4145 \;\; 1192 \;\; 336\,)$

4) Comment Alice déchiffre-t-elle le message de Bob ? Déchiffrer le.
Alice calcule $(\,2741^{3953} \;\; 3235^{3953} \;\; 3667^{3953} \;\; 4145^{3953} \;\; 1192^{3953} \;\; 336^{3953}\,) \bmod 4331 = (\,876 \;\; 966 \;\; 77$
et trouve

87, 69, 66, 77, 65, 83, 84, 69, 82 donc WEBMASTER.

$2741^d \bmod 4331 = 876$

$(\,2741^d \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots\,) \bmod N = (\,876 \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots\,)$
ce qui donne 87 69 66 77 65 83 84 69 82 $\rightarrow$ W E B M A S T E R

GEOMETRIE 3

TRAVAUX DIRIGES CHAPITRE 1

Le référentiel commun à tous les exercices est l'espace affine $(\mathcal{E}, E)$ muni du repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1- Soit la courbe Γ paramétrée par γ telle que :

$$\gamma(t) = (\tfrac{3}{2}t^2 - 2t + 5 \,,\, t\sqrt{7} - 2 \,,\, \tfrac{3}{2}t^2 - 4t + 1)$$

Montrer Γ est une courbe plane.

2 - Soit la courbe Γ définie par $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, posons $M_i = \gamma(t_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

a) **Déterminer l'équation du plan passant par** M_1, M_2 et M_3.

En déduire l'équation du plan osculateur à Γ au point $M = \gamma(t)$.

b) Retrouver le résultat du a) en revenant à la définition du plan osculateur.

c) La courbe Γ traverse-t-elle le plan osculateur ?

3- Soient les surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ d'équations respectives :

(1) $x^3 + x^2 - y + 2z + 1 = 0$ et (2) $2x^2 + 3y - 5z + 2 = 0$

a- Montrer que $\Gamma = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ d'équations est une courbe gauche

b- Donner une paramétrisation de Γ

4- Le point M_0 (1 ; 2 ; -1) appartient à la courbe Γ intersection des deux sous-ensembles S_1 et S_2 de $\mathbb{R}^3$ d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \text{et} \quad x^3 + y^3 + z^3 = 8$$

- Écrire les équations de la tangente en M_0 à Γ, donner un vecteur directeur de la tangente.
- Déterminer une équation du plan osculateur à Γ au point M_0.

TRAVAUX DIRIGES CHAPITRE 2

Le référentiel commun à tous les exercices est l'espace affine $(\mathcal{E}, E)$ muni du repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale de E.

Exercice 1

On considère l'arc paramétré $\mathcal{C}$ défini pour t réel par

$\gamma(t) = ((1 + \cos t)\cos t\,, (1 + \cos t)\sin t\,,\ 4\sin\frac{t}{2})$

Calculer la longueur de l'arc $\mathcal{C}$

Exercice 2

Soit Γ l'arc paramétré $\mathcal{C}$ défini par γ tel que :

$$\gamma(t) = \left(\left(t - \frac{t^3}{3}\right) \ ; \ t^2 \ ; \ \left(t + \frac{t^3}{3}\right)\right)$$

Construire le repère de Frenet au point $M = \gamma(t)$. Déterminer en fonction de t la courbure et la torsion et vérifier que Γ est une hélice dont on précisera l'axe.

1) Donner l'équation du plan osculateur en $M = \gamma(t)$.

Exercice 3

Soient les surfaces $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ d'équations respectives :

$$\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 6 \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_2 : x^3 + y^3 + z^3 = 8$$

Déterminer le repère Frenet au point M_0 (1 ; 2 ; -1) de la courbe Γ.

TRAVAUX DIRIGES CHAPITRE 3

Tous les exercices ont en commun le même référentiel : l'espace affine euclidien orienté ($\mathscr{E}$, E) muni du repère $\mathscr{R}$= (O , $\mathscr{B}$) où $\mathscr{B}$ = (i, j , k) est une base orthonormale directe de E

Exercice 1

Montrer que les nappes $\Sigma = (\mathscr{S}, \pi, D)$ avec D = R×R , définies ci-dessous, sont réglées , puis préciser les lignes coordonnées :

1. $\pi(u,v) = (u, v, uv)$;
2. $\pi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v)$;
3. $\pi(u,v) = (u, v, uv)$,
4. $\mathscr{S}$: $x^3 - 3xy + z = 0$;
5. $\mathscr{S}$: $(x^2 + y^2)z - 2xy = 0$

Exercice 2

Soit la nappe cartésienne $\mathscr{S}$ d'équation $x^3 - 3xy - z = 0$.

1° Déterminer le cône $\mathscr{S}_1$ de sommet O circonscrit à $\mathscr{S}$ ainsi que la courbe de contact

2°Déterminer le cylindre $\mathscr{S}_2$ circonscrit à $\mathscr{S}$ de direction Ri ainsi que la courbe de contact.

Exercice 3

Soient la courbe Γ paramétrée par γ tel que $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ et la nappe Σ engendrée par les droites rencontrant l'axe (O, k) et la courbe Γ au point $P = \gamma(t)$ tel que le plan tangent à Σ en P soit le plan osculateur à Γ en P.

Obtenir une paramétrisation de la nappe Σ.

Exercice 4

1° Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ d'équation :

$5(x + 2y - z - 3) + 9(3x + 2y - z - 3)^2 + 7(x - 4y + 2z + 6)^3 = 0$

est un cylindre dont on précisera les caractéristiques. Donner une 2ème base, droite, de $\mathcal{S}$.

2° Donner une équation du cylindre $\mathcal{S}$ de direction $u = (1, 1, 1)$ et de directrice Γ définie par

$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, \frac{t^3}{t-1}, \right) \qquad t \neq 1$$

3° Déterminer une équation du cylindre $\mathscr{C}$ de direction $u = i + j$ circonscrit à la surface $\mathscr{S}$ d'équation $xy - 2z = 0$.

Exercice 5

a) Montrer que la surface $\mathscr{S}$ d'équation :
$(x + y + 2z + 3)^2 + (y - z + 1)(2y + z - 1) = 0$ est un cône dont on précisera les caractéristiques.

b) Former une équation du cône $\mathscr{S}$ de sommet A (- 3, 0, 3) et de directrice $\mathcal{C}$ paramétrée par γ telle que $\gamma(t) = (t^2 - 1, 2t, t^2 + t + 1)$.

Exercice 6

1° Donner une équation du conoïde droit $\mathcal{S}$ d'axe (O, k) et de directrice Γ paramétrée par γ telle que $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

2° Montrer que la surface $\mathcal{S}$ d'équation :

$(y - z)(x + 2y - 1)^2 - 2(y + z + 1)(x + 2y + 1) - 2(y - z) = 0$

est un conoïde dont on précisera les caractéristiques.

Exercice 7

Déterminer la nature et les caractéristiques de la surface $\mathscr{S}_i$ d'équation (E_i) ci-dessous, i = 1, 2, 3.

(E_1) : $(x - 4y + 2z)^3 + 9(3x + 2y - z)^3 + 7(x + 2y - z) = 9$

(E_2) : $x^2 - 2xy + y^2 + (2x - y)^2 \exp(2y - z)^2$

(E_3) : $(x + y + 2z)(x + 2y - z) + (x + 3y)(y + z) = 0$

TRAVAUX DIRIGES CHAPITRE 4

Pour tous les exercices, l'espace affine $\mathcal{E}$ euclidien est muni d'un repère orthonormal direct, $\Sigma = (\mathcal{S}, \pi, D)$ désigne une nappe paramétrée..

Exercice 1

Soit la courbe paramétrée Γ ($x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$) ; le plan osculateur à Γ en $P = \gamma(t)$ rencontre (O , k) en $Q(t)$; déterminer les asymptotiques de la surface $\mathcal{S}$ engendrée par les droites ($PQ(t)$).

Exercice 2

Décrire les géodésiques du cône $\mathcal{S}$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Exercice 4

Soit la nappe paramétrée $\Sigma = (\mathcal{S}, \pi, D)$ définie par :

$\pi(t, s) = (t + s,\ t^2 + s^2,\ t^2 - S^2)$

1° Déterminer une équation vérifiée par le support $\mathcal{S}$ de la nappe.

2° Déterminer les points stationnaires du support $\mathcal{S}$, puis les points réguliers de la nappe .

3° Déterminer l'ensemble Γ des points de Σ en chacun desquels le plan tangent a sa direction qui contient le vecteur $\vec{d} = (0, 1, 3)$.

Exercice 5

Soit la nappe paramétrée $\Sigma = (\mathcal{S}, \pi, D)$ telle que $D = \mathbb{R}^2$ et

$$\pi(u, v) = (v\cos u,\ v\sin u,\ u)$$

1° Montrer que la nappe est engendrée par des droites ; donner les lignes coordonnées.

2° Déterminer une équation du support $\mathcal{S}$ de la nappe ; en déduire la nature de $\mathcal{S}$ et ses caractéristiques.

3° Vérifier que la nappe Σ est régulière. Déterminer la 1^e et la 2^e formes fondamentales Φ_1 et Φ_2.

4° Déterminer les directions asymptotiques et les lignes asymptotiques, les directions principales, les lignes de courbure et les courbures principales.

Université F H B
Année académique 2014-2015
UFR MI

LICENCE 3

Examen de GEOMETRIE 3, 1e session, durée 03h

Tous les exercices ont pour référentiel l'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ muni du repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe de E

Exercice 1

1° Former une équation du cône de sommet $S = (-2\,;\,1\,;\,3)$ dont une directrice est paramétrée par $\gamma: t \rightarrow (t-1\,;\; t^2+1\,,\; t^3)$

2°Former une équation du conoïde droit d'axe $(O, \vec{j})$ dont les génératrices sont tangentes à la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x = 0$

Exercice 2

Préciser la nature et les caractéristiques de chacune des surfaces déterminées par les équations suivantes :

E_1 : $\dfrac{1}{7x+3y-2z} + \dfrac{2}{3x-y-2z} + \dfrac{2}{x+y} = 9$

E_2 : $(3x+3y-z+2)(3y+2z)+(x+y+z-1)^2 = 0$

E_1 : $(3x+y+z)^2+(x+y+z+1)(2x+y+2)^2 = 0$

Exercice 3

Déterminer sur le cylindre d'équations $x^2+y^2=9$, les courbes dont la tangente est tangente à la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=18$.

Exercice 4

Soit la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par :

γ: $t \mapsto P = \gamma(t) = (t,\; t^2,\; t^3)$

Le plan osculateur à $\mathcal{C}$ en P rencontre (Oz) en Q(t).

1- Donner une paramétrisation de la nappe Σ engendrée par les droites (PQ(t))
2- Déterminer les lignes asymptotiques de Σ.
3- Déterminer les lignes de courbure de Σ.
4- Déterminer une équation des géodésiques de Σ.

UFHB
UFR MI

Année 2015 – 2016

L 3 MATHEMATIQUES

GEOMETRIE 3 Examen de 2e semestre, Durée 03 h

Les trois exercices ont pour référentiel commun l'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

EXERCICE 1

Soit la nappe paramétrée $\sum = (\mathcal{S}, \mathbb{R}^2, \pi)$ définie par

$$\pi(t, s) = (t + s \ , t^2 + 2st \ , \ t^3 + 3st^2)$$

1° Montrer que la nappe est réglée et donner les lignes coordonnées.

2° Déterminer les points réguliers de $\sum$.

3° Obtenir une équation du plan tangent à $\sum$ au point $P = \pi(t, s)$ où $s \neq 0$, puis une équation du plan osculateur au point $Q = \pi(t, 0)$ à la courbe Γ paramétrée par $\gamma(t) = \pi(t, 0)$.

EXERCICE 2

1° Donner une équation du cylindre $\mathcal{S}$ de direction $\vec{d} = (1, -1, 1)$ et de directrice Γ paramétrée par

$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{t+1}, \frac{t^2}{t+1}, \frac{t^3}{t+1}\right)$$

2° Déterminer la nature et les caractéristiques de la surface $\mathcal{S}_i$ d'équation (E_i) ci- dessous, $i = 1, 2, 3$

(E1) $(2x + 3y + z - 1)^2 - 3(x + 2y + 2z + 1)^2 + 7(4x + 5y - z - 5) + 9 = 0$

(E2) $(x + y + 3z + 2)\cos(2y + z + 1) + 9(3x - y + 2z + 3) = 0$

(E3) $(2x - 3y - z + 2)(y - 2z + 3) + 4(3x + y + 1)^2 = 0.$

EXERCICE 3

Déterminer les lignes asymptotiques de la nappe paramétrée $\sum$ définie par

$\sum = (\mathcal{S}, \mathbb{R}^2, \pi) \qquad \pi(u, v) = ((1 + v)\cos u \ , (1 - v)\sin u \ , \ v)$.

UFHB UFR MI

Année universitaire 2015 – 2016

L3 MATHEMATIQUES

Géométrie 3, Examen 2ème Session Durée : 02 h

L'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ muni du repère $(O, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe de E, est le référentiel commun à tous les exercices..

Exercice 1

Partie A

Déterminer la nature et les caractéristiques de la surface $\mathcal{S}_i$ d'équation (E_i) ci-dessous, $i = 1, 2, 3$.

(E_1) : $(2x + 3y - 2z)^2 + 7(2x + y)^3 + 9(y - z) = 1$

(E_2) : $(2x + 3y + 2z)^2 + 9(2x + y)^2(y - z) = 0$

(E_3) : $x^2 + (2x + y)(y - z) = 0$

Partie B

Soit l'ellipse Γ d'équations $z = 0$ et $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, et le point $S(1, -1, 2)$.

Déterminer une équation cartésienne du cône $\mathcal{S}$ de sommet S et de directrice Γ.

Exercice 2

Soit la nappe paramétrée Σ définie par la paramétrisation :

$$\pi(r, \theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ r)$$

1° Déterminer les lignes asymptotiques, et les lignes de courbure.

2° Montrer que la ligne coordonnée $r \rightarrow \pi(r, \theta_0)$, θ_0 constant, est une géodésique.

ENS
Centre de Formation Continue
Université des vacances

Université Félix Houphouët-Boigny
Cocody Abidjan
UFR M.I

L 3 MATHEMATIQUES

Géométrie 3, Examen annuel, 1ère session 2015, Durée : 03 h

Le référentiel commun à tous les exercices est l'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ orienté muni du repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

EXERCICE 1

1. Montrer que l'ensemble Γ des points solutions du système d'équations
$$x^3 + 3z = 0 \quad \text{et} \quad 2x^2 - y = 0$$
est une courbe. En donner une paramétrisation globale γ de paramètre x.
2. Etudier les positions relatives de la courbe Γ avec le plan osculateur en un point quelconque $M = \gamma(x)$.
3. Donner le repère du Frenet au point $\gamma(1)$.

EXERCICE 2

Dans chacun des cas ci-dessous, $i = 1, 2, 3$, préciser la nature (cylindre, cône, conoïde) et les caractéristiques de la surface $\mathcal{S}_i$ d'équation cartésienne suivante:

$\mathcal{S}_1$: $(x+y)(y+z) + (y+z)(x+2z) - (2x+y+2z)^2 = 9$

$\mathcal{S}_2$: $(x-2y+z)^2 + (3x+2z-1)^2 - 8(x-y)(y-z) = 0$

$\mathcal{S}_3$: $(3z-1)^2(x^2+3y^2) - 3(2x^2-y^2) = 0$

EXERCICE 3

Soit la nappe paramétrée Σ définie par $\pi(u, v) = (\text{ch}u\cos v, \text{ch}u\sin v, u)$

1. Déterminer les lignes-coordonnées et préciser leur nature (droites ou courbes paramétrées).
2. Obtenir la 1ère et la 2ème forme quadratique fondamentale, déterminer éventuellement les points elliptiques, hyperboliques, paraboliques.
3. Donner les directions asymptotiques et les directions principales.
4. Obtenir l'équation des géodésiques.

ENS
Centre de Formation Continue
Université des vacances

Université Félix Houphouët-Boigny
Cocody Abidjan
UFR M.I

L 3 MATHEMATIQUES

Géométrie 3, Examen annuel, $2^{ème}$ session 2015, Durée : 03 h

Le référentiel commun à tous les exercices est l'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ orienté muni du repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

EXERCICE 1

1. Montrer que l'ensemble Γ des points solutions du système d'équations

   $4xz - y + 3z^3 = 0$ et $x - z^2 + 1 = 0$

   est une courbe. En donner une paramétrisation globale γ de paramètre z.
2. Etudier les positions relatives de la courbe Γ avec le plan osculateur en un point quelconque $M = \gamma(z)$.
3. Donner le repère du Frenet au point $\gamma(1)$.

EXERCICE 2

Dans chacun des cas ci-dessous, $i = 1, 2, 3$, préciser la nature (cylindre, cône, conoïde) et les caractéristiques de la surface $\mathcal{S}_i$ d'équation cartésienne suivante:

$\mathcal{S}_1$: $2z + 1 = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ où $(x, y) \neq (0, 0)$

$\mathcal{S}_2$: $(x + y - z)^2 + 2x + 3y + 4z + 1 = 0$

$\mathcal{S}_3$: $(2x - y + z + 1)^3 + (x - 2y)(x^2 - 4y^2) = 0$

EXERCICE 3

Soit la nappe paramétrée Σ définie par $\pi(u, v) = [(1 + v)\cos u, (1 - v)\sin u, v)]$ où $(u, v) \in]-1 ; 1[\times \mathbb{R}$.

1. Déterminer les lignes-coordonnées et préciser leur nature (droites ou courbes paramétrées).
2. Obtenir la $1^{ère}$ et la $2^{ème}$ forme quadratique fondamentale, déterminer éventuellement les points elliptiques, hyperboliques, paraboliques.
3. Donner les directions asymptotiques et les directions principales.
4. Obtenir l'équation des géodésiques.

Université LOROUGNON GUEDE de DALOA **Année universitaire : 2014-2015**
Centre de Formation Continue

L 3 MATHEMATIQUES

Géométrie 3, Examen annuel, 1ère session, Durée : 03 h

Le référentiel commun à tous les exercices est l'espace affine euclidien $(\mathcal{E}, E)$ orienté muni du repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

EXERCICE 1

1. Montrer que l'ensemble Γ des points solutions du système d'équations

$$2x^3 - y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - 2z - 2 = 0$$

   est une courbe. En donner une paramétrisation globale γ de paramètre x.
2. Etudier les positions relatives de la courbe Γ avec le plan osculateur en un point quelconque $M = \gamma(x)$.
3. Donner le repère du Frenet au point $\gamma(1)$.

EXERCICE 2

Dans chacun des cas ci-dessous, i = 1 , 2 , 3, préciser la nature (cylindre, cône, conoïde) et les caractéristiques de la surface $\mathcal{S}_i$ d'équation cartésienne suivante:

$$\mathcal{S}_1 : \frac{1}{x-2y+z} + \frac{2}{3x+2y-z} + \frac{3}{x+2y-z} - \frac{4}{x} = \frac{5}{9}$$

$$\mathcal{S}_2 : (x+y)^2 - (x+1)(y+z+2) = 0$$

$$\mathcal{S}_3 : (x-y)^2 - 3(x^2+2y^2)(2z-1) = 0$$

EXERCICE 3

Soit la nappe paramétrée Σ définie par $\pi(u, v) = (v\cos u, v\sin u, u)$

1- Déterminer les lignes-coordonnées et préciser leur nature (droites ou courbes paramétrées).

2- Obtenir la 1ère et la 2ème forme quadratique fondamentale, déterminer éventuellement les points elliptiques, hyperboliques, paraboliques.

3- Donner les directions asymptotiques et les directions principales.

4- Obtenir l'équation des géodésiques.

Université LOROUGNON GUEDE de DALOA **Année universitaire : 2014-2015**
Centre de Formation Continue

L 3 MATHEMATIQUES

Géométrie 3, Examen annuel, 2ème session, Durée : 03 h

Le référentiel commun à tous les exercices est l'espace affine euclidien ($\mathcal{E}$, E) orienté muni du repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

EXERCICE 1

1. Montrer que l'ensemble Γ des points solutions du système d'équations

   $3z^3 + y - 4xz = 0$ et $x - z^2 - 1 = 0$

   est une courbe. En donner une paramétrisation globale γ de paramètre z.
2. Etudier les positions relatives de la courbe Γ avec le plan osculateur en un point quelconque $M = \gamma(z)$.
3. Donner le repère du Frenet au point $\gamma(1)$.

EXERCICE 2

Dans chacun des cas ci-dessous, i = 1 , 2 , 3, préciser la nature (cylindre, cône, conoïde) et les caractéristiques de la surface $\mathcal{S}_i$ d'équation cartésienne suivante:

$\mathcal{S}_1$: $\ln(x-y)^2 - 2\ln(y-z)^2 + 3\ln(x-2y-z)^2 = 6$

$\mathcal{S}_2$: $(x+y-z+1)^3 - x^2(3x-2y+z+2) = 0$

$\mathcal{S}_3$: $3(x^2 - 4y^2) - 2(x+2y-3z+1) = 0$

EXERCICE 3

Soit la nappe paramétrée Σ définie par :

$\pi(u, v) = [(1+\cos u)\cos v, (1+\cos u)\sin v, \sin u)]$ où $(u, v) \in]-1 ; 1[^2$.

1. Déterminer les lignes-coordonnées et préciser leur nature (droites ou courbes paramétrées).
2. Obtenir la 1ère et la 2ème forme quadratique fondamentale, déterminer éventuellement les points elliptiques, hyperboliques, paraboliques.
3. Donner les directions asymptotiques et les directions principales.
4. Obtenir l'équation des géodésiques.

TD Geometrie 3 Dr N'ZOUKOUDI

TD chapitre 1

Exercice 1

Soit la courbe Γ paramétrée par γ telle que:

$$\gamma(t) = \left(\frac{3}{2}t^2 - 2t + 5,\ t\sqrt{7} - 2,\ \frac{3}{2}t^2 - 4t + 1\right)$$

Déterminons l'equation du plan osculateur $\mathcal{P}_0$ en un point $P = \gamma'(t)$

$\det(\overrightarrow{\gamma(t)M}, \gamma'(t), \gamma''(t)) = 0$

$$\begin{vmatrix} x - \frac{3}{2}t^2 + 2t - 5 & 3t-2 & 3 \\ y - t\sqrt{7} + 2 & \sqrt{7} & 0 \\ z - \frac{3}{2}t^2 + 4t - 1 & 3t-4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sqrt{7}\left(x - \frac{3}{2}t^2 + 2t - 5\right) - 2\left(y - t\sqrt{7} + 2\right) - \sqrt{7}\left(z - \frac{3}{2}t^2 + 4t - 1\right) = 0$$

$$\sqrt{7}x - 2y - \sqrt{7}z - 4\sqrt{7} + 4 = 0$$

$\mathcal{P}_0$ est le même en tout point $P = \gamma(t)$. donc $\mathcal{P}_0$ contient la courbe Γ donc Γ est plane.

Exercice 3

(1) $x^3 + x^2 - y + 2z + 1 = 0$

(2) $2x^2 + 3y - 5z + 2 = 0$

$I = \gamma(0)$ obtenu plus loin

Soit $P(x, y, z) \in \Gamma = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, on a: $I = (0, -3, -5) \in \Gamma$

$(0, -2, -1) \in \Gamma$

$\overrightarrow{\text{grad}}_P\, f_1 = (3x^2 + 2x, -1, 2)$

$\overrightarrow{\text{grad}}_P\, f_2 = (4x, 3, -5)$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$ alors les deux gradiens sont non colinéaire $\forall P \in \Gamma$. donc $\Gamma \neq \emptyset$ est une

[illegible] courbe.

b- une paramétrisation de Γ

$(1) \Rightarrow -y + 2z = -x^3 - x^2 - 1 \quad (3)$

$(2) \Rightarrow 3y - 5z = -2x^2 - 2 \quad (4)$

$3 \times (3) + (4) : z = -3x^3 - 5x^2 - 5$

Portons z dans (3)

$-y - 6x^3 - 10x^2 - 10 = -x^3 - x^2 - 1$

$y = -5x^3 - 9x^2 - 9$

$(x, y, z) = (x, -5x^3 - 9x^2 - 9, -3x^3 - 5x^2 - 5)$

une paramétrisation de Γ est : $\gamma(t) = (t, -5t^3 - 9t^2 - 9, -3t^3 - 5t^2 - 5)$

$\gamma(0) = (0, -9, -5)$

TD chapitre 2 $\quad \sin t \; T = 2\pi \quad \sin at \; T = \frac{2\pi}{a} \quad a > 0$

Exercice 1

$\mathcal{C} : \gamma(t) = \left((1+\cos t)\cos t,\ (1+\cos t)\sin t,\ 4\sin\frac{t}{2}\right)$

La longueur de l'arc $\mathcal{C}$ où γ a pour periode 4π est donnée par :

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_{-2\pi}^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt$$

$x = (1+\cos t)\cos t$

$x' = -\sin t\cos t - \sin t(1+\cos t)$

$= -\sin t\cos t - \sin t - \sin t\cos t$

$= -2\sin t\cos t - \sin t$

$= -(\sin 2t + \sin t)$

$= -2\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}$

$y = (1+\cos t)\sin t$

$y' = -\sin^2 t + \cos t + \cos^2 t$

$= \cos 2t + \cos t$

$= 2\cos\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}$

$z = 4\sin\frac{t}{2}$

$z' = 2\cos\frac{t}{2}$

$\gamma'(t) = 2\cos\frac{t}{2}\left(-\sin\frac{3t}{2}, \cos\frac{3t}{2}, 1\right)$

$\|\gamma'(t)\| = 2\left|\cos\frac{t}{2}\right| \sqrt{\left(-\sin\frac{3t}{2}\right)^2 + \left(\cos\frac{3t}{2}\right)^2 + 1}$

$\|\gamma'(t)\| = 2\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|$

$\ell(\mathcal{C}) = \int_{-2\pi}^{2\pi} 2\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right| dt \qquad \cos\frac{t}{2}$ pair

$\ell(\mathcal{C}) = 4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right| dt$

t	0	π	2π
$\theta = \frac{t}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos\theta$	$+$	0	$-$

$\ell(\mathcal{C}) = 4\sqrt{2}\left[\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt - \int_{\pi}^{2\pi}\cos\frac{t}{2}\,dt\right]$

$$\ell(\gamma) = 4\sqrt{2}\left[\left[2\sin\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} - \left[2\sin\frac{t}{2}\right]_\pi^{2\pi}\right]$$

$$= 8\sqrt{2}\left[(1-0)-(0-1)\right]$$

$$\underline{\ell(\gamma) = 16\sqrt{2}}$$

<u>Exercice 2</u>

$C : \gamma(t) = \left(\left(t - \frac{t^3}{3}\right), t^2, t + \frac{t^3}{3} \right)$

Repère de Frenet au point $M = \gamma(t)$

$$\mathcal{R}_F = (M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$$

$* \ \vec{T} = \frac{d\gamma}{ds} = \frac{d\gamma}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$ où $\frac{ds}{dt} = \|\gamma'(t)\|$

calculons $\|\gamma'(t)\|$

$\gamma'(t) = (1 - t^2, 2t, 1 + t^2)$

$\|\gamma'(t)\|^2 = 2(1+t^2)^2$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}(1+t^2)$

$\|\gamma'(t)\|^2 = (1-t^2)^2 + 4t^2 + (1+t^2)^2$
$= 1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2 + 1 + 2t^2 + t^4$
$= 2 + 4t^2 + 2t^4$
$= 2(1 + 2t^2 + t^4)$
$= 2(1+t^2)^2$

d'où $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}$

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)}(1-t^2, 2t, 1+t^2)$$

soit $\vec{T} = \left(\frac{1-t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)}, \frac{2t}{\sqrt{2}(1+t^2)}, \frac{1+t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)} \right)$

$\vec{N} = ?$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^2}(-2t, 1-t^2, 0)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{(1+t^2)^3}\left(-2t, 1-t^2, 0\right)$$

courbure

$$K = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{1}{(1+t^2)^3}\sqrt{(-2t)^2 + (1-t^2)^2}$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = -\frac{1}{(1+t^2)^3}\left(-2t, 1-t^2, 0\right)$$

courbure K

$$K = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = \frac{1}{(1+t^2)^3}\sqrt{(-2t)^2 + (1-t^2)^2}$$

$$K = \frac{1}{(1+t^2)^3}\left(1+t^2\right)$$

Soit $K = \frac{1}{(1+t^2)^2}$

d'où $\vec{N} = \frac{1}{k} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{(1+t^2)}\left(-2t; 1-t^2, 0\right)$

$$\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} \cdot \frac{1}{(1+t^2)} \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \\ 1+t^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2t \\ 1-t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)^2} \begin{pmatrix} -1+t^4 \\ -2t-2t^3 \\ (1+t^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} \cdot \begin{pmatrix} -1+t^2 \\ -2t \\ 1+t^2 \end{pmatrix}$$

Torsion τ

$$\tau = \frac{d\vec{N}}{ds} \cdot \vec{B}$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\vec{N}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \quad \text{où} \quad N(t) = \frac{1}{1+t^2}(-2t, 1-t^2, 0)$$

$$N'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}(-2t, 1-t^2, 0) + \frac{1+t^3}{(1+t^2)^2}(-2, -2t, 0)$$

$$= \frac{-2}{(1+t^2)^2}\left[(-2t^2, t-t^3, 0) + (1+t^2, t+t^3, 0)\right]$$

$$N'(t) = \frac{-2}{(1+t^2)^2}(1-t^2, 2t, 0)$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)} \cdot \frac{-2}{(1+t^2)^2}(1-t^2, 2t, 0)$$

La torsion est : $\tau = \frac{1}{(1+t^2)^4}\left[(1-t^2)^2 + (-4t^2) + 0\right]$

$$\tau = \frac{-1}{(1+t^2)^4}\left[-(1+t)^2\right]$$

$$\tau = \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

Γ helice ?

1ère justification

$$\vec{T} = \left(\frac{1-t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)}, \frac{2t}{\sqrt{2}(1+t^2)}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

$\vec{T} \cdot \vec{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ independant de t, donc Γ helice

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \|\vec{T}\| \cdot \|\vec{k}\| \cos\theta, \quad \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

L'axe est $\mathbb{R}\vec{k}$

2e justification

$\frac{\tau}{k} = 1$, rapport constant, donc Γ helice.

1) L'equation du plan osculateur au point $P = \gamma(t)$

$\det(\vec{PM}, \gamma'(t), \gamma''(t)) = 0$

$$\begin{vmatrix} x - t + \frac{t^3}{3} & 1 - t^2 & -2t \\ y - t^2 & 2t & 2 \\ z - t - \frac{t^3}{3} & 1 + t^2 & 2t \end{vmatrix} = 0$$

1/10/2016 TD Chapitre 3 Dr DIARRASSOUBA SIRIKI

EXERCICE 1

Montrons que les nappes $\Sigma = (\mathcal{S}, \Pi, D)$ avec $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sont réglées.

1) $\Pi(U,V) = (U, V, UV)$

on voit que $\Pi(U,V) = (U,0,0) + (0,V,UV)$
$= (U,0,0) + V(0,1,U)$

Soit $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ U \end{pmatrix}$, $A = (U,0,0)$

D'où $\Pi(U,V) = \mathcal{D}_U = A + \mathbb{R}\vec{d}$

Σ est engendrée par $\{\mathcal{D}_U, U \in \mathbb{R}\}$

Ainsi Σ est réglée

Autre methode

$\Pi(U,V) = (0,V,0) + (U,0,UV)$

$\Pi(U,V) = (0,V,0) + U(1,0,V)$

soit $\mathcal{D}_V = \begin{pmatrix} 0 \\ V \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ V \end{pmatrix}$

Donc Σ est engendrée par $\{\mathcal{D}_V, V \in \mathbb{R}\} \Rightarrow \Sigma$ reglée

* Precisons les lignes coordonnées

Première ligne coordonnées

fixons U, on obtient $\mathcal{D}_U$

Deuxième ligne coordonnée.

fixons V, on obtient $\mathcal{D}_V$

2) $\Pi(U,V) = (V\cos U, V\sin U, V)$
$= (0,0,0) + V(\cos U, \sin U, 1)$

$\mathcal{D}_U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos U \\ \sin U \\ 1 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

$\Pi(x,y) = \left(x, y, \frac{2xy}{x^2+y^2}\right)$

Posons $\begin{cases} x = r\cos\theta & r>0 \quad \theta \in [0, 2\pi[\\ y = r\sin\theta \end{cases}$

on a : $\Pi(r,\theta) = \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\right)$

$= (r\cos\theta, r\sin\theta, 2\cos\theta\sin\theta)$

$= (r\cos\theta, r\sin\theta, \sin 2\theta)$

$\Pi(r,\theta) = (0, 0, \sin 2\theta) + r(\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$\mathcal{D}_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\mathcal{E}$ est engendrée par $\{\mathcal{D}_\theta, \theta \in [0, 2\pi[\}$

2ème methode

on sait qu'un conoïde est reglé.

Montrons que $\mathcal{S}$ est un conoïde.

$f(x,y,z) = (x^2+y^2)z - 2xy$

$f(\lambda x, \lambda y, z) = ((\lambda x)^2 + (\lambda y)^2)z - 2(\lambda x, \lambda y)$

$= \lambda^2[(x^2+y^2)z - 2xy]$

$f(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^2 f(x,y,z)$

D'où $\mathcal{S}$ est un conoïde. Donc $\mathcal{E}$ est réglée.

* Premiere ligne coordonnée

fixons θ, on obtient $\mathcal{D}_\theta$

* deuxieme ligne coordonnée :

fixons r, on obtient : une courbe parametrée definie par $\theta \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, \sin 2\theta)$

Donc Σ est engendrée par $\{\mathcal{D}_u, v \in \mathbb{R}\}$

Ainsi elle est reglée

Premier ligne coordonnée

fixons U, on obtient $\mathcal{D}_u$

Deuxième ligne coordonnée

fixons V, on obtient un cercle de rayon V au niveau de $z = V$ (la côte $z = V$).

4) $\mathcal{S} : x^3 - 3xy + z = 0$

$x^3 - 3xy + z = 0 \Rightarrow z = 3xy - x^3$

$\Pi(x,y) = (x, y, 3xy - x^3)$

$= (x, 0, -x^3) + (0, y, 3xy)$

$= (x, 0, -x^3) + y(0, 1, 3x)$

$\Pi(x,y) = (x, 0, -x^3)$

$\mathcal{D}_x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x^3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3x \end{pmatrix}$

Donc $\mathcal{E}$ est engendrée par $\{\mathcal{D}_x, x \in \mathbb{R}\}$ par

$\{\mathcal{D}_x, x \in \mathbb{R}\}$

Ainsi $\mathcal{E}$ est réglée.

* Première ligne coordonnée :

fixons x, on obtient $\mathcal{D}_x$

* Deuxième ligne coordonnée

fixons y, on obtient une courbe paramétrée définie par $x \mapsto (x, y, 3xy - x^3)$

5) $\mathcal{S} : (x^2 + y^2)z - 2xy = 0$

$(x^2 + y^2)z - 2xy = 0 \Rightarrow z = \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0)$

Remarque : si $(x,y)=(0,0)$ on a : $\Pi(x,y)=(0,0,z)$

Exercice 4

1) $(\mathcal{S}) : 5(x+2y-z-3)+9(3x+2y-z-3)^2+7(x-4y+2z+$

Posons $\begin{cases} X = x+2y-z-3 \\ Y = 3x+2y-z-3 \\ Z = x-4y+2z+6 \end{cases}$

on a : $\det(L(X),L(Y),L(Z)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & - \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = ($

Donc $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $aX+bY=Z$

Determinons a et b

on a : $Z = aX+bY \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=1 \\ 2a+2b=-4 \\ -a-b=2 \\ -3a-3b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b=1 \\ a+b=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b=3 \\ a=-2-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{3}{2} \\ a=-\frac{7}{2} \end{cases}$

Donc $Z=-\frac{7}{2}X+\frac{3}{2}Y$

Par conséquent $\mathcal{S}$ est un cylindre

* Elements caracteristiques Dr N'ZOUKOUDI

Axe du cylindre $\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases}$

$\begin{cases} X = x+2y-z-3=0 & (1) \\ Y = 3x+2y-z-3=0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=z+3 & (1) \\ 3x+2y=z+3 & (2) \end{cases}$

$(2)-(1) \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \quad (3)$

Portons (3) dans (1)

on a : $2y=z+3$

$y=\frac{1}{2}(z+3)$ et z quelconque

$(x,y,z) = \left(0, \frac{z}{2} + \frac{z}{2}, z\right)$
$= \left(0, \frac{3}{2}, 0\right) + \frac{z}{2}(0,1,2)$

L'axe est $\mathbb{R}\vec{d}$ où $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

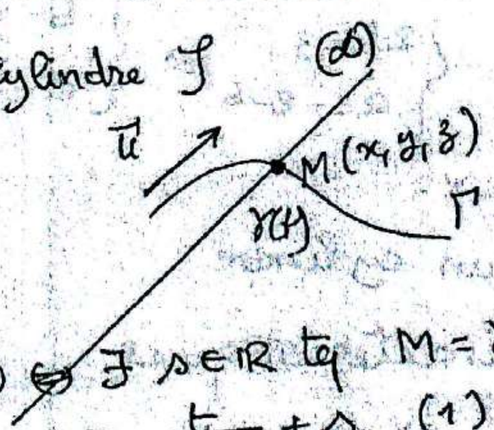
* une directrice a pour équation

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 5(x+2y-z-3)+9(3x+2y-z-3)^2+7(x-4y+2z+6)^3=0 \end{cases}$$

une deuxième base, droite
une equation d'un plan P_0 orthogonale à $\vec{d}$
et passant par O est : $y+2z=0$
d'où la base droite d'equations :

$$\begin{cases} y+2z=0 \\ 5(x+2y-z-3)+9(3x+2y-z-3)^2+7(x-4y+2z+6)^3=0 \end{cases}$$

2) Cylindre $\mathcal{J}$ $\qquad \gamma(t) = \left(\frac{t}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, \frac{t^3}{t-1}\right)$



$M \in \Delta \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}$ tq $M = \gamma(t) + s\vec{u}$

D'où $\begin{cases} x = \frac{t}{t-1} + s & (1) \\ y = \frac{t^2}{t-1} + s & (2) \\ z = \frac{t^3}{t-1} + s & (3) \end{cases}$

$(2)-(1) \Leftrightarrow y-x = t \quad (4)$
$(3)-(2) \Leftrightarrow z-y = t^2 \quad (5)$
Portons (4) dans (5), on obtient : $z-y = (y-x)^2$
Soit $(x-y)^2 + y - z = 0$
$X^2 + Y = 0$

3/ Equation du cylindre $\mathcal{C}$ de direction $\vec{v} = (1,1,0)$

Soit $M = (x, y, z)$ un point de $\mathcal{C}$.

Tout point de la generatrice $\mathcal{D}$ passant par M s'ecrit $M + t\vec{u}$ avec $t \in \mathbb{R}$ soit $\begin{pmatrix} x+t \\ y+t \\ z \end{pmatrix}$

l'equation de l'intersection $\mathcal{D} \cap \mathcal{S}$ est :

$(x+t)(y+t) - 2z = 0$

Soit $t^2 + (x+y)t + xy - 2z = 0$

$\mathcal{D}$ tangent à $\mathcal{S} \Leftrightarrow \Delta = 0$

Soit $\Delta = (x+y)^2 - 4(xy - 2z) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4xy + 8z = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + 8z = 0$

$\Rightarrow (x-y)^2 + 8z = 0$

<u>Exercice 7</u>

(E_1) : $(x - 4y + 2z)^3 + 9(3x + 2y - z)^3 + 7(x + 2y - z) = 9$

Nature

Posons $\begin{cases} X = x - 4y + 2z \\ Y = 3x + 2y - z \\ Z = x + 2y - z \end{cases}$

$$\det(L(X), L(Y), L(Z)) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $Z = aX + bY$

avec $a = -\frac{2}{7}$ et $b = \frac{3}{7}$

L'equation donnée devient

$$X^2 + 9Y^2 + 7\left(-\frac{2}{7}X + \frac{3}{7}Y\right) = 9$$

X et Y non colinéaires alors $\mathcal{S}$ est un cylindre

* Axe du cylindre

$$\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4y+2z=0 \\ 3x+2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4y=-2z & (1) \\ 3x+2y=z & (2) \end{cases}$$

$(2)-3(1) : 14y=7z \Rightarrow y=\frac{1}{2}z$

$x=4y-2z$

$x=2z-2z=0$

Soit $\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2}z \end{cases}$ et z quelconque

$(x,y,z)=(0,\frac{1}{2}z,z)=\frac{1}{2}z(0,1,2)$

d'où l'axe $\mathbb{R}\vec{d}$ avec $\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$

* une directrice a pour équations

$$\begin{cases} x+y=0 \\ (x-4y+2z)^3+9(3x+2y-z)^3+7(x+2y-z)=9 \end{cases}$$

$(E_2) : x^2-2xy+y^2+(2x-y)^2 e^{(2y-z)^2}=0$

soit $(x-y)^2+(2x-y)^2 e^{(2y-z)^2}=0$

Posons $\begin{cases} X=x-y \\ Y=2x-y \\ Z=2y-z \end{cases}$

$\det(\mathcal{L}(X),\mathcal{L}(Y),\mathcal{L}(Z))=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

Le changement de coordonnées est valide,

l'équation devient $X^2+Y^2e^{Z^2}=0$

Posons $F(X,Y,Z)=X^2+Y^2e^{Z^2}$

$F(\lambda X,\lambda Y,Z)=\lambda^2X^2+\lambda^2Y^2e^{Z^2}=\lambda^2(X^2+Y^2e^{Z^2})$

$F(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^2 F(x,y,z)$ Donc S est conoïde.

* caracteristique du conoïde

• Axe du conoïde

$\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 & (1) \\ 2x-y=0 & (2) \end{cases}$

on a : $x=0$, $y=0$ et z quelconque

$(x,y,z) = (0,0,z) = z(0,0,1)$

l'Axe est $\mathcal{D} = O + \mathbb{R}\vec{k}$ soit $\mathcal{D}$ est l'axe $(O,\vec{k})$

• Plan directeur d'equation

$Z=0 \Rightarrow 2y-z=0$

• une directrice

$\begin{cases} x+y+z=0 \\ (x-y)^2+(2x-y)^2 e^{(2y-z)^2}=0 \end{cases}$

(E_3) : $(x+y+2z)(x+2y-z)+(x+3y)(y+z)=0$

$AB = \frac{1}{4}(A+B)^2 - \frac{1}{4}(A-B)^2$ d'où

$(E_3) \Leftrightarrow (x+y+2z)(x+2y-z)+\frac{1}{4}(x+4y+z)^2-\frac{1}{4}(x+2y-z)^2$

Posons $\begin{cases} X=x+y+2z \\ Y=x+2y-z \\ Z=x+4y+z \end{cases}$

on a : $\det(\mathcal{L}(X),\mathcal{L}(Y),\mathcal{L}(Z)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$

le ~~sommet~~ changement de coordonnee est valide.

L'equation donnée devient $XY+\frac{1}{4}Z^2-\frac{1}{4}Y^2=0$

$F(X,Y,Z) = XY+\frac{1}{4}Z^2-\frac{1}{4}Y^2$

Soit $F(\lambda X,\lambda Y,\lambda Z) = (\lambda X)(\lambda Y)+\frac{1}{4}(\lambda Z)^2-\frac{1}{4}(\lambda Y)^2$

$$= \lambda^2(xy) + \frac{\lambda^2}{4}z^2 - \frac{\lambda^2}{4}y^2$$
$$= \lambda^2 F(x,y,z)$$

D'où $\mathcal{S}$ est un cône.

* caractéristique du cône

sommet S

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 & (1) \\ x+2y-z=0 & (2) \\ x+4y+z=0 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ y-3z=0 & (2)-(1) \\ 3y-z=0 & (3)-(1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ y-3z=0 \\ z=0 \end{cases}$$

D'où $S=0$

une directrice a pour equation

Soit $\mathcal{P}$ un plan ne contenant pas le sommet S, prenons $\mathcal{P}: x+y=1$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (x+y+2z)(x+2y-z)+(x+3y)(y+z)=0 \end{cases}$$

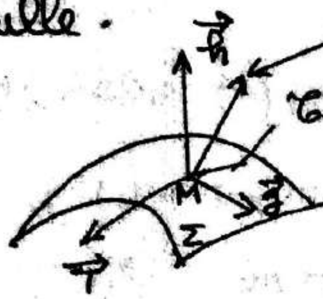
Scanned by CamScanner

TD Chapitre 4 Dr N'ZOUKOUDI

exercice 2

Rappel de cours

une geodesique est une classe courbe tracée telle qu'en tout point la courbure géodesique $K_g = \frac{dT}{ds} \cdot \vec{g}$ est nulle.



$T_M = \text{vect}\left(\frac{\partial \pi}{\partial u}, \frac{\partial \pi}{\partial v}\right)$

$\Sigma : \pi(u,v) = (\ , \ , \ )$

$\vec{h} = \frac{\partial \pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v}$

$R_F = (M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$

$R_D = (M, \vec{T}, \vec{g}, \vec{h})$

les surfaces reglées sont ceux qui sont reunion des ses generatrices

courbure normale

$K_n = \frac{dT}{ds} \cdot \vec{h}$

Une droite est une geodesique elementaire.

courbure geodesique

$K_g = \frac{dT}{ds} \cdot \vec{g}$

le cône est reunion de ses generatrices

$\gamma(t) = \pi(u(t), v(t))$

Retour à l'exercice

ligne coordonnée $\gamma(t) = (u_0, v(t))$

$\gamma(t) = (u(t), v_0)$

$\gamma(s) = (s, v(s))$

Cône $\mathcal{T}$: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Geodesiques de $\mathcal{T}$?

$\underbrace{\|\gamma'(s)\|}_{\vec{T}} = 1$

— 1e famille de geodesiques

Ce sont les generatriques du cônes

— 2e famille de geodesiques

La courbe tracée parametrée par $\gamma(s)_s = (s, v(s))$ est une geodesique si $\det\left(\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{h}\right) = 0$ en tout point $P = \gamma(s)$ de la courbe.

une parametrisation de $\mathcal{T}$ est $\pi(\theta, z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$

une courbe tracée est paramétré par

$$\gamma(s) = (v(s)\cos s,\ v(s)\sin s,\ v(s))$$

soit $\gamma(s) = v(s)\ (\cos s, \sin s, 1)$

$$\vec{T} = v'(s)(\cos s, \sin s, 1) + v(s)\ (-\sin s, \cos s, 0)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = v'(s)\ (-2\sin s, 2\cos s, 0) + v''(s)\ (\cos s, \sin s, 1)$$
$$v(s)\ (-\cos s, -\sin s, 0)$$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = v''(s)\ (\cos s, \sin s, 1) + 2v'(s)\ (-\sin s, \cos s, 0) + v(s)\ (-$$

$$\vec{n} = \frac{\partial \pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v} \quad \text{où} \quad \pi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, v)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos u \\ v\sin u \\ -v\sin^2 u - v\cos^2 u \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\vec{n}$ devient au point $P = \gamma(s) = \pi(s, \gamma(s))$

$$\vec{n} = v(s) \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin s \\ -1 \end{pmatrix}$$

la courbure geodesique est nulle

L'equation est equivalente à :

$$\det\left(\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{n}\right) = 0 \quad \text{où} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ -1 \end{pmatrix}$$

la 2e famille de geodesiques est constitué des solutions de l'equation $\det\left(\vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{n}\right) = 0$

Exercice 5

Soit la nappe paramétré $\Sigma = (J, \pi, D)$ telle que $D = \mathbb{R}^2$
et $\pi : D \longrightarrow \mathcal{E}$

$$(u,v) \longmapsto \pi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$$

1- $\pi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$

$\pi(u,v) = (0,0,u) + v(\cos u, \sin u, 0)$

le point $\pi(u,v) \in \mathcal{D}_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc la surface est réglée

D'où la nappe est engendrée par des droites $\mathcal{D}_u$, $u \in \mathbb{R}$.

Lignes coordonnées

1ère famille de lignes coordonnées

Fixons u. on obtient la droite $\mathcal{D}_u$.

2e famille de lignes coordonnées :

Fixons $v = a$

on a : $\pi(u,a) = (a\cos u, a\sin u, u)$

c'est une helice $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, t)$

2- $\begin{cases} x = v\cos u & (1) \\ y = v\sin u & (2) \\ z = u & (3) \end{cases}$

$\frac{y}{x} = \tan u = \tan z$ soit $y - x\tan z = 0$

Posons $F(x,y,z) = y - x\tan z$

on a : $F(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda y - \lambda x \tan z = \lambda(y - x\tan z)$

$= \lambda F(x,y,z)$

Donc J est un conoïde d'axe $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ soit d'axe

$(O, \vec{k})$, de plan directeur $z=0$ soit le plan xOy

et de directrice d'equations $\begin{cases} y+z=0 \\ y-x\tan z=0 \end{cases}$

3) Σ regulière ?

$\Pi(u,v)=(v\cos u, v\sin u, u)$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Pi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ -v \end{pmatrix} \neq 0$$

Car on peut pas trouver de u tel que $\cos u = \sin u = 0$

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Donc la nappe Σ est regulière.

$\phi_1 = ?$ $\quad d\rho = \nabla = \frac{\partial \Pi}{\partial u} du + \frac{\partial \Pi}{\partial v} dv = \lambda \frac{\partial \Pi}{\partial u} + \mu \frac{\partial \Pi}{\partial u}$

$\phi_1 = \phi_1(d\rho) = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2$.

où $E = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial u}\right)^2$, $F = \frac{\partial \Pi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial v}$ et $G = \left(\frac{\partial \Pi}{\partial v}\right)^2$

$E = 1+v^2$, $F=0$, $G=1$

$\phi_1 = (1+v^2)(du)^2 + (dv)^2$

$\phi_2 = ?$

$\phi_2 = L(du)^2 + 2M\,du\,dv + N(dv)^2$

où $L = \frac{D}{H}$, $M = \frac{D'}{H}$, $N = \frac{D''}{H}$ $\quad H>0$

et $D = \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2}$, $D' = \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial u \partial v}$, $D'' = \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v^2}$

$$D = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v\cos u \\ -v\sin u \\ 0 \end{pmatrix} = v\sin u\cos u - v\cos u \sin u$$

$D=0$

$$D' = \vec{n}\, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial v \partial u} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$$

$$D'' = \vec{n} \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\phi_2 = \frac{1}{H}\left(0(du)^2 + 2\,du\,dv + 0(dv)^2\right)$$

$$\phi_2 = \frac{2}{H}\,du\,dv.$$

Chapitre 3

07/11/16 Exercice 5

a) Montrons que la surface S d'équation $(x+y+2z+3)^2+(y-z+1)(2y+z-1)=0$ est un cône.

Posons $X = (x+y+2z+3)$; $Y = y-z+1$ et $Z = 2y+z-1$

Calculons $\det(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y), \mathcal{L}(Z)) = A$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Donc le changement de variable est bien défini.

Posons $F(X, Y, Z) = X^2 + YZ$

Posons $F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Calculons : $F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = (\lambda X)^2 + (\lambda Y)(\lambda Z) = \lambda^2 X^2 + \lambda^2 YZ$

$F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^2 F(X, Y, Z)$.

Donc la surface S est un cône.

* Les caractéristiques
  - le sommet

$$\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z+3 = 0 & (1) \\ y-z+1 = 0 & (2) \\ 2y+z-1 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2z+3=0 \\ y-z+1=0 \\ y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-5 \\ z=1 \\ y=0 \end{cases}$$

D'où le sommet est le point $S=(-5,0,1)$

une directrice a pour équation

$$\begin{cases} x+y=0 \\ (x+y+2z+3)^2+(y-z+1)(2y+z-1)=0 \end{cases}$$

b) Formons une équation du cône $\mathcal{J}$ de sommet $A(-3,0,3)$ et de directrice $\mathcal{E}$ paramétrée par $\gamma(t)=(t^2-1,\ 2t,\ t^2+t+1)$

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de $\mathcal{J}$ appartient à une génératrice $\mathcal{D}_M$ passant par A et $\gamma(t)$.

on a : $M \in \mathcal{D}_M \iff \exists s \in \mathbb{R}^*$ tel que $M = A + s\overrightarrow{A\gamma(t)}$

$$\iff \begin{cases} x=-3+s(t^2-1+3) \\ y=0+s(2t+0) \\ z=3+s(t^2+t+1-3) \end{cases} \iff \begin{cases} x=-3+s(t^2+2) \\ y=2st \\ z=3+s(t^2+t-2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+3=s(t^2+2) \\ \frac{y}{2}=st \\ z-3=s(t^2+t-2) \end{cases}$$

Posons $\begin{cases} X=x+3 \\ Y=\frac{y}{2} \\ Z=z-3 \end{cases}$

$$\begin{cases} X=st^2+2s \\ Y=st \\ Z=st^2+st-2s \end{cases} \qquad \begin{cases} Z-Y=st^2-2s \\ X=Yt+2s \end{cases}$$

$$Z-Y+X=st^2+Yt$$

[illegible]

$t = \dfrac{z-y+x}{2y}$ avec $y \neq 0$

$\Rightarrow s = \dfrac{x - \dfrac{y(z-y+x)}{2y}}{2} = \dfrac{2x-(z-y+x)}{4}$

$s = \dfrac{x+y-z}{4}$

on a : $y = st = \left(\dfrac{x+y-z}{4}\right)\left(\dfrac{z-y+x}{2y}\right)$

$\Leftrightarrow 8y^2 = (x+y-z)(z-y+x)$

$\Leftrightarrow (x+y-z)(z-y+x) - 8y^2 = 0$

Pour $y = 0 \Rightarrow \dfrac{y}{2} = 0 \Rightarrow y = 0$

Conclusion : l'equation du cône S est :
$(x+y-z)(z-y+x) - 8y^2 = 0$ et $y \neq 0$.

<u>exercice 6</u>

1) Donnons une equation du conoïde droit S d'axe (O,k) et de direction Γ paramétré par γ telle que
$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartenant à la génératrice D_M passant par $P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ et $\gamma(t)$

$M \in D_M \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}$ tel que $M = P + s\overrightarrow{P\gamma(t)}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + s(\cos t - 0) \\ y = 0 + s(\sin t - 0) \\ z = t + s(t - t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s\cos t \\ y = s\sin t \\ z = t. \end{cases}$

$\dfrac{y}{x} = \tan t \Rightarrow y = x\tan t \Rightarrow \boxed{y - x\tan z = 0}$

2) Montrons que la surface $\mathcal{S}$ d'equation

(*) $(y-z)(x+2y-1)^2-2(y+z+1)(x+2y-1)-2(y-z)=0$

Posons $\begin{cases} X=y-z \\ Y=x+2y-1 \\ Z=y+z+1 \end{cases}$

Calculons $\det(\mathcal{L}(X),\mathcal{L}(Y),\mathcal{L}(Z))=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$

Alors le changement de variable est bien defini.

(*) devient $XY^2-2ZY-2X=0$

Soit $F(X,Y,Z)=XY^2-2ZY-2X$

soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$ tq : $F(\lambda X,Y,\lambda Z)=\lambda XY^2-2\lambda ZY-2\lambda X$

$=\lambda F(X,Y,Z)$

Donc $\mathcal{S}$ est un conoïde.

Precisons ses caracteristiques

Axe :

Soit $\begin{cases} X=0 \\ Z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ y+z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=z \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2} \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\mathcal{D}=\begin{pmatrix} x \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ tq $x\in\mathbb{R}$

$\mathcal{D}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}+x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}$

la droite $\mathcal{D}=\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}+\mathbb{R}\vec{i}$

* Plan directeur on pose que la variable non affectée du λ est nulle. $y=0$ d'où $x+2y-1=0$
le plan directeur est $L: x+2y-1=0$

* Directrice

$$\begin{cases} x+y=0 \\ (y-z)(x+2y-1)^2-2(y+z+1)(x+2y-1)-2(y-z)=0 \end{cases}$$

EXERCICE 2

$(\mathcal{S})$: $x^3-3xy-z=0$ (*)

1) Soit $\mathcal{D}_M=0+t\vec{OM}$ une generatrice passant par $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $t\in\mathbb{R}$.

$P\in\mathcal{D}_M \Leftrightarrow P\begin{pmatrix}tx\\ty\\tz\end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$

$P\in(\mathcal{S}) \Leftrightarrow (tx)^3-3(tx)(ty)-(tz)=0$

$\Leftrightarrow t(t^2x^3-3xyt-z)=0$

$\Leftrightarrow t=0$ ou $x^3t^2-3xyt-z=0$

Posons $Q(t)=x^3t^2-3xyt-z$

on a: $\Delta=9x^2y^2+4x^3z$

L'equation du cône est telle que $\Delta=0$

$\Delta=0 \Leftrightarrow 9x^2y^2+4x^3z=0$

Courbe de contact

$\Delta=0 \Rightarrow Q(t)=0$ admet une racine double t_0

Determinons t_0

$t_0=\frac{3xy}{2x^3}=\frac{3y}{2x^2}$, $x\neq 0$

la courbe de contact est caractérisée par :

$(t_0x, t_0y, t_0z)=\left(\frac{3xy}{9x^2}, \frac{3y^2}{9x^2}, \frac{3yz}{9x^2}\right)$

$= \frac{3y}{2x^2}(x, y, z),\ x \neq 0$.

Chapitre 4

Exercice 5 (suite)

4) dP la notation d'un vecteur tangent à la surface opposée

- directions et lignes asymptotiques

$\Phi_2(dP) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{H}(2\,du\,dv) = 0$

$\Leftrightarrow du = 0$ ou $dv = 0$

• directions asymptotiques

$\left.\begin{array}{l}\vec{V} = (du, dv) \\ du = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{V}' = (0, dv)$ d'où $\vec{V} = dv(0,1)$

$\Rightarrow \vec{V}' = \frac{\partial \pi}{\partial v}$

$\left.\begin{array}{l}\vec{V} = (du, dv) \\ dv = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{V}' = (du, 0)$ d'où $\vec{V}' = du(1,0)$

$\Rightarrow \vec{V}' = \frac{\partial \pi}{\partial u}$

les directions asymptotiques sont : $\frac{\partial \pi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \pi}{\partial v}$

• lignes asymptotiques

Soit $du = 0$ $\qquad u'dt = 0 \Rightarrow u' = 0$

Alors $u = u_0 = \text{cste}$

les 1ère famille de lignes asymptotiques est l'ensemble des lignes coordonnées.

$\gamma(v) = \pi(u_0, v)$

Soit $dv = 0$

Les lignes coordonnées

$\gamma(u) = \pi(u, v_0)$

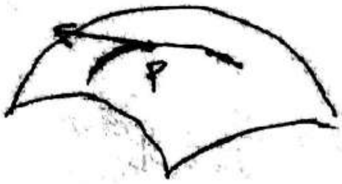
Soit une 2e famille de lignes asymptotiques -

une direction : vecteur tangent.

$\vec{V} = dP$

$\vec{v} = (x, y)$ $\vec{v}' = (x', y')$

$\varphi(\vec{v}, \vec{v}') = (x\ y)\, A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$



$q(v) = (x\ y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= \vec{v} \cdot \varphi(v) = \varphi(v) \cdot \vec{v}$

les vecteurs propres sont les directions principales

les valeurs propres sont les courbures principales

$\rho_1 \leq K_n \leq \rho_2$

- Directions principales et lignes de courbure

$V = \frac{\partial \Pi}{\partial u} du + \frac{\partial \Pi}{\partial v} dv$ solution de l'equation differentielle

$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Ldu + Mdv \\ Fdu + Gdv & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0$

on a : $E = 1 + v^2$, $F = 0$, $G = 1$, $L = 0$, $M = \frac{2}{H}$; $N = 0$

$\begin{vmatrix} (1+v^2)du & \frac{2}{H} dv \\ dv & \frac{2}{H} du \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} (1+v^2)du & dv \\ dv & du \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1+v^2)(du)^2 - (dv)^2 = 0$

$\left(\sqrt{1+v^2}\, du - dv\right)\left(\sqrt{1+v^2}\, du + dv\right) = 0$

- directions principales

Soit $\sqrt{1+v^2}\, du - dV = 0 \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1+N^2}} dv$

$V = (du, dv) = \left(\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}, dv \right) = \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \left(1, \sqrt{1+v^2}\right)$

une $1^{ère}$ direction principale est :

$V_1 = \left(1, \sqrt{1+v^2}\right) = \frac{\partial \Pi}{\partial u} + \sqrt{1+v^2}\, \frac{\partial \Pi}{\partial v}$

Soit $\sqrt{1+v^2}\, du + dv$

une ~~2e~~ ~~fam~~ direction principale est :

$V_2 = \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}(-1, \sqrt{1+v^2})$

soit $V_2 = \frac{\partial\pi}{\partial u} - \sqrt{1+v^2}\,\frac{\partial\pi}{\partial v}$

- lignes de courbure

soit $\sqrt{1+v^2}\,du - dv = 0$ $\quad du = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv$

$u = \operatorname{argsh}(v) + c$, $c \in \mathbb{R}$

une 1ère famille de lignes de courbure est constituée par : $\gamma(v) = \pi(\operatorname{argsh}(v) + c)$, $c \in \mathbb{R}$

Soit $\sqrt{1+v^2}\,du + dv = 0$

$du = \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}$ $\quad$ ~~soit~~ $u = -\operatorname{argsh}(v) + K$, $K \in \mathbb{R}$

Les courbes tracés : $\gamma(v) = \pi(-\operatorname{argsh}(v) + K, v)$, $K \in \mathbb{R}$ forment une 2e famille de lignes de courbure.

- Courbures principales ρ_1, ρ_2

Elles sont les solutions de

$$(EG - F^2)\rho^2 - (LG + EN - 2FM)\rho + LN - M^2 = 0$$

on a : $E = 1+v^2$, $F = 0$, $G = 1$, $L = 0$, $M = \frac{2}{H}$, $N = 0$

$$(1+v^2)\rho^2 - \frac{4}{H^2} = 0 \Rightarrow \rho^2 = \frac{4}{H^2(1+v^2)}$$

$$\rho_1 = \frac{2}{H\sqrt{1+v^2}} \text{ et } \rho_2 = -\frac{2}{H\sqrt{1+v^2}}$$

<u>Exercice 1:</u>

Equation du plan osculateur P_0 en $P = \gamma(t)$ à Γ

$\det(\vec{PM}, \gamma'(t), \gamma''(t)) = 0$ $\quad \begin{vmatrix} x-t & 1 & 0 \\ y-t^2 & 2t & 2 \\ z-t^3 & 3t^2 & 6t \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-t & 1 & 0 \\ y-t^2 & 2t & 1 \\ z-t^3 & 3t^2 & 3t \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3t^2(x-t)-(y-t^2)\times 3t + z - t^3 = 0$$

$$\mathcal{P}_\theta : 3t^2x - 3ty + z - t^3 = 0$$

$\mathcal{P}_\theta \cap (0,z) = \{Q(t)\}$

$x = y = 0 \Rightarrow z - t^3 = 0 \Rightarrow z = t^3$.

donc $Q(t) = (0, 0, t^3)$

$\mathcal{S}$ surface engendré par les droites $(PQ(t))$

$M \in (PQ(t)) \Rightarrow \exists s \in \mathbb{R} \mid M = Q(t) + s\,\overrightarrow{PQ(t)}$

$(x,y,z) = (0,0,t^3) + s(-t, -t^2, 0) \quad M = (-st, -st^2, t^3)$

une parametrisation de $\mathcal{S}$ est : $\pi(u,v) = (0,0,u^3) + v(-u, -u^2, 0)$

ou $\pi(u,v) = (-vu, -vu^2, u^3)$.

Les directions asymptotiques annulent ϕ_2

$\phi_2 = L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ avec $L = \frac{D}{H}$, $M = \frac{D'}{H}$, $N = \frac{D''}{H}$

$$\vec{n} = \frac{\partial \pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -v \\ -2vu \\ 3u^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -u \\ -u^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^4 \\ -3u^3 \\ +vu^2 - 2vu^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3u^4 \\ -3u^3 \\ -u^2v \end{pmatrix} = -u^2 \begin{pmatrix} -3u^2 \\ 3u \\ v \end{pmatrix}$$

$\vec{n} = \vec{0}$ ssi $u = 0$

Pour que la nappe soit regulière pour $(u,v) \in D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

$H = \|\vec{n}\|$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial u^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2v \\ 6u \end{pmatrix} ; \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial v \partial u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{\partial^2 \pi}{\partial u^2} \cdot \vec{n} = -u^2 (0, -2v, 6u) \begin{pmatrix} -3u^2 \\ 3u \\ v \end{pmatrix} = -u^2[-6uv + 6uv]$$

$D = 0$

$$D' = \frac{\partial^2 \pi}{\partial v \partial u} \cdot \vec{n} = -u^2(-1, -2u, 0) \begin{pmatrix} -3u^2 \\ 3u \\ v \end{pmatrix} = -u^2[3u^2 - 6u^2]$$

$D' = 3u^4$

$$D'' = \frac{\partial^2 \pi}{\partial v^2} \cdot \vec{n} = 0$$

Donc $L = 0$, $M = \frac{3u^4}{H}$; $N = 0$

Alors $\phi_2 = 2 \cdot \frac{3u^4}{H} du\, dv$

$$\phi_2 = \frac{6u^4}{H} du\, dv.$$

exercice 4

1°) Equation de $\mathcal{J}$

$$\begin{cases} x = t + s & (1) \\ y = t^2 + s^2 & (2) \\ z = t^2 - s^2 & (3) \end{cases}$$

(3) et (1) donne $z = x(t-s)$

$\Rightarrow t - s = \frac{z}{x}$ (4)

$t + s = x$ (1)

$(4) + (1) \Rightarrow t = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x} + x\right)$ (5)

$(1) - (4) \Rightarrow s = \frac{1}{2}\left(x - \frac{z}{x}\right)$ (6)

(5) et (6) dans (2) $\Rightarrow y = \frac{1}{4}\left(\frac{z}{x} + x\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x - \frac{z}{x}\right)^2$

$$4x^2 y = (x^2 + z)^2 + (x^2 - z)^2$$

$$\boxed{(x^2 + z)^2 + (x^2 - z)^2 - 4x^2 y = 0}$$

ANALYSE CONVEXE ET OPTIMISATION

UFHB
Licence 3

Année Universitaire 2014-2015

TD d'Analyse Convexe

Exercice 1

1) Montrer qu'une partie de R est convexe si et seulement si c'est un intervalle.
2) Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ vérifiant la propriété de demi somme suivante :

$$(x,\ y \in S) \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in S.$$

a) S est-il convexe ?
b) Même question si l'on suppose S fermé.

Exercice 2

1) Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\mathrm{conv}(A+B) = \mathrm{conv}A + \mathrm{conv}B, \quad \mathrm{conv}(A \times B) = \mathrm{conv}A \times \mathrm{conv}B.$$

2) Soit $P = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ où les C_i sont des convexes de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\mathrm{conv}P = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0,\ x_i \in C_i, \forall i = 1 \cdots, k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Exercice 3

Soit C le convexe défini comme étant l'enveloppe convexe de S. Montrer que tout point extremal de C est nécessairement dans S.

Exercice 4

On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est un cône si pour tout $x \in A$ et pour tout $\lambda > 0$, $\lambda x \in A$.
1) Montrer qu'un cône K est convexe si et seulement si $K + K \subset K$.
2) Montrer que si $S \subset \mathbb{R}^n$ est convexe, alors $K = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda S = \mathbb{R}_+ S$ est un cône convexe.

Exercice 5

On part de $S_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, structuré en espace euclidien à l'aide du produit scalaire fondamental

$$(A, B) \mapsto \ll A, B \gg := tr(AB).$$

On désigne par $P_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathring{P}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble de $A \in S_n(\mathbb{R})$ qui sont semi définies positives (resp. définies positives).

1) Montrer que $P_n(\mathbb{R})$ est un cône convexe fermé de $S_n(\mathbb{R})$ et que l'intérieur de $P_n(\mathbb{R})$ est exactement $\mathring{P}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6

Soit $A_0, \cdots A_m$ dans $S_n(\mathbb{R})$ et

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i A_i, \quad \forall x = (x_1, \cdots x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

On pose

$$C = \{x \in \mathbb{R}^m : A(x) \text{ est semi définie positive } \}$$

Montrer que C est convexe fermé.

Exercice 7

Soient I un intervalle de R et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ convexe. Montrer que f est derivable à droite et à gauche en tout point de $\text{int}(I)$ et, pour tout $(a,b,c) \in I^3$ tel que $a < b < c$, on a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'_g(b) \leq f'_d(b) \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}.$$

En déduire que si f est convexe sur I, alors f est continue sur $\text{int}(I)$.

Exercice 8

Soient I un intervalle ouvert de R et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ convexe et derivable. Démontrer que f est de classe C^1 sur I.

Exercice 9

Soit f continue sur $[0,1]$ et g convexe sur R. Montrer que

$$g\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 g \circ f.$$

Il s'agit de l'inégalité de Jensen, utile en probabilité en particulier.

Exercice 10

Soit I un intervalle de R, x_0 un point de I; $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est décroissante. On pose :

$$\forall x \in I,\ \psi(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt$$

Montrer que ψ est une application de I dans R concave.

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\ln f$ est convexe si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe.

Exercice 12

Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a) = f(b) = 0$. On note $M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$ et

$$g(x) = f(x) - M\frac{(x-a)(b-x)}{2}, \quad h(x) = f(x) + M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

1) Justifier l'existence de M.
2) Montrer que g est convexe et que h est concave.
3) En déduire que pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$|f(x)| \leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}.$$

Exercice 13

Soit f une fonction convexe de classe C^1 sur $[a,b]$. Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t)dt \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice 14

1) Montrer que $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x \ln x$ est convexe.

En déduire que $\forall (a,b,x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$,

$$x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b} \geq (x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}.$$

2) Montrer que $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = -\ln(\ln x)$ est convexe.
En déduire que $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2$,

$$\ln\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln x \ln y}.$$

Exercice 15

1) La composée de deux fonctions convexes est-elle convexe ?

2) Examiner, parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont convexes, strictement convexe, fortement convexe de module $r > 0$?

$$f_1(x) = -\ln x, \quad f_2(x) = x^4, \quad f_3(x) = x^\beta \ (\beta \in \mathbb{N}), \quad f_4(x) = |x|^\beta \ (\beta > 1) ?$$

3) Soit $\|\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|$ et $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2$ sont convexes.

Exercice 16

1) Soient $n \geq 1$ et $f_1, \cdots, f_n$, n fonctions d'une variable définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et soit f, la fonction de n variables définie sur I^n par

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i).$$

Montrer que si chaque f_i est convexe (respectivement convexe), alors f est convexe (respectivement convexe).

2) Pour α, β, et γ des nombres strictement positifs, étudier la convexité des ensembles ci-dessous.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x^2 + \beta y^2 \leq \gamma\}$

b) $\{(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : x^\alpha y^\beta \geq \gamma\}$

Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R}^n \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe. On appelle fonction perspective de f la fonction :

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to]-\infty,+\infty] : (\lambda, x) \mapsto \begin{cases} \lambda f(\frac{x}{\lambda}) & \text{si } \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que F est convexe par les deux techniques suivantes :

a) epi$F$ est une partie convexe de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

b) $\forall X \in \mathrm{dom}F$, $\forall Y \in \mathrm{dom}F$, $\forall \alpha \in]0,1[$, $F(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha F(X) + (1-\alpha)F(Y)$.

2) Montrer la convexité de la fonction F dans les cas ci-dessous en déterminant la fonction convexe f dont F est la perspective.

a) $F : \mathbb{R}^2 \to]-\infty,+\infty] : (x_1,x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_2^2}{x_1} & \text{si } x_1 > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

b) $F : \mathbb{R}^2 \to]-\infty,+\infty] : (x_1,x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^2}{x_2} & \text{si } x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 18

Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Pour tout $u \in \mathbb{R}^m$ on pose

$$\varphi(u) = \inf \{f(x) : Ax = b + u\}$$

On suppose que pour tout $u \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(u)$ existe. Etudier la convexité de φ.

Exercice 19
Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Prouver que f est convexe.

Exercice 20
Soient $(x, y, p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$, $2n$ réels strictement positifs.

1) Montrer que si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des nombres réels positifs de somme 1, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \geq \prod_{i=1}^{n} a_i^{\lambda_i}.$$

2) Montrer que

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q.$$

3) On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1$.

4) En déduire la splendide inégalité de Hölder :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

5) On suppose en outre que $p > 1$. Déduire de l'inégalité de Höder, l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 21 Soit f une application convexe et concave. Montrer que f est affine.

Exercice 22
1) Soit $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$, où A est une matrice symétrique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, une fonctionnelle quadratique de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que f est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.

2) Etudier la stricte convexité et la forte convexité de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz$.

Exercice 23
Étudier la convexité des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i) \ln(\sum_{i=1}^{n} x_i)$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$

b) $f(x, y) = \frac{\|x\|^2}{y}$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$

c) $f(x) = \ln (\sum_{k=1}^{n} e^{x_k})$ sur $\mathbb{R}^n$

d) $g(x) = \inf_{\alpha > 0} \frac{f(\alpha x)}{\alpha}$, sur $\mathbb{R}^n$ où f est une fonction convexe.

Exercice 24

1) Etudier la convexité de la fonction qui à $y \mapsto -1/(1+e^{-y})$ sur $[0,+\infty[$. En déduire que pour $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, n$ avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ et $x_i \in]0,1]$, $i = 1, \cdots, n$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1+x_i} \leq \left(1 + \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}\right)^{-1}.$$

2) Etudier la convexité de la fonction qui à $u \mapsto \ln(1+e^u)$ sur R. En déduire que pour $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, n$ avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ et $x_i > 0$, $y_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$, on a :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} + \prod_{i=1}^{n} y_i^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^{\alpha_i}.$$

Exercice 25

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ convexe. On définit $I_\varphi : (\mathbb{R}_+^*)^n \times (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}$ par

$$p = (p_1, \cdots, p_n),\ q = (q_1, \cdots, q_n) \mapsto I_\varphi(p,q) := \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi\left(\frac{p_i}{q_i}\right).$$

1) Vérifier que I_φ est convexe. En déduire l'inégalité suivante :

$$I_\varphi(p,q) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} q_i\right) \varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n q_i}\right).$$

2) On définit $\varphi^\circ : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ par $\varphi^\circ(x) := x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.
a) φ° est-elle convexe ?
b) Comment se comparent I_φ et I_{φ° ?
3) Donner les expressions de φ° et I_φ dans les cas suivants : $\varphi(t) = t\ln t$, $\varphi(t) = (1-\sqrt{t})^2$.

Exercice 26

On considère la fonction ξ définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ par

$$\xi(t,r) = \frac{t^2}{r}$$

Montrer que ξ est convexe.

Etant donné S convexe de $\mathbb{R}^n$ et g une fonction concave strictement positive sur S, montrer que la fonction μ définie sur S par

$$\mu(x) = \begin{cases} -\ln g(x) & \text{si } g(x) \leq 1 \\ 0 & \text{si } g(x) \geq 1 \end{cases}$$

est convexe sur S.

En déduire que la fonction θ définie sur $S\times]0,+\infty[$ par

$$\theta(x,r) = \frac{1}{r}\mu^2(x)$$

est convexe

Exercice 27

Soit $\overset{\circ}{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de $A \in S_n(\mathbb{R})$ qui sont définies positives (c'est un ouvert convexe de $S_n(\mathbb{R})$). Soit

$$f : \overset{\circ}{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$
$$A \mapsto f(A) := \ln(\det A^{-1})$$

On se propose de montrer que f est strictement convexe sur $\overset{\circ}{P}_n(\mathbb{R})$. Pour cela , on prend $X_0 \in \overset{\circ}{P}_n(\mathbb{R})$, $0 \neq H \in S_n(\mathbb{R})$,

et on considère la fonction φ de la variable réelle définie par

$$\varphi(t) := \ln(\det(X_0 + tH)^{-1})$$

1) Vérifier que φ est définie sur un intervalle ouvert (de $\mathbb{R}$) contenant l'origine; on notera $I_{X_0,H}$ cet intervalle.

2) Montrer que

$$\varphi(t) - \varphi(0) = -\sum_{i=1}^{n} \ln(1 + t\lambda_i) \text{ pour tout } t \in I_{X_0,H}$$

où les λ_i désignent les valeurs propres de $X_0^{-1/2} H X_0^{-1/2}$.

3) Déduire de ce qui précède la stricte convexité de f.

4) Utiliser les résultats précédents pour montrer que

a) si A et B sont symétriques définies positives et différentes, et si $\alpha \in]0,1[$ alors :

$$\det(\alpha A + (1-\alpha)B) > (\det A)^{\alpha} (\det B)^{1-\alpha}.$$

b) $\{A \in \overset{\circ}{P}_n(\mathbb{R}) \cdot \det A \geq 1\}$ est un ensemble convexe.

Exercice 28

Soit O un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : O \to \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est logarithmiquement convexe (sur O) lorsque la fonction $\ln f : O \to \mathbb{R}$ est convexe.

1) a) Montrer que si $\varphi : O \to \mathbb{R}$ est convexe, il en est de même de la fonction e^{φ}

b) En déduire qu'une fonction logarithmiquement convexe est nécessairement convexe.

2) On suppose ici que f est deux fois différentiable sur O.

Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

i) f est logarithmiquement convexe;

ii) $f(x)\nabla^2 f(x) \succcurlyeq \nabla f(x) \nabla^T f(x)$ (i.e. la matrice $f(x)\nabla^2 f(x) - \nabla f(x)\nabla^T f(x)$ est semi définie positive) $\forall x \in O$;.

iii) la fonction $x \mapsto e^{\langle a,\, x\rangle} f(x)$ est convexe sur O $\forall a \in \mathbb{R}$.

b) En déduire que si f_1 et f_2 sont logarithmiquement convexes et deux fois différentiable sur O, il en est de il en est de même de leur somme $f_1 + f_2$

A_1, ni plus de 2000 articles de type A_2. En raison d'un système de prix dégressifs consentis aux clients, le prix de chaque article décroit légèrement avec la quantité vendue : ainsi un article de type A_1 rapporte $30(1-\frac{x_1}{5000})$ unités monétaires lorsqu'on vend x_1 et un article de type A_2 rapporte $20(1-\frac{x_2}{4000})$ lorsqu'on en vend x_2.

1) Montrer que le problème de l'atelier peut être mis sous la forme d'un programme mathématique.

2) Le point $x^* = (2600, 1200)$ vérifie-t-il les conditions de Kuhn et Tucker ? Est-il une solution optimale ?

3) Résoudre graphiquement le problème.

Exercice 30

Etant donné $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique et $b \in \mathbb{R}^n$, on considère le problème d'optimisation suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle \\ \|x\| = 1 \end{cases}$$

1) On suppose $b = 0$. Résoudre le problème (P).

2) Soit λ_1 la plus grande valeur propre de A et p un réel strictement inférieur à $-\lambda_1$. On pose

$$A_p = A + pI_n \quad \text{et } f_p : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto f_p(x) = \frac{1}{2}\langle A_p x, x\rangle + \langle b, x\rangle$$

où I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

a) Montrer que f_p est strictement concave.

b) On considère le problème d'optimisation suivant :

$$(\tilde{P}_p) \qquad \begin{cases} \min f_p(x) \\ \|x\| \leq 1 \end{cases}$$

Montrer que :

$\inf\{f_p(x) : \|x\| \leq 1\} = \inf\{f(x) : \|x\| = 1\} + \frac{1}{2}p$

et que les solutions de (P) et $(\tilde{P}_p)$ sont les mêmes.

7

Université FHB
Licence 3

Année Universitaire 2014-2015

TD d'Optimisation

Exercice 1
Les fonctions suivantes sont-elles coercives?
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x^2 + 1$
b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a, x\rangle + b$ avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$
c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x_1^2 + x_2 - 1$
d) $f : R^2 \to R$ définie par $f(x) = 2x_1^2 + x_2^3 + 2x_2^2$
e) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ où $b \in \mathbb{R}^n$, et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive.

Exercice 2
Trouver les minima et les maxima locaux de la fonction
a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{6}x_2^3$
b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 1$
c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 + 27$
d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x_1^2 + x_2^3 + 2x_2^2$
e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1000x_1 - 5000$
f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \beta x_1x_2 + x_1 + 2x_2$
g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 - x_1^2$
h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x_1^2 - 4)^2 + x_2^2$
i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x_1 - x_2)^4 + (x_1 - 1)^4 + 10$
j) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1x_2 - \ln(x_1^2 + x_2^2)$

Exercice 3
Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes sur leur domaine de définition

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}, \quad g(x,y,z) = 8x^3 + y^3 - 12xyz + 10z^3 - 6z.$$

Exercice 4
Optimiser les fonctions suivantes sur leur domaine de définition.
a) $f(x,y,z) = x^4 + 2y^2 + 3z^2 - yz - 23y + 4x - 5$
b) $g(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln(\frac{1}{x_i})$,
c) $h(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{x_i}$

Exercice 5
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$
a) Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$
b) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5$$

a) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$.
b) Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7
Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \to f(x) = (1 + x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2$$

Montrer que $0 \in \mathbb{R}^n$ est le seul point critique de f, qu'il est minimum local strict de f, mais qu'il n'est pas minimum global de f.

Exercice 8

Soit n un entier $n \geq 2$. On considère des points a_i et b_i de R pour $i = 1, \cdots, n$ avec les a_i non tous égaux et la fonction f définie su $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i x - y)^2.$$

a) Vérifier que f n'admet qu'un seul point $(\widehat{x}, \widehat{y})$ critique sur $\mathbb{R}^2$.

b) Exprimer $\widehat{y}$ en fonction de $\widehat{x}$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9

La fonction de Rosenbrock est la fonction

$$f_\lambda(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + \lambda(x_1^2 - x_2)^2$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tracer le graphe de la fonction f_λ pour $\lambda \in \{10, 100, 1000\}$.

Trouver les points stationnaires de f_λ et discuter leur nature en fonction de λ.

Exercice 10

Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$ deux fois continûment différentiable à valeurs dans R telle que

$$m\,\|h\|^2 \leq \langle \nabla^2 f(x)h, h\rangle \leq M\,\|h\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall h \in \mathbb{R}^n$$

où m, M sont des constantes strictement positives.

1) Montrer que

$$\min\{\langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2}\|y - x\|^2\} = -\frac{1}{2\alpha}\|\nabla f(x)\|^2 \quad \forall \alpha > 0$$

2) Montrer que f a un minimum global unique x^* qui vérifie

$$\frac{1}{2M}\|\nabla f(x)\|^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2m}\|\nabla f(x)\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

et

$$\frac{m}{2}\|x - x^*\|^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{M}{2}\|x - x^*\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 11

On considère le problème d'optimisation

$$(P) \quad m = \min\{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

où f est une fonction convexe, s. c. i., propre sur $\mathbb{R}^n$. On pose $S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = m\}$, l'ensemble des solutions optimales de (P). De façon générale, S peut être vide et on peut avoir $m = -\infty$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on définit $\varphi(x)$ par

$$(Q_x) \quad \varphi(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n}\left[f(y) + \frac{1}{2}\|y - x\|^2\right]$$

où $\|\cdot\|$ dénote la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On considère également le problème :

$$(Q) \quad \overline{m} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x)$$

1) - Montrer que pour tout x, le problème (Q_x) admet une solution optimale unique que l'on notera $y(x)$.

2) - Montrer que φ est une fonction convexe et que $dom\varphi = \mathbb{R}^n$.

3) - Montrer que $m = \overline{m}$ et que les ensembles de solutions optimales de (P) et (Q) coincident.

Exercice 12

On se propose de déterminer les dimensions d'un wagon rectangulaire non couvert telles que pour un volume donné V, la somme des aires des côtés et du plancher soit minimale.

Donner le modèle mathématique de ce problème, le ramener à un problème d'optimisation sans contraintes et le résoudre.

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$ et u une solution à ε près du problème de minimisation de f sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire vérifiant $f(u) \leq \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) + \varepsilon$. Etant donné $\lambda > 0$ on considère

$$g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto g(x) := f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - u\|$$

1) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n$ minimisant g sur $\mathbb{R}^n$.

Montrer que ce point v vérifie les conditions ci-après :

i) $f(v) \leq f(u)$

ii) $\|v - u\| \leq \lambda$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(v) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - v\|$

2) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable et bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x_ε tel que $\|\nabla f(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$.

Exercice 14

Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$ continûment différentiable.

On rappelle que f est fortement convexe de rapport a $(a > 0)$ si

$$\forall t \in [0,\ 1],\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{a}{2}t(1-t)\|x - y\|^2$$

1) Montrer que si f est fortement convexe de rapport a ,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \ f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x); y - x\rangle + \frac{a}{2}\|x - y\|^2$$

2) On considère le problème d'optimisation

$$\min[f(x) : x \in \mathbb{R}^n] \qquad (P)$$

On suppose que f est fortement convexe de rapport a.

Montrer que (P) admet une solution unique x^*

3) On considère l'algorithme du gradient à pas optimal appliqué à (P).

Soit $\{x^k\}$ la suite générée par cet algorithme.

a) Montrer que $\langle \nabla f(x^{k+1}); x^{k+1} - x^k\rangle = 0$

b) Montrer que $f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \frac{a}{2}\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2$

En déduire que la suite $\{f(x^k)\}$ est décroissante et qu'elle converge.

c) En déduire que $\lim_{k\to+\infty} \left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2 = 0$

4) Montrer que $\lim_{k\to+\infty} \left\|\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)\right\| = 0$

En déduire que $\lim_{k\to+\infty} \left\|\nabla f(x^k)\right\| = 0$

5) En utilisant la forte convexité de f montrer que $\left\|x^k - x^*\right\| \leq \frac{1}{a}\left\|\nabla f(x^k)\right\|$

En déduire que la suite $\{x^k\}$ converge vers x^*.

Exercice 15

Soit la fonction $f(x_1,x_2) = 2x_1^3 + 3x_1^2 + 12x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_2 + 54$. Trouvez les points stationnaires de cette fonction et déterminez leur nature. La fonction possède-t-elle un minimum global? un maximum global?

Exercice 16 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$. On considère d non nul dans $\mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla f(x), d\rangle < 0$. Montrer que d est une direction de descente pour f en x.

Exercice 17
La méthode de la plus grande pente est appliquée au problème de la minimisation de

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

au départ de $(2,1)$. Montrez que les approximations successives sont données par $x^k = \frac{1}{3^k}(2,(-1)^k)$. Montrez que $f(x^{k+1}) = \frac{1}{9}f(x^k)$

Exercice 18
Utilisez la méthode de Newton pour trouver un point minimisant

$$f(x_1,x_2) = 5x_1^4 + 6x_2^4 - 6x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 15x_1 - 7x_2 + 13.$$

Partez de $x^0 = (1,1)$.

Exercice 19
Soit b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

où Q est une matrice symétrique définie positive de $\mathbb{R}^{n\times n}$. On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

1) Montrer que $(\mathcal{P})$ admet une solution optimale unique.
L'algorithme du gradient de plus forte pente est défini par

$$x_{k+1} = x_k - \mu_k \nabla f(x_k), \quad x_k \in \mathbb{R}^n, k = 1,2,\cdots,$$

où μ_k minimise $f(x_k - \mu\nabla f(x_k))$ sur $\mathbb{R}_+$.
2) Montrer que

$$\mu_k = \frac{g_k^Tg_k}{g_k^TQg_k} \quad \text{avec } g_k = \nabla f(x_k) = Qx_k - b.$$

3) On désigne par x^* la solution optimale de $(\mathcal{P})$. Soit

$$E(x) = \frac{1}{2}(x-x^*)^TQ(x-x^*).$$

Montrer que

$$\frac{E(x_k) - E(x_{k+1})}{E(x_k)} = \frac{(g_k^Tg_k)^2}{(g_k^TQg_k)(g_k^TQ^{-1}g_k)}.$$

4) On donne l'inégalité de Kantorovich

$$\frac{(g_k^Tg_k)^2}{(g_k^TQg_k)(g_k^TQ^{-1}g_k)} \geq \frac{4aA}{(a+A)^2},$$

où a et A sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de Q. Déduire de la question 3) que

$$E(x_{k+1}) \leq \left[\frac{A-a}{A+a}\right]^2 E(x_k).$$

En déduire la convergence de l'algorithme.

5) Comment évolue la vitesse de convergence de l'algorithme lorsque $\frac{A}{a}$ est grand ?

Exercice 20

On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et $\|\cdot\|$ désigne la norme associée c'est-à-dire la norme euclidienne. Etant donné $a \neq 0$ fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \langle a, x\rangle e^{-\|x\|^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

1) a) Démontrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer le gradient $\nabla f(x)$ de f en tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Déterminer les points critiques de f.

2) a) Démontrer que f est deux fois différentiable en tout $x \in \mathbb{R}^n$ et calculer $\nabla^2 f(x)$.

b) Déterminer la nature des points critiques de f trouvés à la première question (maximum local, minimum local).

Exercice 21

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ définis par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ et le problème $(\mathcal{P})$ $\inf_{x\in C} f(x)$ avec : $C = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}$.

i) le problème $(\mathcal{P})$ admet-il une solution optimale ? Est-elle unique ?

ii) Ecrire les conditions d'optimalité que doit vérifier la solution de $(\mathcal{P})$. Résoudre.

Exercice 22

Maximiser la fonction $f(x) = 14x_1 - x_1^2 + 6x_2 - x_2^2 + 7$ sous les contraintes $x_1 + x_2 \leq 2$, $x_1 + 2x_2 \leq 3$. On précisera l'existence et l'unicité de la solution optimale.

Exercice 23

Résoudre

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle \\ x_1 \geq 1 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

avec

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Comparer avec la solution sans contraintes.

Exercice 24

Soit K une partie convexe non vide et fermée de $\mathbb{R}^n$.

Montrer pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique point $p(x) \in K$ tel que :

$$\|p(x) - x\|_2 = \inf_{y\in K} \|y - x\|_2$$

Justifier que $p(x)$ est l'unique point de K tel que :

$$\langle y - p(x), y - x\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K.$$

Exercice 25

Soit A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$.

1) Interpreter $(\mathcal{P})$ comme un problème de projection. En déduire que $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^n$. Discuter son unicité en fonction du rang de A.

2) Montrer que u est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si

$$A^T Au = A^T b.$$

3) On pose $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|^2.$$

a) Montrer qu'il existe un unique $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)$.

b) Ecrire l'équation d'Euler satisfaite par u_ε.

c) Montrer que $\|u_\varepsilon\| \leq \|u\|$ pour tout u solution de $(\mathcal{P})$. En déduire que u_ε converge, lorsque $\varepsilon \to 0^+$, vers la solution de $(\mathcal{P})$ de norme minimale.

Exercice 26

Considérons le programme mathématique (PM) :

$$(PM) \quad \begin{cases} \min f(x) = 9x_1^2 + 4x_2^2 - 18x_1 - 16x_2 + 25 \\ -3x_1 - x_2 \leq -6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Résoudre le programme (PM) en s'aidant uniquement des conditions de Kuhn et Tucker.

2) Vérifier graphiquement la solution.

Exercice 27

On considère le problème (P).

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 - \frac{9}{2}x_1 - 4x_2 + \frac{145}{16}$$
$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1) Ce problème est-il convexe ?

2) Déterminer tous les points vérifiant les conditions de Kuhn-Tucker. En déduire une solution optimale de (P).

3) Résoudre graphiquement (P).

Exercice 28

Résoudre les programmes mathématiques suivants

$$\max f(x) = -x_1^2 + 2x_1 + x_2 \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max f(x) = -x_1^2 - y^2 + 14x_1 + 6x_2 + 7 \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$

Exercice 29

Un atelier peut fabriquer des articles de deux types, A_1 et A_2, sur une machine donnée, disponible 100 heures par mois compte tenu des heures de réglages et d'entretien. Les articles de type A_1 sont fabriqués à la cadence de 50 articles par heure, et les articles de type A_2 à la cadence de 25 articles par heure. La capacité d'absorption du marché étant limitée, on ne peut écouler par mois plus de 3000 articles de type

Uniset Année 2013-2014

Examen d'Optimisation (Licence 3)
1ère Session
Durée 2H 30
Documents non autorisés

Exercice 1 (6 points)

1) Trouver les minima et les maxima locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 + 27.$$

2) Soit la fonction $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + 3x_1^2 + 12x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_2 + 54$. Trouver les points stationnaires de cette fonction et déterminer leur nature. La fonction possède-t-elle un minimum global ? un maximum global ?

Exercice 2 (7 points)

Soit f une fonction quelconque de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}} \doteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On définit la fonction f^* de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ de la manière suivante :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \qquad f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} [\langle x, y\rangle - f(x)]$$

où $\langle x, y\rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. On note $dom(f)$ l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

1) Montrer que : $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $f^*(y) = \sup\limits_{x \in dom(f)} [\langle x, y\rangle - f(x)]$.

2) Montrer que f^* est convexe.

3) Montrer que :

a) $f^*(0) = -\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$.

b) $\forall \lambda > 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $(\lambda f)^*(y) = \lambda f^*(\frac{y}{\lambda})$

4) Calculer explicitement f^* avec $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 (7 points)

Soit A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

où $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$.

1) Interpreter $(\mathcal{P})$ comme un problème de projection. En déduire que $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^n$. Discuter son unicité en fonction du rang de A.

2) Montrer que u est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si

$$A^T Au = A^T b.$$

3) On pose $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|^2.$$

a) Montrer qu'il existe un unique $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)$.

b) Ecrire l'équation d'Euler satisfaite par u_ε.

c) Montrer que $\|u_\varepsilon\| \leq \|u\|$ pour tout u solution de $(\mathcal{P})$.

UNISAT

Année Universitaire 2013-2014

Examen d'Optimisation
Deuxième session
Durée 1H 30
Documents non autorisés

Exercice 1 (6 points)

Déterminer les points critiques des fonctions réelles suivantes et préciser leur nature.

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, \quad g(x,y,z) = x^2y^2 + (x^2 - y^2)z - 4z.$$

Exercice 2 (6 points)

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 - xy + y^2.$$

1) Montrer que f est coercive. En déduire l'existence d'un minimum global.
2) Calculer le gradient de f en tout point. Déterminer les points critiques.
3) En déduire le minimum global de f.

Exercice 3 (8 points)

1) Déterminer le maximum et le minimum de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ dont les variables sont astreintes à la condition $x^2 + y^2 = 1$. On montrera d'abord que le problème admet une solution optimale dans les deux cas.

2) On considère le problème qui consiste à décomposer le chiffre 8 en deux parties positives de sorte que le produit de leur produit par leur différence soit maximal.

a) Donner le modèle mathématique $(\mathcal{P})$ de ce problème.
b) Résoudre $(\mathcal{P})$.

UNISAT Année Universitaire 2013-2014

Examen d'Analyse Convexe
Durée 3H
Documents non autorisés

Exercice 1 (7 points)

1) Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\operatorname{conv}(A \times B) = \operatorname{conv}A \times \operatorname{conv}B.$$

2) Soit $P = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ où les C_i sont des convexes de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\operatorname{conv}(P) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0,\ x_i \in C_i, \forall i = 1 \cdots, k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

3) Soit C un sous ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $a \in C$. Montrer que

$$K = \{d \in \mathbb{R}^n : a + \lambda d \in C,\ \forall \lambda \geq 0\}$$

est un cône convexe.

4) Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0\}$. Déterminer $T(C, a)$ pour $a \in C$.

Exercice 2 (6 points)

Soit C un sous ensemble non vide et fermé de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad d_C(x) = d(x, C) = \inf_{y \in C} \|y - x\|$$

Montrer que d_C est convexe si et seulement si C est convexe.

Exercice 3 (7 points)

On considère la fonction définie par

$$f(x, t) = -\ln(t^2 - \|x\|^2)$$

définie sur

$$E = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|^2 < t^2\}.$$

1) Calculer la matrice hessienne de f et en déduire que f est convexe.
2) a) Expliquer pourquoi la fonction $g(x, t) = t - \frac{1}{t}\|x\|^2$ est concave sur E.
b) De ce qui précède montrer que la fonction $-\ln(t - \frac{1}{t}\|x\|^2)$ est convexe sur E.
c) En déduire que f est convexe sur E.

UNISAT — Année Universitaire 2013-2014

Examen d'Analyse Convexe
Deuxième session
Durée 1H 30
Documents non autorisés

Exercice 2 (10 points)

1) Montrer que la fonction support σ_A de A (un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$) est convexe et positivement homogène et qu'elle est linéaire et continue si et seulement si A est réduit à un singleton.

2) Montrer que si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\sigma_{A+B} = \sigma_A + \sigma_B.$$

3) Montrer que

$$\sigma_A = \sigma_{\operatorname{conv} A}.$$

4) Montrer que si A, B et C sont des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ alors

$$A + B = A + C \Rightarrow \operatorname{conv} B = \operatorname{conv} C$$

Exercice 2 (10 points)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe. On appelle fonction perspective de f la fonction :

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to]-\infty, +\infty] : (\lambda, x) \mapsto \begin{cases} \lambda f(\frac{x}{\lambda}) & \text{si } \lambda > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que F est convexe par les deux techniques suivantes :

a) $\operatorname{epi} F$ est une partie convexe de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

b) $\forall X \in \operatorname{dom} F \ \forall Y \in \operatorname{dom} F \ \forall \alpha \in]0,1[$, $F(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha F(X) + (1-\alpha)F(Y)$.

2) Montrer la convexité des fonctions suivantes en utilisant la question 1).

a) $F : \mathbb{R}^2 \to]-\infty, +\infty] : (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_2^2}{x_1} & \text{si } x_1 > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

b) $F : \mathbb{R}^2 \to]-\infty, +\infty] : (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^2}{x_2} & \text{si } x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

c) $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to]-\infty, +\infty] : (\lambda, x) \mapsto \begin{cases} \lambda & \text{si } \lambda > 0 \text{ et } x \in \lambda C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

où C est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.

UNISAT
Licence 3

Année Universitaire 2013-2014

Devoir d'Optimisation
Durée 2h
Documents non autorisés

Exercice 1 (7 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5.$$

1) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$.
2) Montrer que l'expression $f(x, y, z)$ peut s'écrire sous forme d'une somme de carrés.
En déduire les extrema de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (7 points)
Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$ continûment différentiable.
1) On considère le problème d'optimisation

$$\min[f(x) : x \in \mathbb{R}^n] \qquad (P)$$

On suppose que f est fortement convexe de rapport a, $(a > 0)$.
Montrer que (P) admet une solution unique x^*
2) On considère l'algorithme du gradient à pas optimal appliqué à (P).
Soit $\{x^k\}$ la suite générée par cet algorithme.
a) Montrer que $\langle \nabla f(x^{k+1}); x^{k+1} - x^k \rangle = 0$
b) Montrer que $f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \frac{a}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2$
En déduire que la suite $\{f(x^k)\}$ est décroissante et qu'elle converge.
c) En déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|x^{k+1} - x^k\|^2 = 0$
3) Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)\| = 0$
En déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|\nabla f(x^k)\| = 0$
4) En utilisant la forte convexité de f montrer que $\|x^k - x^*\| \leq \frac{1}{a} \|\nabla f(x^k)\|$
En déduire que la suite $\{x^k\}$ converge vers x^*.

Exercice 3 (6 points)
La méthode de la plus grande pente (c'est-à-dire du gradient à pas optimal) est appliquée au problème de la minimisation de

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

au départ de $(2, 1)$. Montrez que les approximations successives sont données par $x^k = \frac{1}{3^k}(2, (-1)^k)$.
Montrez que $f(x^{k+1}) = \frac{1}{9} f(x^k)$

UFR-MI
LICENCE L3

Année universitaire 2014-2015

ANALYSE CONVEXE ET OPTIMISATION

Devoir du 28 octobre 2015
Durée: 3 heures

Aucun documents autorisés.
Justifier et présenter clairement vos réponses.

Exercice 1 (4pts)

1) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to]-\infty, +\infty]$ est convexe si et seulement si *Epigraphe* (f) est convexe.
2) Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to]-\infty, +\infty]$ est dite positivement homogène de dégré $\alpha > 0$, lorsque $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall t > 0$, $f(tx) = t^\alpha f(x)$. f est dite positivement homogène si $\alpha = 1$.
Montrer qu'une fonction positivement homogène est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

Exercice 2 (6pts)

Soit O un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : O \mapsto \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est logarithmiquement convexe sur O lorsque la fonction $\ln f : O \mapsto \mathbb{R}$ est convexe.
1) *a)* Montrer que si $\varphi : O \mapsto \mathbb{R}$ est convexe, il en est de même de la fonction e^φ.
b) En déduire qu'une fonction logarithmiquement convexe est nécessairement convexe.
2) On suppose ici que f est deux fois différentiable sur O.
Montrer l'équivalence des assertions suivantes:
i) f est logarithmiquement convexe;
ii) $f(x)\, \nabla^2 f(x) \succeq \nabla f(x)\, \nabla^T f(x)$ (i.e la matrice $f(x)\, \nabla^2 f(x) - \nabla f(x)\, \nabla^T f(x)$ est semi définie positive.)
iii) la fonction $x \mapsto e^{<a,x>} f(x)$ est convexe sur O $\forall a \in \mathbb{R}$.
3) En déduire que si f_1 et f_2 sont logarithmiquement convexes et deux fois différentiables sur O, il en est de même de leur somme $f_1 + f_2$.

1

Exercice 3 (4pts)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 - 2x_1 x_2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$

1) Etudier la différentiabilité et la différentiabilité d'ordre deux de f et écrire sa matrice hessienne. La fonction f est-elle convexe? concave?

Exercice 4 (6pts)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel $\langle , \rangle$, on considère le problème de minimisation suivant:

$$(\mathcal{P}_{[}) \quad \inf_{x \in C} \left\{ \frac{1}{2}\langle A x, x\rangle - \langle b, x\rangle \right\}$$

òu $C = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 / \quad x_2 + x_3 = 0 \right\}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer l'existence et l'unicité de la solution de $(\mathcal{P}_{[})$.
2. Justifier que la condition de KKT est une condition nécessaire et suffisante.
3. Résoudre.

UFHB
Licence 3

Année Universitaire 2014-2015

Examen d'Analyse Convexe et Optimisation
Durée 3H
Documents non autorisés

Exercice 1 (5 points)
Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ convexe. On définit $I_\varphi : (\mathbb{R}_*^+)^n \times (\mathbb{R}_*^+)^n \to \mathbb{R}$ par

$$p = (p_1, \cdots, p_n),\ q = (q_1, \cdots, q_n) \mapsto I_\varphi(p,q) := \sum_{i=1}^n q_i \varphi\left(\frac{p_i}{q_i}\right).$$

1) Vérifier que I_φ est convexe. En déduire l'inégalité suivante :

$$I_\varphi(p,q) \geq \left(\sum_{i=1}^n q_i\right) \varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n q_i}\right).$$

2) On définit $\varphi^\circ : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ par $\varphi^\circ(x) := x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.
a) φ° est-elle convexe ?
b) Comment se comparent I_φ et I_{φ° ?
3) Donner les expressions de φ° et I_φ dans les cas suivants : $\varphi(t) = t\ln t$, $\varphi(t) = (1-\sqrt{t})^2$.

Exercice 2 (8 points)
On considère la fonction f_p définie sur $\mathbb{R}^3$ (p étant un paramètre réel).

$$f_p(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - p(x^2+y^2+z^2-1).$$

1) Montrer que la fonction f_p est coercive. En déduire que la proposition suivante est vraie :

$$\exists (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3 : \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f_p(x_0,y_0,z_0) \leq f_p(x,y,z).$$

2) On s'intéresse aux points critiques de f_p.
Montrer qu'il existe une valeur p_0 telle que
a) Pour $p \leq p_0$, f_p admet un seul point critique
b) Pour $p > p_0$, f_p admet 27 points critiques. On précisera la valeur de p_0 ainsi que celles des 27 points critiques.
3) Trouver les minima globaux de f_p lorsque $p \leq p_0$.
4) On suppose maintenant $p > p_0$.
Calculer la matrice hessienne de f_p et étudier la nature des points critiques. En déduire que la fonction f_p admet 8 minima globaux que l'on précisera.

Exercice 3 (7 points)
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + x.$$

1) La fonction f est-elle coercive sur $\mathbb{R}^3$?
2) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$. La fonction f admet-elle des extrema locaux ?
3) Soit $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}(x+y)\}$. C est-il fermé ? Borné ?
4) Déterminer les points critiques de la restriction de f à C de deux manières : en utilisant d'une part les multiplicateurs de Lagrange, et d'autre part en remplaçant z par sa valeur dans l'expression de f.
5) Calculer les points où f est minimale sur C.

UFHB
Licence 3

Année Universitaire 2014-2015

Examen d'Analyse Convexe et Optimisation (Session 2)
Durée 3H
Documents non autorisés

Exercice 1 (7 points)

1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Pour tout $a \in I$ on note $\tau_a : I - \{a\} \to \mathbb{R}$ définie par $\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ appelée taux d'accroissement en a. Montrer que f convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, τ_a est une application croissante sur $I - \{a\}$.

2) Soit $f(x,y) = \frac{\|x\|^2}{y}$ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$. Calculer le gradient et la matrice hessienne de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$. Vérifier si f est convexe sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ en étudiant le signe de $\langle \nabla^2 f(x,y) \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} \rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (6 points)

On se place dans $\mathbb{R}^2$, et on note $x = (x_1, x_2)$. On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Bx, x\rangle + \langle b, x\rangle = \frac{1}{2}(x_1^2 + \alpha x_2^2) + x_1$$

où B est une matrice symétrique carrée d'ordre 2, b un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Déterminer B et b.

2) Donner une condition nécessaire pour que x réalise un minimum (local) sans contraintes de f.

a) Si $\alpha = 0$, montrer que f possède un point de minimum et qu'il y a une infinité de x réalisant ce minimum.

b) Si $\alpha \neq 0$, quel est l'élément x^* pouvant éventuellement réaliser le minimum ?

i) Si $\alpha > 0$, x^* réalise t-il le minimum de f ? Pourquoi ?

ii) Si $\alpha < 0$, montrer que f ne possède pas de minimum.

Exercice 3 (7 points)

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la fonction

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i$$

définie sur $\mathbb{R}_{++}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, \forall i = 1, \cdots, n\}$ et le problème

$$\min f(x)$$
$$x \in \mathbb{R}_{++}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

1) La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}_{++}^n$? Est-elle strictement convexe ?

2) Le problème est-il convexe ?

3) Soit λ un réel quelconque fixé. On définit sur $\mathbb{R}_{++}^n$ la fonction

$$L_\lambda(x) = f(x) + \lambda(\sum_{i=1}^n x_i - 1).$$

a) Montrer que L_λ admet un et un seul minimum sur $\mathbb{R}_{++}^n$ atteint en un point $x(\lambda)$ qu'on exprimera en fonction de λ.

b) Montrer qu'il existe une et une seule valeur λ_0 telle que $\sum_{i=1}^n x_i(\lambda_0) = 1$ (on donnera la valeur de λ_0 en fonction de n).

c) En déduire que le problème admet une solution. Donner cette solution explicitement. Est-elle unique ?

UFHB

Licence 3

Année Universitaire 2014-2015

Examen d'Analyse Convexe et Optimisation
Durée 2H 30mn
Documents non autorisés

Exercice 1 (7 points)

1) Montrer qu'une réunion de parties $(C_i)_{i\in I}$ convexes de $\mathbb{R}^n$ n'est pas toujours convexe.
Par contre si les C_i vérifient la propriété suivante :

$$\forall i, j \in I, \exists k \in I : C_i \cup C_j \subset C_k,$$

alors la réunion $\cup_{i\in I} C_i$ est encore convexe. En particulier, une réunion croissante de convexes est convexe.

2) Soient C et D deux convexes de $\mathbb{R}^n$. Montrer que;

$$K = \cup_{\lambda\in[0,1]}[(1-\lambda)C + \lambda D]$$

est convexe.

Exercice 2 (7 points)

1) Trouver la matrice symétrique S telle que $f(x) = x^T Sx$, pour $f_1(x) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3)$, puis pour $f_2(x) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3)$. Etudier la convexité des fonctions f_1 et f_2.

2) Calculer les matrices hessiennes de g_1 et g_2 définies par $g_1(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + x^2y + y^2$ et $g_2(x,y) = x^3 + xy - x$ et étudier la convexité de ces deux fonctions.

3) Etudier la convexité de la fonction $f(x,y) = \frac{1}{y}\|x\|^2$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + x.$$

1) La fonction f est-elle coercive sur $\mathbb{R}^3$?

2) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$. La fonction f admet-elle des extrema locaux ?

Université F. H. B
UFR-MI: Licence 3

Année universitaire 2015-2016

ANALYSE CONVEXE ET OPTIMISATION
Examen de la deuxième session

Exercice 1

Soit S un ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction d'appui de l'ensemble S par $\sigma_S(d) := \sup\limits_{s\in S} \langle s, d\rangle$.

1) Montrer que si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}^n$, ona

$$\sigma_{A+B} = \sigma_A + \sigma_B.$$

2) Soit S une partie non vide $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\sigma_S = \sigma_{\overline{Conv S}}.$$

3) Montrer que si A, B et C sont des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ tel que $A + B = A + C$ alors

$$Conv\, B = Conv\, C$$

Exercice 2

On considère la fonction ζ définie sur $\mathbb{R}\times]0, +\infty[$ par

$$\zeta(t, r) = \frac{t^2}{r}$$

Montrer que ζ est convexe.
Etant donné S convexe de $\mathbb{R}^n$ et g une fonction concave strictement positive sur S, montrer en utilisant la définition que la fonction μ définie par sur S par

$$\mu(x) = \begin{cases} -ln\, g(x) & \text{si } g(x) \leq 1 \\ 0 & \text{si } g(x) \geq 1 \end{cases}$$

est convexe sur sur S. En déduire que la fonction définie sur $S\times]0, +\infty[$ par

$$\theta(x, r) = \frac{1}{r}\mu^2(x)$$

est convexe.

1

Exercice 3

Soit C l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = -x - 2y - 2xy + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$.

1) Justifier que f est de classe C^2.

$1 - a)$ Calculer son gradient $\nabla f(x, y)$.

$1 - b)$ Calculer sa matrice hertienne $\nabla^2 f(x, y)$.

2) La fonction f est-elle convexe ou concave.

3) On considère le problème de minimisation de f sur C.

$3 - 1)$ Justifier que ce problème admet des solutions.

$3 - 2)$ Montrer que tout minimum local se trouve sur la frontière $Fr\,C$ de C.

2

1) Soit A et B 2 parties non vides de $\mathbb{R}^n$. Montrons que
$conv(A+B) = conv(A) + conv(B)$

- $conv(A+B) \subset conv(A) + conv(B)$

on a : $A+B = \{x+y \mid x \in A \text{ et } y \in B\} \subset \{x+y \mid x \in conv(A), y \in conv(B)\}$

car $A \subset conv(A)$ et $B \subset conv(B)$

d'où $A+B \subset conv(A) + conv(B)$

$conv(A) + conv(B)$ est convexe car combinaison lineaire de convexe. (somme de 2 convexes) Alors $conv(conv(A) + conv(B)) = conv(A) + conv(B)$

donc $conv(A+B) \subset conv(conv(A) + conv(B))$

$conv(A+B) \subset conv(A) + conv(B)$

Montrons $conv(A) + conv(B) \subset conv(A+B)$

Soient u et v ($u \in conv(A)$ et $v \in conv(B)$)

alors $\exists \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R} \mid u = \sum \lambda_i a_i$ et $v = \sum \mu_j b_j$

on a : $u + v = \sum \lambda_i a_i + \sum \mu_j b_j = \sum \lambda_i \mu_j (a_i + b_j)$

$= \sum \lambda_i (\sum \mu_j) a_i + \sum \mu_j (\sum \lambda_i) b_j$ puisque

$\sum \mu_j = 1$ et $\sum \lambda_i = 1$

$\sum \mu_j = 1$ et $\sum \lambda_i \mu_j = 1 = (\sum \lambda_i)(\sum \mu_j)$

$a_i + b_j \in A+B$ et $\sum \lambda_i \mu_j = 1$

Donc $conv(A) + conv(B) \subset conv(A+B)$

① TD Analyse convexe et optimisation   Prof ELOUHAFUN

TD Analyse convexe   25-11-2016

Exercice 2

1) Soit A, B deux parties non vide de $\mathbb{R}^n$.

Montrons que $conv(A \times B) = conv A \times conv B$.

$\left.\begin{array}{l} A \subset conv(A) \\ B \subset conv(B) \end{array}\right\}$ Donc $A \times B \subset conv(A) \times conv(B)$

or $conv(A) \times conv(B)$ est convexe.

Par suite $conv(A \times B) \subset conv(A) \times conv(B)$

Soit $U \in conv(A)$ et $V \in conv(B)$

Alors on a : $U = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x^i$, $k \in \mathbb{N}^*$, $x^i \in A$ et $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$ $i = \overline{1,k}$

$V = \sum_{j=1}^{n} \beta_j y^j$, $n \in \mathbb{N}^*$, $y^j \in B$ et $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1$, $\beta_j \geq 0$ $\forall j = \overline{1,n}$

$$U = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j x^i \quad \text{et} \quad V = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \beta_j \alpha_i y^j$$

$$(U, V) = \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j x^i , \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_j y^j \right)$$

$$= \sum \sum \alpha_i \beta_j (x^i, y^j), \quad (x^i, y^j) \in A \times B$$

Posons $\sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j = 1$. Donc $(U, V) \in conv(A \times B)$

$= (\sum \alpha_i)(\sum \beta_j) = 1 \times 1$

Par suite $conv(A) \times conv(B) \subset conv(A \times B)$

2) $P = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ où C_i sont convexes de $\mathbb{R}^n$

Montrons que $conv(P) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0, x_i \in C_i, \forall i = \overline{1,k}, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$

Supposons $k = 2$

$conv(P) = conv\left(\bigcup_{i=1}^{2} C_i\right) = conv(C_1 \cup C_2)$,

$A_0 = \{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,\ x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \}$

. A t-m $conv(P) = A_2$? (2)

A_2 est un convexe contenant C_1 et C_2.

Donc $conv(P) \subset A_2$.

vérifions que $A_2 \subset conv(P)$

soit $x \in A_2 \Rightarrow x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ et $(x_1, x_2) \in C_1 \times C_2$

Ainsi $x \in conv(C_1 \cup C_2)$ Donc $A_2 \subset conv(P)$.

Supposons la propriété vraie à l'ordre $k-1$, $k \geq 2$

c'est-à-dire $conv(P) = A_{k-1}$

Montrons que $conv(P) = A_k$

Soit $x \in A_k \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \lambda_k x_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i$

Posons $\alpha := \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i$ $(\alpha \neq 0)$ on a : $x = \lambda_k x_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\alpha} \alpha x_i$

$= (1-\alpha) x_k + \alpha \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_i$

$\beta_i = \frac{\lambda_i}{\alpha}$; $\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i = 1$

Posons $y = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_i \in A_k$. Par suite

$x = (1-\alpha) x_k + \alpha y \in conv(P)$. Donc $x \in conv(P)$

Donc $A_k \subset conv(P)$

A_k est un convexe contenant $C_1, C_2, \dots, C_k$.

donc contient $conv\left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right)$ $\left(A_k \supset conv\left(\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right)\right)$

$\alpha = 0$ Alors, on a :

$x = x_k \in C_k$ car $\lambda_k = 1$. Par suite

$A_k \subset conv(P)$

conclusion : $conv(P) = A_k$, $\forall k \geq 2$.

Exercice 3 ③

$C = \text{conv}(S)$ $\qquad \alpha\,[0,1$

x extrémal $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$, $(x_1, x_2) \in C$,

$\Rightarrow x = x_1 = x_2$

Supposons x point extrémal de C

si $x \notin S$ alors $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $x_i \in$

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n$$

si $\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \neq 0$, $x = \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha_*} x_i \right) + (1-\alpha) x_n$

$$= \alpha y + (1-\alpha) x_n$$

$y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i \in \text{conv}(S) = C$ avec $y \neq x_n$

contradiction

si $\alpha = 0$ alors $x = x_n \in S$ (inclut)

Exercice 6

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i A_i$$

Posons $\varphi(x) = A_0(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i A_i(x)$ fonction affine.

$C = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid A(x)$ est semi-définie positive$\}$

$\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un convexe fermé (ensemble des matrices semi-définie positives)

on a : $C = \varphi^{-1}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}))$ convexe.

(4)

Exercice 12

1) $f \in C^2$, f'' est continue et atteint ses bornes sur tout compact d'où l'existence de $M = \sup_{x \in [a,b]} |f''|$

2) $g(x) = f(x) - \dfrac{M(x-a)(b-x)}{2}$

$h(x) = f(x) + \dfrac{M(x-a)(b-x)}{2}$

$g, h \in \mathcal{C}^2$

$g'(x) = f'(x) - \dfrac{M}{2}(b-x+(a-x))$

$= f'(x) - \dfrac{M}{2}(b+a-2x)$

$g''(x) = f''(x) + M = f''(x) + \sup_{a \leq x \leq b} \|f''\| \geq 0$

Donc g est convexe.

$h'(x) = f'(x) + \dfrac{M}{2}(b-x-x+a)$

$h''(x) = f''(x) - M \leq 0$

Donc h est concave.

3) Montrons que $|f(x)| \leq \dfrac{M(x-a)(b-x)}{2}$

g convexe donc $\mathcal{C}_g$ est en dessous de la corde qui relie le point $(a, g(a))$ et $(b, g(b))$

Donc $g(x) \leq \dfrac{(g(b)-g(a))(x-a)}{b-a} + g(a)$

on a : $g(a) = g(b) = 0$

on $f(x) - \dfrac{M(x-a)(b-x)}{2} \leq 0$

$f(x) \leq \dfrac{M(x-a)(b-x)}{2}$

on a : (5) h convexe . Donc $\mathcal{C}_h$ est au dessous de la corde qui relie les points $(a, h(a))$ et $(b, h(b))$

Donc $h(x) \geq \dfrac{h(b)-h(a)}{b-a}(x-a)+h(a)$

on a : $h(b)=h(a)=0$

Donc $\dfrac{f(x)+M(x-a)(b-x)}{2} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq -\dfrac{M(x-a)(b-x)}{2}$ (**)

De (*) et (**) on conclut que $|f(x)| \leq \dfrac{M(x-a)(b-x)}{2}$

EXERCICE 13

+ f est convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$

Donc $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la corde qui relie les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$

$$f(x) \leq \frac{(f(b)-f(a))(x-a)}{b-a}+f(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right]dx.$$

$$\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,dx + f(a)\int_a^b dx$$

$$\leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_a^b + f(a)(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\frac{b^2}{2}-ab-\frac{a^2}{2}+a^2\right]+f(a)(b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\,\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)^2+f(a)(b-a)$$

$$\leq (b-a)\left(\frac{f(b)-f(a)}{2}+f(a)\right)$$

(*) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\,\frac{f(b)+f(a)}{2}$

+ $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente au point $\frac{a+b}{2}$

$$f(x) \geq f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

⑥ $\int_a^b f(x)\,dx \geq f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx + f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

on a : $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$

Donc (**) $\int_a^b f(x)\,dx \geq (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

De (*) et (**) on conclut que

$$(b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\,\frac{f(b)+f(a)}{2}$$

Exercice 14

$f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x\ln x$

1) f est 2 fois derivable sur $]0,+\infty[$

f est convexe ssi $f''(x) > 0$

$f'(x) = \ln x + 1$

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ donc f est convexe et même strictement convexe.

deduisons que : $\forall (a,b,x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$,

$$x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b} \geq (x+y)\ln\frac{x+y}{a+b}$$

$$\begin{aligned}
x\ln\frac{x}{a} + y\ln\frac{y}{b} &= a\left(\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}\right) + b\left(\frac{y}{b}\ln\frac{y}{b}\right) \\
&= a f\left(\frac{x}{a}\right) + b f\left(\frac{y}{b}\right) \\
&= (a+b)\left(\frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} f\left(\frac{y}{b}\right)\right) \\
&\geq (a+b)\left[f\left(\frac{x}{a}\times\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b}\right)\right] \\
&\geq (a+b)\left[f\left(\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a+b}\right)\right] \\
&\geq (a+b)\, f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \\
&\geq (a+b)\frac{x+y}{a+b}\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \\
&\geq (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)
\end{aligned}$$

7

2) f est 2 fois differentiables
f est convexe ssi $f'' \geq 0$

$f'(x) = \frac{1}{\ln x} x' \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x \ln x}$

$f''(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln x^2} > 0 \quad \forall x \in]1, +\infty[$

Donc f est convexe.

Deduisons que $\forall (x,y) \in]1,+\infty[^2$

on a: $\ln \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln x \ln y}$

$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$

$\leq -\frac{1}{2}\left(\ln(\ln x) + \ln(\ln y)\right)$

$-\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2} \ln\left(\left(\ln x \ln y\right)\right)$

$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geq \ln\left(\left(\ln x \ln y\right)^{1/2}\right)$

$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$

exercice 15

1) La composé de 2 fonctions est-elle convexe.

contre-exemple: $f(x) = -x$, $g(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = -x^2$ n'est pas convexe.

2) $f_1(x) = -\ln x$

$f_1''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ donc f_1 est convexe et strictement convexe.

on a: $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists M \in \mathbb{R}^*_+ \mid \forall x > M$

on a: $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$

Donc on ne peut pas trouver un $r > 0$ tel que $\frac{1}{x^2} > r$

donc f_1 n'est pas fortement convexe. (8)

$f_2(x) = x^4$

$f_2''(x) = 12x^2 > 0$ donc f_1 est convexe et strictement convexe sur $\mathbb{R}^*$

TD d'optimisation

Exercice 2

Trouvons les minima et les maxima locaux de la fonct

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definie par $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{6}x_2^3$

f est une fonction polynôme sur $\mathbb{R}^2$ donc f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. (x_1,x_2) est un point critique soi $\nabla f(x_1,x_2$

on a : $\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 \end{pmatrix} = 0$

$$\nabla f(x_1,x_2) = 0 \iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ -x_1 + \frac{1}{2}(2x_1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ -x_1 + 2x_1^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_1(2x_1 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Les points critiques sont $A(0,0)$ et $B(\frac{1}{2},1)$

* Etude de la nature des points A et B.

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & x_2 \end{pmatrix}$$

Au point A.

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\nabla^2 f(0,0) - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 1$$

$$|\nabla^2 f(0,0) - \lambda I_2| = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

$\frac{\Delta}{4} = \Delta' = 2$, $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}$

$\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$. Donc $\nabla^2 f(0,0)$ n'est ni définie positive ni définie négative.

Par conséquent A n'est ni un minimum ni un maximum.

Au point B.

$$\nabla^2 f(\tfrac{1}{2},1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\nabla^2 f(\tfrac{1}{2},1) - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & +1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$\Delta' = 9 - 4 = 5$

$\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 0$

Donc $\nabla^2 f(\tfrac{1}{2},1)$ est définie positive. D'où B est un minimum local.

j) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x_1,x_2) \longmapsto x_1x_2 - \ln(x_1^2 + x_2^2)$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

$(x_1,x_2) \mapsto \ln(x_1^2+x_2^2)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Donc $(x_1,x_2) \longmapsto \ln(x_1^2+x_2^2)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Par suite f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car $(x_1,x_2) \mapsto x_1x_2$ est aussi de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(x_1,x_2) est un point critique ssi $\nabla f(x_1,x_2)=0$

on a : $\nabla f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_2 - \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ x_1 - \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2} \end{pmatrix}$

$$\nabla f(x_1,x_2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - \frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2} = 0 \\ x_1 - \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 - \frac{2x_1^2}{x_1^2+x_2^2} \\ x_2x_1 - \frac{2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 = 1 \\ 1 - \frac{2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$(*) \Rightarrow x_1^2+x_2^2 = 2x_2^2$

$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$

- si $x_1 = x_2$ alors $x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \text{ ou} \\ x_1 = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 = \pm 1$, $x_2 = \pm 1$

- si $x_1 = -x_2$ alors $+x_1x_2 = -x_1^2 = 1$ impossible

D'où les points critiques sont $A(-1,-1)$, $B(1,1)$

la matrice hessienne de f

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{-2x_1^2+2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & 1+\frac{4x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \\ 1+\frac{4x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \frac{-2x_2^2+2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)} \end{pmatrix}$$

la nature du point critique $A(-1,-1)$

$$\nabla^2 f(-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\nabla^2 f(-1,-1) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

$$Sp(\nabla^2 f(-1,-1)) = \{2,-2\}$$

le point A n'est ni maximum, ni un minimum.

De même, le point $B(1,1)$ n'est pas ni un minimum, ni un maximum local. Car $\nabla^2 f(1,1) = \nabla^2 f(-1,-1)$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5$$

a) Points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$.

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y,z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5$$

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ car une fonction polynôme

f admet des points critiques ssi $\nabla f(x,y,z) = 0$

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4xy \\ -2x^2 + 4y - 2z \\ -2y + 4z - 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} 4x^3 - 4xy = 0 \\ -2x^2 + 4y - 2z = 0 \\ -2y + 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ 4y - 2z = 0 \\ -2y + 4z - 4 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ -2x^2 + 4y - 2z = 0 \\ -2y + 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \\ -2y + 8y - 4 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = x^2 \\ -2x^2 + 4x^2 - 2z = 0 \\ -2x^2 + 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 2y \\ 6y = 4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^2 \\ -2x^2 + 4x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{4}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = x^2 \\ z = x^2 \\ x^2 = 2 \end{cases}$$

Exercice 7

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow f(x) = (1+x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2$

La fonction f est polynomiale donc, elle est 2 fois differentiable.

f possède des points critiques ssi $\nabla f(x) = 0$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(1+x_n)^3 x_1 \\ 2(1+x_n)^3 x_2 \\ \vdots \\ 3(1+x_n)^2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 2x_n \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = 0 \iff \begin{cases} 2(1+x_n)^3 x_1 = 0 & L_1 \\ 2(1+x_n)^3 x_2 = 0 \\ \vdots \\ 3(1+x_n)^2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 2x_n = 0 \end{cases}$$

la ligne $L_1 \Rightarrow 1 + x_n = 0$ ou $x_1 = 0$

Si $x_n = -1$ alors en remplaçant dans la ligne L_n on aurait $-2 = 0$ ce qui est impossible

Donc $x_1 = 0$. Par suite on a : $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

D'où $\nabla f(x) = 0 \iff x = 0$ et l'unique point critique de f.

* Montrons que le point $0 \in \mathbb{R}^n$ est un minimum local strict

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2(1+x_n)^3 & 0 & \cdots & 0 & 6(1+x_n)^2 x_1 \\ 0 & 2(1+x_n)^3 & & 0 & 6(1+x_n)^2 x_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 2(1+x_n)^3 & 6(1+x_n)^2 x_{n-1} \\ 6(1+x_n)^2 x_1 & 6(1+x_n)^2 x_2 & \cdots & 6(1+x_n)^2 x_{n-1} & 6\sum x_i^2 (1+x_n) + 2 \end{pmatrix}$$

$\nabla^2 f(0) = \mathrm{diag}(2, \dots, 2)$

la matrice $\nabla^2 f(0)$ est definie positive donc 0 est un minimum local strict

Prenons le point $x^* = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

alors $f(x^*) = -11 < f(0) = 0$

Donc 0 n'est pas un minimum globale

<u>Exercice 20</u>

$a \in \mathbb{R}^n$ fixé

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \langle a, x \rangle e^{-\|x\|^2}$$

1) a) Demontrer que f est differentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculons $\nabla f(x)$

$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto \langle a, x \rangle$ est affine, donc lineaire continue d'où differentiable

$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto e^{-x}$ est de classe C^∞ donc differentiable.

$z : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \; x \longmapsto \|x\|^2$ est de classe C^2 donc differentiable.

Université Pierre et Marie Curie – Paris 6
Mastère 1 de Mathématiques
5 mars 2013

Examen partiel
MM057 – Analyse Convexe
13h45 à 15h45

***Résoudre chaque problème sur une feuille séparée.** Les appareils électroniques et les documents sont interdits. Les solutions devront être rédigées de manière rigoureuse. Lorsque des résultats du cours seront utilisés, ils devront clairement être énoncés. On notera que certaines questions peuvent être résolues indépendamment. La qualité de la rédaction et de la présentation sera notée.*

On utilisera les notations du cours : $\mathcal{E}$ désigne l'espace euclidien classique de dimension N, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ son produit scalaire, $\|\cdot\|$ sa norme, et d sa distance.

Problème I. (50 points)

1/ Soit $C \subset \mathcal{E}$. On désigne par $\operatorname{conv}(C)$ le plus petit sous-ensemble convexe de $\mathcal{E}$ contenant C, et par $\operatorname{cône}(C)$ le plus petit cône (pas nécessairement convexe) de $\mathcal{E}$ contenant C. On rappelle que

$$\operatorname{conv}(C) = \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j c_j \;\middle|\; J \text{ ensemble fini, } \{\lambda_j\}_{j\in J} \subset]0,1],\ \sum_{j\in J} \lambda_j = 1,\ \{c_j\}_{j\in J} \subset C \right\},$$

et que

$$\operatorname{cône}(C) = \big\{ \lambda c \mid \lambda \in]0,+\infty[,\ c \in C \big\}.$$

a/ Montrer que $\operatorname{cône}(\operatorname{conv}(C)) = \operatorname{conv}(\operatorname{cône}(C))$.

b/ Il découle de **1/a/** que $\operatorname{cône}(\operatorname{conv}(C))$ est un cône convexe. Montrer qu'il s'agit du plus petit cône convexe de $\mathcal{E}$ contenant C.

c/ On suppose que $C = \{c_i\}_{i\in I}$ est un sous-ensemble fini de $\mathcal{E}$. Montrer que

$$K = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i c_i \;\middle|\; \{\lambda_i\}_{i\in I} \subset [0,+\infty[\right\}$$

est le plus petit cône convexe de $\mathcal{E}$ contenant C.

2/ Soit $D \subset \mathcal{E}$. On désigne par $D^\ominus = \{u \in \mathcal{E} \mid (\forall x \in D)\ \langle x \mid u \rangle \leqslant 0\}$ le cône polaire de D. Soient $I = \{1,\ldots,N\}$, $\{e_i\}_{i\in I}$ la base canonique de $\mathcal{E}$ et K le plus petit cône convexe de $\mathcal{E}$ contenant $\{\sum_{j=1}^{i} e_j\}_{i\in I}$. Utiliser la question **1/c/** pour montrer que

$$K^\ominus = \big\{ (\mu_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^N \mid \mu_1 \leqslant 0, \mu_1+\mu_2 \leqslant 0, \ldots, \mu_1+\ldots+\mu_N \leqslant 0 \big\}.$$

Problème II. (50 points) Soit $f: \mathcal{E} \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe. On appelle fonction perspective de f la fonction

$$F: \mathbb{R} \times \mathcal{E} \to]-\infty, +\infty] : (\xi, x) \mapsto \begin{cases} \xi f(x/\xi), & \text{si } \xi > 0; \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

1/ Montrer que F est convexe par les deux techniques suivantes :

a/ épi$F$ est une partie convexe de $\mathbb{R} \times \mathcal{E} \times \mathbb{R}$ (on pourra invoquer la question **I. 1/a/**).

b/ $(\forall X \in \operatorname{dom} F)(\forall Y \in \operatorname{dom} F)(\forall \alpha \in]0,1[)\ F(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leqslant \alpha F(X) + (1-\alpha)F(Y)$.

2/ Montrer la convexité des fonctions suivantes en utilisant la question **1/**.

a/ $F: \mathbb{R}^2 \to]-\infty, +\infty] : (\xi_1, \xi_2) \mapsto \begin{cases} \xi_2^2/\xi_1, & \text{si } \xi_1 > 0; \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$

b/ $F: \mathbb{R}^2 \to]-\infty, +\infty] : (\xi_1, \xi_2) \mapsto \begin{cases} \xi_1^2/\xi_2, & \text{si } \xi_1 > 0 \text{ et } \xi_2 > 0; \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$

c/ $F: \mathbb{R}^2 \to]-\infty, +\infty] : (\xi_1, \xi_2) \mapsto \begin{cases} \xi_1 \ln(\xi_1/\xi_2), & \text{si } \xi_1 > 0 \text{ et } \xi_2 > 0; \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$

d/ $F: \mathbb{R} \times \mathcal{E} \to]-\infty, +\infty] : (\xi, x) \mapsto \begin{cases} \xi, & \text{si } \xi > 0 \text{ et } x \in \xi C; \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases}$

où C est une partie convexe de $\mathcal{E}$.

e/ $\varphi: \mathcal{E} \to]-\infty, +\infty] : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\|Ax + b\|^2}{\langle x \mid u \rangle - \eta}, & \text{si } \langle x \mid u \rangle > \eta; \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases}$

où $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, $b \in \mathbb{R}^{M \times 1}$, $u \in \mathcal{E}$, et $\eta \in \mathbb{R}$.

f/ $\varphi: \mathcal{E} \to]-\infty, +\infty] : (\xi_i)_{1 \leqslant i \leqslant N} \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sum_{i=1}^N \xi_i^2}{\sum_{i=1}^N \xi_i}, & \text{si } \sum_{i=1}^N \xi_i > 0; \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$

Paris 6 – Mastère 1 de Mathématiques – Analyse Convexe
Solution du partiel de mars 2013

Solution du Problème I :

1/ **a/** Soit $x \in$ cône (conv (C)). Alors il existe $\alpha \in \,]0, +\infty[$, J fini, $\{\lambda_j\}_{j\in J} \subset \,]0, 1]$ et $\{c_j\}_{j\in J} \subset C$ tels que $\sum_{j\in J} \lambda_j = 1$ et $x = \alpha \sum_{j\in J} \lambda_j c_j$. Par suite,

$$x = \sum_{j\in J} \lambda_j(\alpha c_j) \in \text{conv}\,(\text{cône}\,(C)),$$

car $\{\alpha c_j\}_{j\in J} \subset$ cône (C). Par ailleurs, soit $x \in$ conv (cône (C)). Alors, il existe J fini, $\{\lambda_j\}_{j\in J} \subset \,]0, 1]$ et $\{x_j\}_{j\in J} \subset$ cône (C) tels que $\sum_{j\in J} \lambda_j = 1$ et $x = \sum_{j\in J} \lambda_j x_j$. De plus, pour tout $j \in J$, il existe $\{\alpha_j\}_{j\in J} \subset \,]0, +\infty[$ et $\{c_j\}_{j\in J} \subset C$ tels que $x_j = \alpha_j c_j$. Posons $\mu = \sum_{j\in J} \alpha_j \lambda_j$. Alors

$$\sum_{j\in J} \left(\frac{\alpha_j \lambda_j}{\mu}\right) c_j \in \text{conv}\,(C)$$

et

$$x = \mu \sum_{j\in J} \left(\frac{\alpha_j \lambda_j}{\mu}\right) c_j \in \text{cône}\,(\text{conv}\,(C)).$$

b/ Soit K un cône convexe contenant C. Comme K est un convexe contenant C, alors conv $(C) \subset K$. Donc cône (conv $(C)) \subset$ cône $(K) = K$.

c/ Soit D un cône convexe contenant C et soit $x = \sum_{i\in I} \lambda_i c_i \in K$, avec $\{\lambda_i\}_{i\in I} \subset \,]0, +\infty[$ et $\{c_i\}_{i\in I} \subset C$. Si on définit $\lambda = \sum_{i\in I} \lambda_i$, alors $\sum_{i\in I} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) c_i \in D$, car D est convexe et $\{c_i\}_{i\in I} \subset D$. Donc $x = \lambda \sum_{i\in I} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right) c_i \in D$, car D est un cône.

2/ Il découle de **1/c/** que $K = \left\{\sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{j=1}^i e_j \mid \{\lambda_i\}_{i\in I} \subset \mathbb{R}_+\right\}$. Soit $u = (\mu_i)_{i\in I} \in K^{\ominus}$. Pour tout $i \in I$, on obtient

$$\sum_{j=1}^i \mu_j = \left\langle u \;\middle|\; \sum_{j=1}^i e_j \right\rangle \leqslant 0.$$

Par ailleurs, soit $u = (\mu_i)_{i\in I} \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{j=1}^i \mu_j \leqslant 0$ pour tout $i \in I$. Si $y = \sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{j=1}^i e_j \in K$, alors on a $\langle y \mid u\rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i \sum_{j=1}^i \mu_j \leqslant 0$.

<u>**Solution du Problème II :**</u>

1/ **a/** Posons $C = \{1\} \times \text{épi}\, f$. Il découle de la convexité de f que C est une partie convexe de $\mathbb{R} \times \mathcal{E} \times \mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned}
\text{épi}\, F &= \{(\xi, x, \zeta) \in]0, +\infty[\times \mathcal{E} \times \mathbb{R} \mid \xi f(x/\xi) \leqslant \zeta\} \\
&= \{(\xi, x, \zeta) \in]0, +\infty[\times \mathcal{E} \times \mathbb{R} \mid (x/\xi, \zeta/\xi) \in \text{épi}\, f\} \\
&= \{\xi(1, y, \eta) \mid \xi \in]0, +\infty[\text{ et } (y, \eta) \in \text{épi}\, f\} \\
&= \bigcup_{\lambda \in]0, +\infty[} \lambda C \\
&= \text{cône}\, C,
\end{aligned} \tag{2}$$

qui est un cône convexe (cf. Problème **I.1/a/**).

b/ Soient $X = (x, \xi) \in \text{dom}\, F$, $Y = (y, \eta) \in \text{dom}\, F$, et $\alpha \in]0, 1[$. Alors $\gamma = \alpha\xi + (1-\alpha)\eta > 0$, et donc

$$\begin{aligned}
F(\alpha X + (1-\alpha)Y) &= F(\alpha\xi + (1-\alpha)\eta, \alpha x + (1-\alpha)y) \\
&= \gamma f\left(\frac{\alpha x + (1-\alpha)y}{\gamma}\right) \\
&= \gamma f\left(\frac{\alpha\xi}{\gamma}\frac{x}{\xi} + \frac{(1-\alpha)\eta}{\gamma}\frac{y}{\eta}\right) \\
&\leqslant \gamma\left(\frac{\alpha\xi}{\gamma} f\left(\frac{x}{\xi}\right) + \frac{(1-\alpha)\eta}{\gamma} f\left(\frac{y}{\eta}\right)\right) \\
&\leqslant \alpha\xi f\left(\frac{x}{\xi}\right) + (1-\alpha)\eta f\left(\frac{y}{\eta}\right) \\
&= \alpha F(X) + (1-\alpha)F(Y).
\end{aligned} \tag{3}$$

2/ **a/** On applique **1/** à $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ et $f\colon \xi_2 \mapsto \xi_2^2$.

b/ On applique **1/** à $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ et $f\colon \xi_2 \mapsto \begin{cases} 1/\xi_2, & \text{si } \xi_2 > 0; \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$

c/ On applique **1/** à $\mathcal{E} = \mathbb{R}$ et $f\colon \xi_2 \mapsto \begin{cases} -\ln(\xi_2), & \text{si } \xi_2 > 0; \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$

d/ On applique **1/** à $f = 1 + \iota_C$.

e/ On applique **1/** à $f = \|\cdot\|^2$ et on obtient la convexité de la fonction

$$F\colon \mathbb{R} \times \mathcal{E} \to]-\infty, +\infty] : (\xi, x) \mapsto \begin{cases} \|x\|^2/\xi, & \text{si } \xi > 0; \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

Par suite, puisque la transformation $T\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R} \times \mathcal{E} : x \mapsto (\langle x \mid u\rangle - \eta, Ax + b)$ est affine, la fonction $\varphi = F \circ T$ est convexe.

f/ Prendre $M = N$, $A = I$, $b = \underline{0}$, $u = \underline{1}$ et $\eta = 0$ dans **2/e/**.

UNIVERSITÉ DE CERGY **Année 2012-2013**

LICENCE d'ÉCONOMIE et GESTION

Première année - Semestre 2

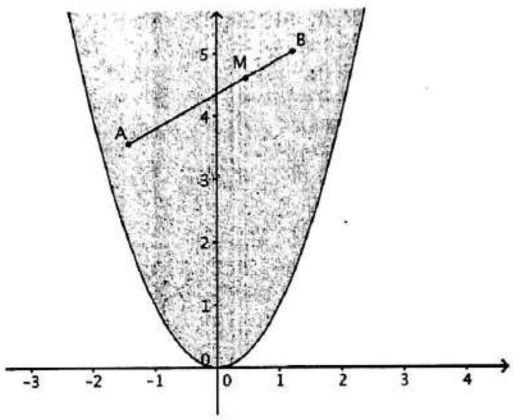
Fonctions de plusieurs variables

Chapitre V - Extrema - Convexité - Corrigé de quelques exercices

Exercice II

Le plan $\mathbb{R}^2$ étant muni d'un repère orthonormé,

1. Montrer que $E = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y \geq x^2\}$ est convexe.



Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points de E. Montrons que tout point $M(x_M, y_M)$ du segment $[AB]$ appartient à E

D'après le cours, si $M(x,y) \in [AB]$, il existe $\lambda \in [0;1]$ tel que

$$\begin{cases} x_M = \lambda x_A + (1-\lambda)x_B \\ y_M = \lambda y_A + (1-\lambda)y_B \end{cases}$$

On a l'équivalence : $M \in E \iff y_M \geq x_M^2 \iff y_M - x_M^2 \geq 0$

Or $y_M = \lambda y_A + (1-\lambda)y_B \geq \lambda x_A^2 + (1-\lambda)x_B^2$ car A et B sont deux points de E

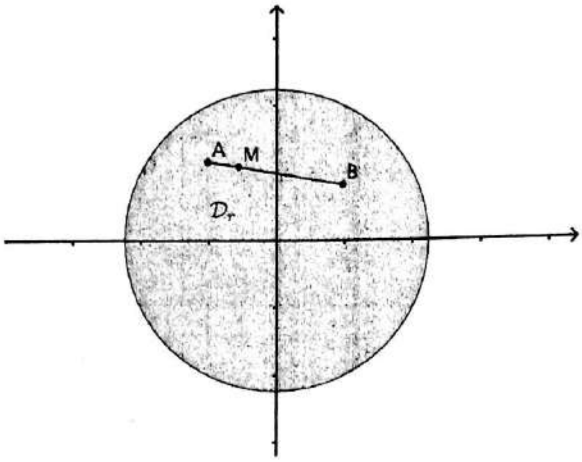
et $x_M^2 = (\lambda x_A + (1-\lambda)x_B)^2 = \lambda^2 x_A^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_A x_B + (1-\lambda)^2 x_B^2$

$$\begin{aligned} \text{D'où} \quad y_M - x_M^2 &\geq \lambda x_A^2 + (1-\lambda)x_B^2 - \left(\lambda^2 x_A^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_A x_B + (1-\lambda)^2 x_B^2\right) \\ &\geq \lambda(1-\lambda)x_A^2 - 2\lambda(1-\lambda)x_A x_B + (1-\lambda)\lambda x_B^2 \quad \textbf{à vérifier !} \\ &\geq \lambda(1-\lambda)\,(x_A - x_B)^2 \\ &\geq 0 \quad \text{car } \lambda \in [0;1] \end{aligned}$$

Donc $y_M \geq x_M^2$ et $M \in E$

Remarque : on a en particulier montré que : $\lambda x_A^2 + (1-\lambda)x_B^2 \geq (\lambda x_A + (1-\lambda)x_B)^2 \quad (*)$

2. Montrer que $D_r = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq r^2\}$ est convexe.



Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points de D_r. Montrons que tout point $M(x_M, y_M)$ du segment $[AB]$ appartient à D_r
D'après le cours, si $M(x,y) \in [AB]$, il existe $\lambda \in [0;1]$ tel que

$$\begin{cases} x_M &= \lambda x_A + (1-\lambda)x_B \\ y_M &= \lambda y_A + (1-\lambda)y_B \end{cases}$$

$M \in D_r \iff x_M^2 + y_M^2 \leq r^2$
$x_M^2 = (\lambda x_A + (1-\lambda)x_B)^2 \leq \lambda x_A^2 + (1-\lambda)x_B^2$ d'après l'inégalité $(*)$ montrée au 1.
De même $y_M^2 = (\lambda y_A + (1-\lambda)y_B)^2 \leq \lambda y_A^2 + (1-\lambda)y_B^2$

$$\begin{aligned} \text{D'où } x_M^2 + y_M^2 &\leq \lambda x_A^2 + (1-\lambda)x_B^2 + \lambda y_A^2 + (1-\lambda)y_B^2 \\ &\leq \lambda(x_A^2 + y_A^2) + (1-\lambda)(x_B^2 + y_B^2) \\ &\leq \lambda r^2 + (1-\lambda)r^2 \\ &\leq r^2 \quad \text{et } M \in D_r \end{aligned}$$

Exercice IV

1. Soit $\lambda \in [0;1]$. Montrer que

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda)y$$

a. La fonction « logarithme népérien » est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ (voir cours) : c-a-d

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in [0;1],\ \forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \ln(\lambda x + (1-\lambda)y) &\geq \lambda \ln x + (1-\lambda)\ln y \\ \ln(\lambda x + (1-\lambda)y) &\geq \ln x^\lambda + \ln y1 - \lambda \\ \ln(\lambda x + (1-\lambda)y) &\geq \ln\left(x^\lambda \cdot y^{1-\lambda}\right) \\ \text{D'où } \lambda x + (1-\lambda)y &\geq x^\lambda \cdot y^{1-\lambda} \end{aligned}$$

b. $\forall\lambda \in [0;1]$, $\forall(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$,
$x^\lambda \cdot y^{(1-\lambda)} = e^{\lambda \ln x} \cdot e^{(1-\lambda)\ \ln y} = \exp\left(\lambda \ln x + (1-\lambda)\ln y\right) \quad (*)$
La fonction « exponentielle » est convexe sur $\mathbb{R}$, donc (avec $x' = \ln x$ et $y' = \ln y$)
$\exp\left(\lambda x' + (1-\lambda)y'\right) \leq \lambda\exp\left(x'\right) + (1-\lambda)\exp\left(y'\right)$
c-a-d : $\exp\left(\lambda \ln x + (1-\lambda)\ln y\right) \leq \lambda\exp\left(\ln x\right) + (1-\lambda)\exp\left(\ln y\right)$
c-a-d : (en utilisant $(*)$) $x^\lambda \cdot y^{(1-\lambda)} \leq \lambda x + (1-\lambda)y$. D'où le résultat.

2. On utilise la concavité de la fonction « logarithme népérien » :
$\forall(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n, \forall(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in ([0;1])^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$

$$\ln\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\right) \geq \lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \cdots + \lambda_n \ln x_n$$

c-a-d :

$$\ln\left(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\right) \geq \ln\left(x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}\right)$$

Soit

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} \cdot x_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n}$$

Exercice V

1. $f_1 \;:\; f_1(x,y) = 2x^2 - y^2 + 2xy - 6x + 3$.
$\overrightarrow{grad\ f_1}(x;y) = \begin{pmatrix} 4x+2y-6 \\ -2y+2x \end{pmatrix}$. Pour déterminer les points stationnaires de f on résout le système :

$$\begin{cases} 4x+2y &= 6 \\ 2x-2y &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= x \\ 6x &= 6 \end{cases} \iff x = y = 1$$

f possède donc un unique point stationnaire $M_0(1;1)$.
Nature de M_0 : on pose $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;1) = 4$, $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1;1) = 2$ et $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1;1) = -2$
On a donc $s^2 - rt = 12 > 0$: M_0 est donc un point col de $\mathcal{G}_f$.

2. $f_2 \;:\; f_2(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$.
$\overrightarrow{grad\ f_2}(x;y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{pmatrix}$. Il est immédiat que $O(0;0)$ est l'unique point stationnaire de f.

On a $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x;y) = \dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2}$ donc $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0;0) = 1$.

$\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}(x;y) = \dfrac{x \times \dfrac{-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2}$ donc $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0;0) = 0$.

$\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x;y) = \dfrac{\sqrt{1+x^2+y^2} - \dfrac{y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}}{1+x^2+y^2}$ donc $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0;0) = 1$
Ainsi $s^2 - rt = -1 < 0$ et $r > 0$: f possède donc un minimum en O.

3. f_3 : $f_3(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$. $\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(Ox);(Oy)\}$

$\overrightarrow{grad\ f_3}(x;y) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{x^2} + y \\ \\ \frac{-1}{y^2} + x \end{pmatrix}$. Pour déterminer les points stationnaires de f on résout dans $\mathcal{D}_{f_3}$ le système :

$$\begin{cases} \frac{-1}{x^2} + y &= 0 \\ \frac{-1}{y^2} + x &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= \frac{1}{x^2} \\ -x^4 + x &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= \frac{1}{x^2} \\ x(-x^3+1) &= 0 \end{cases}$$

Seul $x = 1$ est solution de la seconde équation dans $\mathcal{D}_{f_3}$: f_3 possède donc un unique point stationnaire $M_0(1;1)$.

$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(x;y) = \frac{2}{x^3}$ donc $r = \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(1;1) = 2$

$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x}(x;y) = 1 = s$

$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(x;y) = \frac{2}{y^3}$ donc $t = \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(1;1) = 2$

Ainsi, $s^2 - rt = -3 < 0$ et $r > 0$: f possède donc un minimum en M_0.

Exercice VI

Étudier la convexité des fonctions suivantes :

1. f_1 : $f_1(x,y) = 2x^2 + y^2$

   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f_1}{\partial x}(x;y) = 4x$ et $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x;y) = 2y$

   Donc $r = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x;y) = 4$; $s = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x}(x;y) = 0$ et $t = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x;y) = 2$.

   Donc $s^2 - rt = -8 < 0$ et $r > 0$ et $t > 0$: f_1 est donc convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2. f_2 : $f_2(x,y) = x^4 + 6x^2y^2 + y^4$

   $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f_2}{\partial x}(x;y) = 4x^3 + 12xy^2$ et $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x;y) = 12x^2y + 4y^3$

   Donc $r = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x;y) = 12x^2 + 12y^2$; $s = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}(x;y) = 24xy$

   et $t = \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x;y) = 12y^2 + 12x^2$.

   Donc
   $$\begin{aligned} s^2 - rt &= (24xy)^2 - (12(x^2+y^2))^2 \\ &= 12^2\left((2xy)^2 - (x^2+y^2)^2\right) \\ &= 12^2\left(4x^2y^2 - x^4 - y^4 - 2x^2y^2\right) \\ &= -144(x^2-y^2)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

   Comme $r \geq 0$ et $t \geq 0$: f_2 est donc convexe sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice VII

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$.

1. $grad\, f(x;y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 2xy^2 \\ 2x^2y + 4y^3 \end{pmatrix}$. On résout le système :
$$\begin{cases} 4x^3 + 2xy^2 &= 0 \\ 2x^2y + 4y^3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(x^2+y^2) &= 0 \\ 2y(x^2+y^2) &= 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$
En effet, $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
f possède donc un unique point stationnaire $O(0;0)$.
2. Ici : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) = 12x^2 + 2y^2$ donc $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0;0) = 0$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y) = 4xy$ donc $s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0;0) = 0$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) = 12y^2 + 2x^2$ donc $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0;0) = 0$
Ainsi, $s^2 - rt = 0$ et on ne peut pas conclure ....
3. En posant
$$\begin{aligned} \delta(x;y) &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x;y) \\ &= (4xy)^2 - (12x^2 + 2y^2)(12y^2 + 2x^2) \\ &= 16x^2y^2 - 144x^2y^2 - 24x^4 - 24y^4 - 4x^2y^2 \\ &= -24x^4 - 24y^4 - 132x^2y^2 \\ &= -12(2x^4 + 2y^4 + 11x^2y^2) \leq 0 \end{aligned}$$
Comme $r \geq 0$ et $t \geq 0$, f est donc convexe sur $\mathbb{R}^2$: f admet donc un minimum global en son point stationnaire O.
4. On peut remarquer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geq 0$ (somme de puissances paires) et $f(0;0) = 0$ donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geq f(0;0)$ et f atteint un minimum global en O !

Exercice VIII

Montrer que le produit de deux nombres réels x et y , de somme S_0 donnée est maximal lorsque ces deux nombres sont égaux.

Posons $P(x,y) = xy$ et $S(x,y) = x + y$. On cherche donc le maximum de la fonction P sous la contrainte $S(x,y) = S_0$.

On a : $S(x,y) = S_0 \iff x + y = S_0 \iff y = S_0 - x$

On substitue cette expression de y dans P : $P(x, y(x)) = x(S_0 - x) = -x^2 + S_0.x$: P est donc une fonction du second degré de coefficient dominant égal à $a = -1$: P atteint donc son maximum en $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-S_0}{-2} = \dfrac{S_0}{2}$. Dans ce cas $y = S_0 - x = \dfrac{S_0}{2} = x$.

Remarque : Le problème revient à déterminer le « rectangle » d'aire maximale à périmètre fixé : c'est le carré qui vérifie cette propriété.

Exercice IX

Étudier les extrema de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$ dans les cas suivants :

1. $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 2y - 3$ et $g(x,y) = x + y - 4$.
   La contrainte permet d'exprimer implicitement y en fonction de x : $y = y(x) = 4 - x$.
   On étudie alors les variations de la fonction F définie par $F(x) = f(x; y(x)) = 2x^2 + 2x(4-x) + (4-x)^2 - 6x - 2(4-x) - 3 = 2x^2 + 8x - 2x^2 + 16 - 8x + x^2 - 6x - 8 + 2x - 3 = x^2 - 4x + 5$
   F est une fonction polynôme du second degré de coefficient dominant $a = 1 > 0$:
   F atteint donc son minium en $x = \dfrac{-b}{2a} = 2$
   Conclusion : f admet un minimum relatif sous la contrainte $x + y - 4 = 0$ en $(2;2)$.
   Ce minimum est égal à $f(2;2) = 1$
2. $f(x,y) = 10x^{\frac{1}{4}} + 2y^{\frac{1}{3}}$
   $g(x,y) = \dfrac{1}{4}\ln(x) + \dfrac{1}{3}\ln(y) - 3 = \ln x^{\frac{1}{4}} + \ln y^{\frac{1}{3}} - 3$
   On pose $X = x^{\frac{1}{4}}$ et $Y = y^{\frac{1}{3}}$: alors $X > 0$ et $Y > 0$.
   On étudie les extrema de $f(X,Y) = 10X + 2Y$ sous la contrainte $g(X,Y) = \ln X + \ln Y - 3 = 0$
   La contrainte permet d'exprimer implicitement Y en fonction de X :

$$\ln X + \ln Y - 3 = 0 \iff \ln Y = 3 - \ln X \iff Y = e^{3-\ln X} = \frac{e^3}{X}$$

On étudie donc la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(X) = f(X, Y(X)) = 10X + \dfrac{2e^3}{X}$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall X > 0, F'(X) = 10 - \dfrac{2e^3}{X^2} = \dfrac{10X^2 - 2e^3}{X^2} = \dfrac{2}{X^2}\left(5X^2 - e^3\right)$:
$F'(X)$ est du signe de $5X^2 - e^3$

x	0		$\sqrt{\dfrac{e^3}{5}}$		$+\infty$
$F'(x)$	$\|$	$-$		$+$	
F	$\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

Ici F est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc F admet un minimum (sur $\mathbb{R}_+^*$) en $X = \sqrt{\dfrac{e^3}{5}}$.

Si $X = \sqrt{\dfrac{e^3}{5}}$ alors $Y = \dfrac{e^3}{X} = \sqrt{5}\sqrt{e^3}$ et $\begin{cases} X = x^{\frac{1}{4}} \\ Y = y^{\frac{1}{3}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = X^4 = \dfrac{e^6}{25} \\ y = Y^3 = 5\sqrt{5}e^{\frac{9}{2}} \end{cases}$

f atteint donc son minimum en $\left(\dfrac{e^6}{25}; 5\sqrt{5}e^{\frac{9}{2}}\right)$ et ce minimum est égal à

$$f\left(\frac{e^6}{25}; 5\sqrt{5}e^{\frac{3}{2}}\right) = 10 \cdot \left(\frac{e^6}{25}\right)^{\frac{1}{4}} + 2 \cdot \left(5\sqrt{5}e^{\frac{9}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot e^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{5} \cdot e^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{5} \cdot e^{\frac{3}{2}}.$$

TECHNIQUE DE RECHERCHE DOCUMENTAIRE

Scanned by CamScanner

Université Félix Houphouet Boigny de Cocody - UFR-MI - Licence 3 - 2013-2014

NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen de Techniques de Recherche Documentaire (1 h 10 mn)
(Première Session)

Exercice 1

1) Qu'est ce qu'un *document secondaire*?
2) Quelles sont les différences essentielles entre un livre et un périodique ?
3) Définir les termes documentaires suivants: *Littérature grise*, *le bruit (documentaire)*, *la cote* (d'un livre), *Troncature*.

Exercice 2

1) L'index d'un livre est
a) une liste alphabétique de termes qui permet de retrouver une information.
b) une liste de termes employés dans l'ouvrage en question
c) une conclusion
d) une liste d'abréviations

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

2) Pour repérer les informations utiles dans un ouvrage, je me sers
a) De l'éditeur
b) De la table des matières
c) De la date d'édition
d) De l'index

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

3) Vrai ou Faux. (Justifier les réponses!)

a) Si on cherche dans une base de données, les références trouvées sont souvent plus précises que celles retrouvées dans un index imprimé.
b) Un index est l'entité qui décrit une source d'information spécifique telle qu'un livre.

Exercice 3

1) Pour vérifier la pertinence de l'information trouvée dans un livre, par rapport au sujet traité
a) Je lis les résumés d'ouvrage sur la 4ème de couverture
b) Je lis la préface
c) Je vérifie si le livre est en magasin

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

2) Une bibliographie
a) Retrace la vie d'un auteur
b) Sélectionne les extraits les plus importants de la Bible
c) Liste des références de documents

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

3) Quel est, en général, l'opérateur booléen par défaut dans les moteurs de recherche (recherche simple!). Ecrire une requête permettant de rechercher simplement, dans le moteur GOOGLE, seulement les fichiers de type Word contenant exactement la phrase suivante: Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique.

Université Félix Houphouet Boigny de Cocody - UFR-MI - Licence 3 - 2014-2015

NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen de Techniques de Recherche Documentaire (1 h 15 mn)
(Deuxieme Session)

Exercice 1

1) Qu'est ce qu'un *Thésaurus*?

2) Définir les termes documentaires suivants:
a) *Bibliographie critique,*
b) *Biobibliographie commerciale.*

Exercice 2

L'index d'un livre est
a) une liste alphabétique de termes qui permet de retrouver une information.
b) une liste de termes employés dans l'ouvrage en question
c) une conclusion
d) une liste d'abréviations

Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

Exercice 3

Dans un site web un lien hypertexte permet

a) de circuler d'une page web à l'autre
b) d'ouvrir une page web autre que la page d'accueil
c) de visualiser une image
e) de se diriger vers un autre site

Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

Exercice 4

1) Décrire le principe et le fonctionnement de la classification Dewey.

2) Quel est l'indice correspondant au domaine Sciences dans la division Dewey? Donner la couleur correspondante.

3) On considère les cotes suivantes (relatives à la classification Dewey):

a=555.22 GEP
b=555.22 GAP
c=555.01 GAP
d= 555.008 GEP

Classer ces cotes de la plus petite à la plus grande (ordre croissant).

Université Félix Houphouet Boigny de Cocody - UFR-MI - Licence 3 - 2015-2016

NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen de Techniques de Recherche Documentaire (1 heure)
(Deuxième Session)

Exercice 1

1) Quelles sont les différences essentielles entre un livre et un périodique ?

2) Définir les termes documentaires suivants: ***Lexique, Troncature.***

Exercice 2

1) L'index d'un livre est

a) une liste alphabétique de termes qui permet de retrouver une information.

b) une liste de termes employés dans l'ouvrage en question

c) une conclusion

d) une liste d'abréviations

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

2) Pour repérer les informations utiles dans un ouvrage, je me sers

a) De l'éditeur

b) De la table des matières

c) De la date d'édition

d) De l'index

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

3) Vrai ou Faux. (Justifier les réponses!)

a) Si on cherche dans une base de données, les références trouvées sont souvent plus précises que celles retrouvées dans un index imprimé.

b) Un index est l'entité qui décrit une source d'information spécifique telle qu'un livre.

Exercice 3

1) Pour vérifier la pertinence de l'information trouvée dans un livre, par rapport au sujet traité

a) Je lis les résumés d'ouvrage sur la 4ème de couverture

b) Je lis la préface

c) Je vérifie si le livre est en magasin

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

2) Une bibliographie

a) Retrace la vie d'un auteur

b) Sélectionne les extraits les plus importants de la Bible

c) Liste des références de documents

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

3) Quel est, en général, l'opérateur booléen par défaut dans les moteurs de recherche (recherche simple!). Ecrire une requête permettant de rechercher simplement, dans le moteur GOOGLE, seulement les fichiers de type Word contenant exactement la phrase suivante: Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique.

UFHB de Cocody UFR- MI –2013- 2014

Fiche de TD (Techniques de recherche documentaire)

Exercice 1

1) Pour avoir une idée générale sur un sujet et être en mesure de mieux le préciser, il est recommandé de consulter :

   a) des encyclopédies

   b) des thèses

2) Lorsqu'on veut repérer des informations scientifiques les plus récentes possibles, mieux vaut consulter:

   a) des monographies (livres)

   b) des articles de périodiques

3) Lorsqu'on veut trouver une analyse complète sur un événement important qui s'est produit il y a plus de 3 ans (par exemple le naufrage de l'Exxon Valdez et ses conséquences sur l'environnement marin), mieux vaut consulter :

   a) des articles de journaux

   b) des monographies

Exercice 2

1) Il est parfois nécessaire de consulter plusieurs bases de données pour être assuré de repérer l'ensemble de la documentation. (Vrai ou Faux).

2) - Aller sur le site suivant

   http://www.bibliotheques.uqam.ca/centrale

   - Faire une recherche par auteur. Lequel de ces documents, publié durant l'année 2008, a pour auteur Hubert Reeves ?

   i) Le défi du monde
   ii) De quoi est fait l'Univers ?
   iii) Dieu et Darwin : débat sur les origines de l'homme
   iv) Petite histoire de la matière et de l'univers
   v) Galaxies et cosmologie

Exercice 3

1) Aller dans Google et formuler la requête suivante : *construction à la règle et au compas.* Noter le nombre de résultat obtenus. D'autre part formuler la requête suivante : *« construction à la règle et au compas »*

Comparer le nombre de résultats obtenu au nombre précédant. Commenter ces résultats

2) Si on interroge une base de données, on peut chercher sur plusieurs années à la fois.

   (Vrai ou Faux)

3) Si on cherche dans une base de données, on accède toujours au texte intégral des articles repérés. (Vrai ou faux)

4) Si on cherche dans une base de données, les références trouvées sont souvent plus précises que celles retrouvées dans un index imprimé.

5) L'index des sujets est la liste alphabétique des sujets couverts par les documents inscrits dans un catalogue ou une base de données.

Exercice 4

1) On peut chercher dans Google ou Yahoo pour trouver :
   a) majorité des articles de revues parus sur des sujets spécialisés
   b) des renseignements biographiques sur des personnalités connues

2) Qui suis-je ? Je suis un outil qui permet de faire des recherches sur le Web dans plusieurs bases de données à la fois.
   a) Un moteur de recherche tel Google
   b) Un métamoteur de recherche tel Yippy (http://search.yippy.com/)

3) Qui suis-je ? Je suis le meilleur outil pour retrouver de l'information sur un sujet général (par exemple la liste des curiosités touristiques au Yucatan, la critique d'un film récent, etc.).
   a) Un moteur de recherche tel Google
   b) Un répertoire tel que Yahoo!

4) Qui suis-je ? Je suis le meilleur outil pour retrouver un document précis tel que la «Déclaration universelle des droits de l'homme».
   a) Un moteur de recherche tel Google
   b) Un répertoire tel que Yahoo!

5) Aucun outil de recherche ne couvre la totalité du Web. (Vrai ou Faux)

6) Qui suis-je ? Je classe les ressources disponibles sur Internet et hiérarchise l'information en la classant en catégorie et sous-catégorie.
   a) Un moteur de recherche tel Google
   b) Un répertoire tel que Yahoo!

Scanned by CamScanner

LOGICIEL DE GESTION DE PROJET

UFR MI

Année 2013 - 2014

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

Devoir - Durée : 1h15 min

Enoncé : Montage d'un film : Un producteur de cinéma est confronté au problème du planning de son prochain film et vous soumet les tâches qui doivent être effectuées :

Code tâche	Désignation de la tâche	Durée (Jours)	Tâches antérieures
A	Ecriture du scénario	30	
B	Choix et recrutement des comédiens	12	ne peut commencer que 15 jours après le début de A
C	Choix du lieu du tournage	8	ne peut commencer que 20 jours après le début de A
D	Découpage technique	4	après A et C
E	Préparation des décors	7	après C et D
F	Tournage des extérieurs	10	après A, B, C et D
G	Tournage des intérieurs	12	après D, E et F
H	Synchronisation	3	après F et G
I	Montage	14	après H
J	Accompagnement sonore	7	ne peut commencer que 3 jours après le début de I
K	Mixage	6	après I et J
L	Tirage de la copie zéro	1	Après K

<u>NB</u> : $T_0 = 1$

1- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

1

2- Quelles sont les tâches critiques du projet ?

3- Indiquer la durée minimale de réalisation du projet. Rappelons que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne

4- Combien de personne minimum il faut pour le réaliser (1 tâche étant réalisée par 1 seule personne) ? Justifiez votre réponse.

Bonne Chance à tous

UFR MI

Année 2014 - 2015

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

COMPOSITION – Novembre 2015 Durée : 2 heures

Exercice 1 : Questions de cours

a. Quel est l'objectif de la planification et quels sont ses éléments de base ?
b. Définissez les notions de Marge Totale et Marge Libre.
c. Quelles sont les principales phases du processus de gestion de projet ?
d. Quels sont les différents eléments qui permettent d'effectuer l'analyse du contour d'un projet ?
e. Comment peut-on définir la notion de « Gestion de projet »

Exercice 2 : Planification et PERT

Enoncé : Le BNETD (Bureau National d'Etudes Techniques et de Développement) a reçu la maîtrise d'œuvre de la construction d'une piscine olympique sur un campus universitaire. Le tableau des antériorités des tâches est le suivant :

Codes	Tâches	Antériorités	Durée (en jours)
A	Excavation	-	5
B	Fondation	~~A~~	2
C	Pose de canalisations	~~B~~	4
D	Essais en pression	~~C,G~~	8
E	Etanchéité	~~D~~	9
F	Mise en place de la station d'épuration	~~A~~	6
G	Mise en place du chauffage	~~F~~	5
H	Raccordement électrique	~~G~~	4
I	Sonorisation sous-marine	~~H~~	5
J	Dallage	~~E,I~~	6
K	Construction des vestiaires	~~J~~	8
L	Construction du solarium	~~J~~	2
M	Mise en eau	~~K,L~~	3

NB : $T_0 = 1$

1

1- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

2- Quelles sont les tâches critiques du projet ?

3- Les travaux débutent le 1er avril. Chaque mois comporte 20 jours ouvrables. Déterminer si l'inauguration peut avoir lieu comme prévu le 15 juin.

4- Lors de la pose des canalisations, on apprend que, suite à un incident technique, cette opération durera 6 jours de plus que prévu. Cela aura-t-il une influence sur le délai prévu ?

5- La direction s'inquiète quant au respect des délais. Elle propose de se passer de la sonorisation sous-marine. Cela vous semble t-il judicieux ? Justifiez votre réponse.

6- Affectation des ressources. On considère que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne.

A- Combien de personne minimum il faut pour le réaliser ?

B- Justifier cela à travers le tableau joint en annexe. (le tableau doit être rendu avec votre copie)

Bonne Chance à tous

2

UFR MI

Année 2015 - 2016

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

COMPOSITION - Novembre 2016 Durée : 2 heures

Exercice 1 : Questions de cours

1. Comment peut-on définir la notion de « Gestion de projet »
2. Quels sont les différents éléments qui permettent d'effectuer l'analyse du contour d'un projet ?
3. Selon combien de critères peut-on découper un projet ? citez les et donner 2 avantages par critères.
4. Quelles sont les critères ou paramètres qui permettent de déterminer la durée d'une tâche ?
5. Quel est l'objectif de la planification et quels sont ses éléments de base

Exercice 2 : Planification et PERT

Enoncé : Vous êtes responsable de production de l'entreprise SANIA-CI dans l'industrie Agro-alimentaire.
Vous êtes chargé de mettre en place le planning de réalisation d'un nouveau produit et de gérer le suivi de ce projet.
Le tableau ci-dessous résume les différentes tâches à réaliser pour parvenir à la fin du projet. Les lettres représentent les différentes tâches du projet.

Tâche	Prédécesseur	Durée
A	-	4
B	A	6
C	-	10
D	-	19
E	C	17
F	C	5
G	D, F	6
H	B, G	8
I	H	6
J	E, H	2

1

NB : a- $T_0 = 1$
b- Il existe une contrainte de type Fin Début de 4 jours entre B et H,
c- Il existe une contrainte de type Fin Début de 5 jours entre E et J

1- Quelles sont les tâches n'ayant pas d'antériorité et qu'est ce que cela implique ?

2- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

3- Quelles sont les tâches critiques du projet ?

4- Si la valeur de la contrainte entre E et J avait été négative (FD = - 5), qu'est ce que cela aurait signifié ?

5- En choisissant une tâche ayant une marge libre différente de la marge totale :

A- Expliquer précisément les implications sur le projet d'un retard supérieur à la marge libre survenant sur la tâche choisie.

B- Expliquer précisément les implications sur le projet d'un retard supérieur à la marge totale survenant sur la tâche choisie

6- Affectation des ressources. On considère que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne.

A- Quelle est la durée du projet ?

B- Combien de personne minimum il faut pour le réaliser ? Justifier cela à travers le tableau joint en annexe. (le tableau doit être rendu avec votre copie)

Bonne Chance à tous

2

UFR MI

Année 2015 - 2016

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

COMPOSITION - Décembre 2016 Durée : 2 heures

Exercice 1 : (10 pts)

Enoncé : Dans le cadre de la réforme hospitalière, les conseils d'administration de 3 centres hospitaliers voisins ont élaboré en commun un plan de rationalisation de leurs activités. Tout en maintenant les 3 sites existants, ils ont décidé de fusionner en une seule entité appelée HOPITAL ABIDJAN. La réorganisation des unités de soins et de leur gestion implique l'interconnexion des réseaux informatiques des 3 sites. Deux des 3 hôpitaux, désignés H1 et H2, sont déjà interconnectés ; vous participez à l'étude et à la mise en place de la connexion du troisième hôpital, désigné H3.

L'évolution du réseau local du site H3 a été planifiée. Les tâches nécessaires à la réalisation de ce projet, leurs durées ainsi que les conditions d'antériorité qui les relient figurent dans le tableau ci-dessous :

Code de la tâche	Désignation de la tâche	Durée en jours	Tâches antérieures
A	Définition des contraintes du réseau	2	B, E
B	Mise en place du projet	6	-
C	Mise à jour des droits d'accès	2	F
D	Achat des composants matériels	8	J
E	Définition du budget	3	-
F	Mise à jour des groupes utilisateurs	2	K
G	Formation de l'administrateur réseau	5	J
H	Câblage	10	J
I	Commande de Novell Netware 5	4	D
J	Choix des fournisseurs et des intervenants	5	A
K	Mise à jour logicielle des postes clients	1	M
L	Mise à jour matérielle des postes	2	D
M	Installation Novell Netware 5	2	L, I, H, G

<u>NB</u> : $T_0 = 1$

1- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

2- Quelles sont les tâches critiques du projet ?

3- Indiquer la durée minimale de réalisation du projet.Rappelons que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne

4- Combien de personne minimum il faut pour le réaliser (1 tâche étant réalisée par 1 seule personne) ? Justifiez votre réponse.(annexe 1)

5- Le responsable redoute maintenant des difficultés techniques sur la mise à jour matérielle des postes, difficultés qui porteraient de 2 à 8 jours la durée de la tâche L.

a) Indiquer l'incidence sur la durée globale du projet (nombre de jours en plus éventuellement) d'allongement de la durée de la tâche L.

b) Dans ces conditions, le nombre total de personne minimum pour réaliser le projet changera t-il ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2 : (10 pts)

Enoncé :Dans ce projet, volontairement simplifié, nous analyserons l'ensemble des tâches d'industrialisation d'un article, nécessitant une étude de gamme et la conception d'un montage.
Pour étudier le dossier et établir la gamme de fabrication, le technicien en méthodes (Alain) a besoin de deux jours. Ensuite, il fournira au dessinateur (Bernard) le schéma de principe du montage, afin que celui-ci le dessine (durée sept jours). Une fois défini, le montage sera transmis à l'atelier d'outillage (Cédric) pour la réalisation (durée huit jours).
En parallèle avec le dessinateur, le secrétariat du service achats (Delphine) doit passer la commande pour l'outillage (une journée). Le délai de livraison de l'outillage est de trois jours.

2

Eric, du service Magasin, s'occupera de la réception et du contrôle de la livraison (une journée).

A- (sans tenir compte de la disponibilité des ressources)

A1 - Compléter le tableau :

Nom de la tâche	Durée (en jour)	Prédécesseurs
A-Etudier le dossier		
B-Concevoir le montage		
C-Réaliser le montage		
D-Commander l'outillage		
E-Recevoir l'outillage		

A2 - Etablir le tableau des marges :

Nom de la tâche	Marge totale (jours)	Marge libre (jours)	Tâche critique (oui/non) ?
A Etudier le dossier			
B Concevoir le montage			
C Réaliser le montage			
D Commander l'outillage			
E Recevoir l'outillage			

B- On tient compte maintenant de la disponibilité des ressources

B1- Compléter le tableau suivant :

Nom de la tâche	Ressources	Durée (en jour)
A Etudier le dossier	Alain [100 %]	
B Concevoir le montage	Bernard [100 %]	
C Réaliser le montage	Cédric [50 %]	
D Commander l'outillage	Delphine [50 %]	
E Recevoir l'outillage	Eric [100 %]	

B2 - Etablir le tableau des marges :

Nom de la tâche	Marge totale (jours)	Marge libre (jours)	Tâche critique (oui/non)?
A Etudier le dossier			
B Concevoir le montage			
C Réaliser le montage			
D Commander l'outillage			
E Recevoir l'outillage			

Bonne Chance à tous

3

Annexe

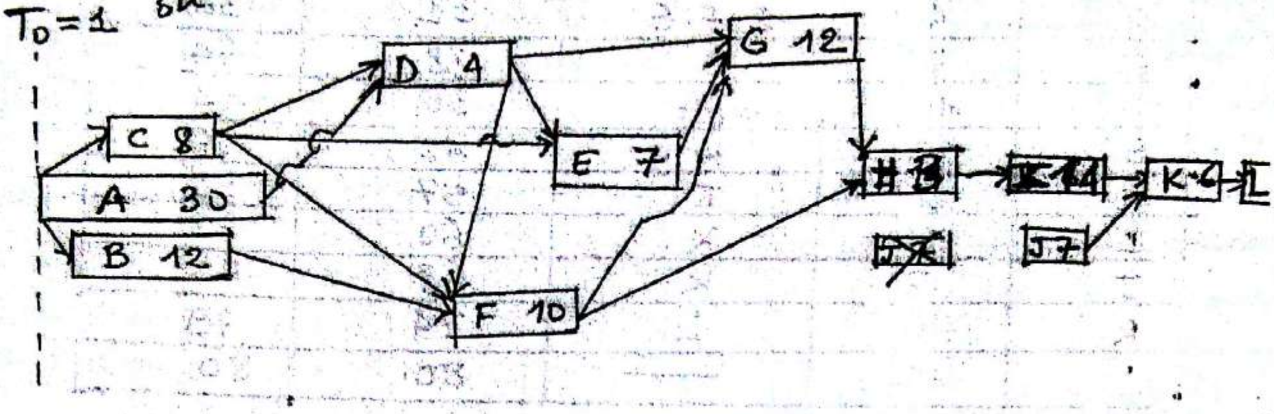
												1
												2
												3
												4
												5
												6
												7
												8
												9
												10
												11
												12
												13
												14
												15
												16
												17
												18
												19
												20
												21
												22
												23
												24
												25
												26
												27
												28
												29
												30
												31
												32
												33
												34
												35
												36
												37
												38
												39
												40
												41
												42
												43
												44
												45
												46
												47
												48
												49

TD de Gestion de Projet

Dr SEKA Louis

Correction du devoir 2013 - 2014

$T_0 = 1$ ou = 25/01/16



Tâches	Durée	Prédécesseurs	Début + tôt	Fin + tôt	
A	30	——	1	30	
B	12	A (15J après)	16	27	
C	8	A (20J après)	21	28	
D	4	A, C	31	34	
E	7	C, D	35	41	
F	10	A, B, C, D	35	44	
G	12	D, E, F	45	56	
H	3	F, G	57	59	
I	14	H	60	73	
J	7	I (3J après)	63	69	
K	6	I, J	74	79	
L	1	K	80	80	

Tâches	Durées	Successeurs	Debut + Tard	Fin + Tard
A	30	D, F	1	30
B	12	F	23	34
C	8	D, E, F	23	30
D	4	E, F, G	31	34
E	7	G	38	44
F	10	G, H	35	44
G	12	H	45	56
H	3	I	57	59
I	14	K	60	73
J	7	K	67	73
K	6	L	74	79
L	1	—	80	80 $= T_F$

Les contraintes sont respectées

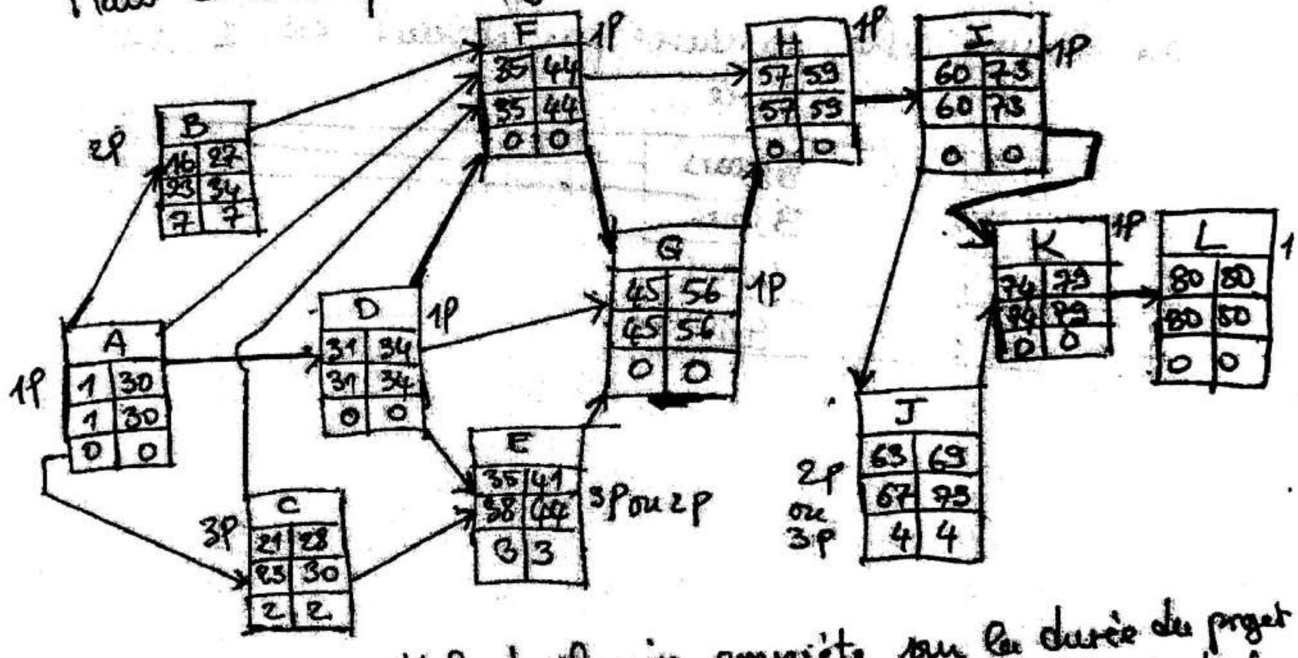
22/11/2016

TÂCHE	Debut au plus tard	Debut au plus tôt	Marge totale
A	1	1	0
B	23	16	7
C	23	21	2
D	31	31	0
E	38	35	3
F	35	35	0
G	45	45	0
H	57	57	0
I	60	60	0
J	67	63	4
K	74	74	0
L	80	80	0

successeur precoce est celui qui a le debut + tôt le plus petit.

Tâche	Successeur plus proche	Début au plus tôt du successeur	Fin au plus tôt du successeur	marge libre
A	D	31	30	0
B	F	35	27	7
C	D	31	28	2
D	F, E	35	34	0
E	G	45	41	3
F	G	45	44	0
G	H	57	56	0
H	I	60	59	0
I	K	74	73	0
J	K	74	69	4
K	L	80	79	0
L	—	—	80	0

Dans ce cas la marge libre est egale à la marge total
Mais ce n'est pas toujours ainsi.



L'imprevu d'une tâche du chemin empiète sur la durée du projet
L'imprevu d'une tâche hors du chemin critique empiète sur la durée du projet si sa marge total est absorbée.

Les tâches du chemin critique ont une marge total nulle.

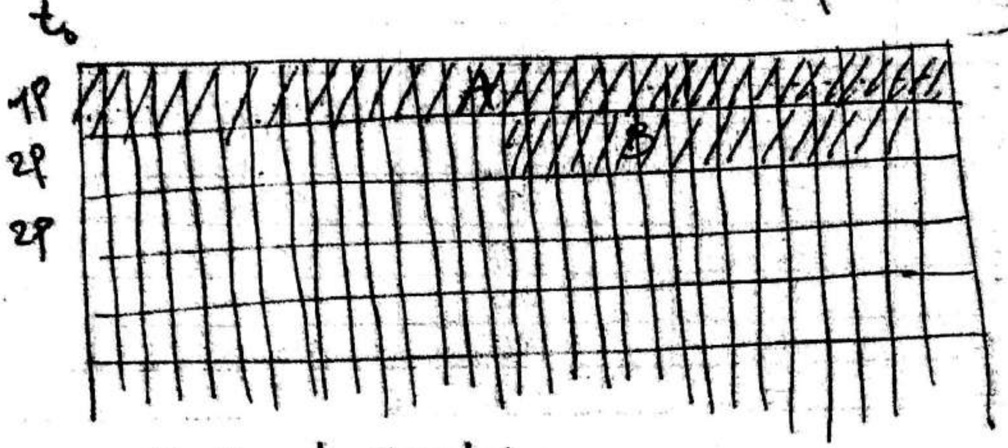
La durée du projet est egale à la somme des durées de chaque tâche du chemin critique.

2) Les tâches du chemin critique A, D, F, G, H, I, K, L

3) La durée minimale de réalisation du projet est 80 jours -

4) Il faut 3 personnes minimum pour réaliser le projet.-

Chaque case représente un jour



2P : 2è personne

Microsoft Project - Projet 1 :

Dans le logiciel, il est considéré les jours fériés par défaut.

Pour ~~les~~ une tâche, la durée par défaut est 1 jour.

		Durée
1	⊟ Phase 1	8 jours
2	A	8 jours
3	B	5 jours
4	C	4 jours

ANGLAIS S2

UFR MATHS-INFO

EXAMEN D'ANGLAIS **L3 SEMESTRE 2** **Durée: 02 heures**

Part I : Reading

Exercise 1: Solve the following problems. Give only the solutions

1. Kenneth solved a certain number of problems and Harold solved 2 more than twice as many. Together they solved 38. How many did each solve?

Solution : ______________________

2. If 2 is added to a certain number, the result is the same as would be obtained if twice that number were subtracted from 32. What is the number?

Solution : ______________________

3. Harry wished one summer to earn enough money for his next years expense in college, which would amount to $1560. His father said, "For every dollar that you earn I will give you four dollars." How much must Harry earn?

Solution : ______________________

4. A salesman sold twice as much pears in the afternoon than in the morning. If he sold 360 kilograms of pears that day, how many kilograms did he sell in the morning and how many in the afternoon?

Solution : ______________________

5. If a farmer wants to plough a farm field on time, he must plough 120 hectares a day. For technical reasons he ploughed only 85 hectares a day, hence he had to plough 2 more days than he planned and he still has 40 hectares left. What is the area of the farm field and how many days the farmer planned to work initially?

Solution : ______________________

Exercise 2: Translate the phrases into algebraic expressions. (Do not give the solutions)

1. Fifteen less than twice a number ______________________
2. The sum of one-sixth of r, five-sixths of m, and 3 ______________________
3. The product of nine and a number, decreased by six ______________________
4. 3 less than 8 times d ______________________
5. The sum of two-fifths of h and five-sixths of f, minus 4 ______________________

Part II: Grammar

Exercise 3: ***Join these sentences using who or which, as in the example.***

1. The person phoned. He didn't leave a message.
   The person who phoned didn't leave a message.
2. The bus goes to the airport. It leaves every 20 minutes.
   ____
3. The picture was hanging near the door. It was horrible.
   ____
4. The instructor taught me how to drive. He was very patient.
   ____

Exercise 4: **Turn these sentences into passive**

1. Dennis Bergkamp scored the goal of the year yesterday.
   ____
2. Who has published the news?
   ____
3. You must load the bigger trunks first
   ____

Exercise 5: ***comparatives and superlatives***

First, Circle "Correct" or "Incorrect" under each sentence. Then, second, rewrite the correct version of the sentence if the sentence is incorrect.

1. Where's the most cheap place to eat?
   Correct Incorrect ______________________________
2. She's worst than me at maths.
   Correct Incorrect ______________________________
3. The first number is superior than the second.
   Correct Incorrect ______________________________

UFR MATHS-INFO

EXAMEN D'ANGLAIS **L3 SEMESTRE 2 (2)** **Durée: ~~1h00 heure~~** 2 heures

Part I : Reading

Exercise 1: Solve the following problems. Give only the solutions

1. In a group of 60 people, 27 like cold drinks and 42 like hot drinks and each person likes at least one of the two drinks. How many like both coffee and tea? *Solution :* ____________

2. There are 35 students in art class and 57 students in dance class. Find the number of students who are either in art class or in dance class. *Solution :* ____________

3. Harry wished one summer to earn enough money for his next year's expense in college, which would amount to $1560. His father said, "For every dollar that you earn I will give you four dollars." How much must Harry earn? *Solution :* ____________

4. In a group of 100 persons, 72 people can speak English and 43 can speak French. How many can speak English only? How many can speak French only and how many can speak both English and French? *Solution :* ____________

Exercise 2: ***Translate the phrases into algebraic expressions. (Do not give the solutions)***

1. Fifteen less than twice a number ____________
2. The sum of one-sixth of r, five-sixths of m, and 3 ____________
3. The product of nine and a number, decreased by six ____________
4. 3 less than 8 times d ____________

Part II: Vocabulary

Exercise 3: ***Fill in the gaps with the most appropriate mathematics word.***

1. If for example, we have the set A = {1, 2, 3, 4, 5}, and another set B = {1, 2, 3}, then B is a ____________ of A
2. The ____________ { } are sometimes called "set brackets".
3. {..., -4, -2, 0, 2, 4, ...} is the Set of ____________ numbers:
4. {..., -3, -1, 1, 3, ...} is the Set of ____________ numbers:
5. the infinity symbols (∞, -∞) do not represent real numbers, they are used to indicate that the set is ____________ in the positive or negative direction of the real number line.

Part III: Grammar

Exercise 4 (a): Ask Yes/No questions

1. My result is correct
2. The set is empty
3. They solved the two operations
4. Ten and ten equals twenty
5. He will look at your problems later

Exercise 4 (b): Ask a WH-Question about the underlined part of the sentence

1. The University is only 5 km form my home
2. My car used seventy litres of gas for the trip
3. The class meets in room 205
4. *She has three brothers*
5. *I need a calculator*

Exercise 5: Define the mathematics concepts below, use relative pronouns

1. An integer
2. A set,
3. A University,
4. (the) night
5. a mathematician

Arithmetic

Integers

0	zero	10	ten	20	twenty
1	one	11	eleven	30	thirty
2	two	12	twelve	40	forty
3	three	13	thirteen	50	fifty
4	four	14	fourteen	60	sixty
5	five	15	fifteen	70	seventy
6	six	16	sixteen	80	eighty
7	seven	17	seventeen	90	ninety
8	eight	18	eighteen	100	one hundred
9	nine	19	nineteen	1000	one thousand

-245	minus two hundred and forty-five
22 731	twenty-two thousand seven hundred and thirty-one
1 000 000	one million
56 000 000	fifty-six million
1 000 000 000	one billion [US usage, now universal]
7 000 000 000	seven billion [US usage, now universal]
1 000 000 000 000	one trillion [US usage, now universal]
3 000 000 000 000	three trillion [US usage, now universal]

Fractions [= Rational Numbers]

$\frac{1}{2}$	one half	$\frac{3}{8}$	three eighths
$\frac{1}{3}$	one third	$\frac{26}{9}$	twenty-six ninths
$\frac{1}{4}$	one quarter [= one fourth]	$-\frac{5}{34}$	minus five thirty-fourths
$\frac{1}{5}$	one fifth	$2\frac{3}{7}$	two and three sevenths
$-\frac{1}{17}$	minus one seventeenth		

Real Numbers

-0.067	minus nought point zero six seven
81.59	eighty-one point five nine
$-2.3 \cdot 10^6$	minus two point three times ten to the six
$[= -2\,300\,000$	minus two million three hundred thousand]
$4 \cdot 10^{-3}$	four times ten to the minus three
$[= 0.004 = 4/1000$	four thousandths]
$\pi\ [= 3.14159\ldots]$	pi [pronounced as 'pie']
$e\ [= 2.71828\ldots]$	e [base of the natural logarithm]

Complex Numbers

i	`i`
$3+4i$	`three plus four i`
$1-2i$	`one minus two i`
$\overline{1-2i} = 1+2i$	`the complex conjugate of one minus two i equals one plus two i`

The real part and the imaginary part of $3+4i$ are equal, respectively, to 3 and 4.

Basic arithmetic operations

Addition:	$3+5=8$	`three plus five equals [= is equal to] eight`
Subtraction:	$3-5=-2$	`three minus five equals [= ...] minus two`
Multiplication:	$3 \cdot 5 = 15$	`three times five equals [= ...] fifteen`
Division:	$3/5 = 0.6$	`three divided by five equals [= ...] zero point six`

$(2-3)\cdot 6+1 = -5$	`two minus three in brackets times six plus one equals minus five`
$\frac{1-3}{2+4} = -1/3$	`one minus three over two plus four equals minus one third`
$4!$ $[= 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4]$	`four factorial`

Exponentiation, Roots

5^2	$[= 5\cdot 5 = 25]$	`five squared`
5^3	$[= 5\cdot 5\cdot 5 = 125]$	`five cubed`
5^4	$[= 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 625]$	`five to the (power of) four`
5^{-1}	$[= 1/5 = 0.2]$	`five to the minus one`
5^{-2}	$[= 1/5^2 = 0.04]$	`five to the minus two`
$\sqrt{3}$	$[= 1.73205\ldots]$	`the square root of three`
$\sqrt[3]{64}$	$[= 4]$	`the cube root of sixty four`
$\sqrt[5]{32}$	$[= 2]$	`the fifth root of thirty two`

In the complex domain the notation $\sqrt[n]{a}$ is ambiguous, since any non-zero complex number has n different n-th roots. For example, $\sqrt[4]{-4}$ has four possible values: $\pm 1 \pm i$ (with all possible combinations of signs).

$(1+2)^{2+2}$	`one plus two, all to the power of two plus two`
$e^{\pi i} = -1$	`e to the (power of) pi i equals minus one`

Divisibility

The multiples of a positive integer a are the numbers $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$. If b is a multiple of a, we also say that a divides b, or that a is a divisor of b (notation: $a \mid b$). This is equivalent to $\frac{b}{a}$ being an integer.

Division with remainder

If a, b are arbitrary positive integers, we can divide b by a, in general, only with a remainder. For example, 7 lies between the following two consecutive multiples of 3:

$$2 \cdot 3 = 6 < 7 < 3 \cdot 3 = 9, \qquad 7 = 2 \cdot 3 + 1 \qquad \left(\iff \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} \right).$$

In general, if qa is the largest multiple of a which is less than or equal to b, then

$$b = qa + r, \qquad r = 0, 1, \ldots, a - 1.$$

The integer q (resp., r) is the *quotient* (resp., the *remainder*) of the division of b by a.

Euclid's algorithm

This algorithm computes the *greatest common divisor* (notation: $(a, b) = \gcd(a, b)$) of two positive integers a, b.

It proceeds by replacing the pair a, b (say, with $a \leq b$) by r, a, where r is the remainder of the division of b by a. This procedure, which preserves the gcd, is repeated until we arrive at $r = 0$.

Example. Compute $\gcd(12, 44)$.

$$\begin{aligned} 44 &= 3 \cdot 12 + 8 \\ 12 &= 1 \cdot 8 + 4 \qquad \gcd(12, 44) = \gcd(8, 12) = \gcd(4, 8) = \gcd(0, 4) = 4. \\ 8 &= 2 \cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

This calculation allows us to write the fraction $\frac{44}{12}$ in its lowest terms, and also as a continued fraction:

$$\frac{44}{12} = \frac{44/4}{12/4} = \frac{11}{3} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}.$$

If $\gcd(a, b) = 1$, we say that a and b are *relatively prime*.

add additionner
algorithm algorithme
  Euclid's algorithm algorithme de division euclidienne
bracket parenthèse
  left bracket parenthèse à gauche
  right bracket parenthèse à droite
  curly bracket accolade
denominator denominateur

4

difference différence
divide diviser
divisibility divisibilité
divisor diviseur
exponent exposant
factorial factoriel
fraction fraction
    continued fraction fraction continue
gcd [= **greatest common divisor**] pgcd [= plus grand commun diviseur]
    lcm [= **least common multiple**] ppcm [= plus petit commun multiple]
infinity l'infini
iterate itérer
iteration itération
multiple multiple
multiply multiplier
number nombre
    even number nombre pair
    odd number nombre impair
numerator numerateur
pair couple
    pairwise deux à deux
power puissance
product produit
quotient quotient
ratio rapport; raison
rational rationnel(le)
    irrational irrationnel(le)
relatively prime premiers entre eux
remainder reste
root racine
sum somme
subtract soustraire

Algebra

Algebraic Expressions

$A = a^2$	capital a equals small a squared
$a = x + y$	a equals x plus y
$b = x - y$	b equals x minus y
$c = x \cdot y \cdot z$	c equals x times y times z
$c = xyz$	c equals x y z
$(x+y)z + xy$	x plus y in brackets times z plus x y
$x^2 + y^3 + z^5$	x squared plus y cubed plus z to the (power of) five
$x^n + y^n = z^n$	x to the n plus y to the n equals z to the n
$(x-y)^{3m}$	x minus y in brackets to the (power of) three m
	x minus y, all to the (power of) three m
$2^x 3^y$	two to the x times three to the y
$ax^2 + bx + c$	a x squared plus b x plus c
$\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$	the square root of x plus the cube root of y
$\sqrt[n]{x+y}$	the n-th root of x plus y
$\frac{a+b}{c-d}$	a plus b over c minus d
$\binom{n}{m}$	(the binomial coefficient) n over m

Indices

x_0	x zero; x nought
$x_1 + y_i$	x one plus y i
R_{ij}	(capital) R (subscript) i j; (capital) R lower i j
M_{ij}^k	(capital) M upper k lower i j;
	(capital) M superscript k subscript i j
$\sum_{i=0}^n a_i x^i$	sum of a i x to the i for i from nought [= zero] to n;
	sum over i (ranging) from zero to n of a i (times) x to the i
$\prod_{m=1}^{\infty} b_m$	product of b m for m from one to infinity;
	product over m (ranging) from one to infinity of b m
$\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$	sum of a i j times b j k for j from one to n;
	sum over j (ranging) from one to n of a i j times b j k
$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$	sum of n over i x to the i y to the n minus i for i
	from nought [= zero] to n

Matrices

column colonne
  column vector vecteur colonne
determinant déterminant
index (pl. indices) indice
matrix matrice
  matrix entry (pl. entries) coefficient d'une matrice
  $m \times n$ **matrix** [m **by** n **matrix**] matrice à m lignes et n colonnes
multi-index multiindice
row ligne
  row vector vecteur ligne
square carré
  square matrix matrice carrée

Inequalities

$x > y$	`x is greater than y`
$x \geq y$	`x is greater (than) or equal to y`
$x < y$	`x is smaller than y`
$x \leq y$	`x is smaller (than) or equal to y`
$x > 0$	`x is positive`
$x \geq 0$	`x is positive or zero; x is non-negative`
$x < 0$	`x is negative`
$x \leq 0$	`x is negative or zero`

The French terminology is different!

$x > y$	`x est strictement plus grand que y`
$x \geq y$	`x est supérieur ou égal à y`
$x < y$	`x est strictement plus petit que y`
$x \leq y$	`x est inférieur ou égal à y`
$x > 0$	`x est strictement positif`
$x \geq 0$	`x est positif ou nul`
$x < 0$	`x est strictement négatif`
$x \leq 0$	`x est négatif ou nul`

Polynomial equations

A polynomial equation of degree $n \geq 1$ with complex coefficients

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

has n complex solutions (= roots), provided that they are counted with multiplicities.

For example, a quadratic equation

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

can be solved by completing the square, *i.e.*, by rewriting the L.H.S. as

$$a(x + \text{constant})^2 + \text{ another constant.}$$

This leads to an equivalent equation

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

whose solutions are

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a},$$

where $\Delta = b^2 - 4ac$ $(= a^2(x_1 - x_2)^2)$ is the discriminant of the original equation. More precisely,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

If all coefficients a, b, c are real, then the sign of Δ plays a crucial rôle:

if $\Delta = 0$, then $x_1 = x_2$ $(= -b/2a)$ is a double root;
if $\Delta > 0$, then $x_1 \neq x_2$ are both real;
if $\Delta < 0$, then $x_1 = \overline{x_2}$ are complex conjugates of each other (and non-real).

coefficient coefficient
degree degré
discriminant discriminant
equation équation
L.H.S. [= left hand side] terme de gauche
R.H.S. [= right hand side] terme de droite
polynomial *adj.* polynomial(e)
polynomial *n.* polynôme
provided that à condition que
root racine
simple root racine simple
double root racine double
triple root racine triple
multiple root racine multiple
root of multiplicity m racine de multiplicité m

solution solution
solve résoudre

Congruences

Two integers a, b are *congruent* modulo a positive integer m if they have the same remainder when divided by m (equivalently, if their difference $a - b$ is a multiple of m).

$a \equiv b \pmod{m}$ `a is congruent to b modulo m`
$a \equiv b \ (m)$

Some people use the following, slightly horrible, notation: $a = b\,[m]$.

Fermat's Little Theorem. *If p is a prime number and a is an integer, then $a^p \equiv a \pmod{p}$. In other words, $a^p - a$ is always divisible by p.*

Chinese Remainder Theorem. *If $m_1, \dots, m_k$ are pairwise relatively prime integers, then the system of congruences*

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1} \qquad \cdots \qquad x \equiv a_k \pmod{m_k}$$

has a unique solution modulo $m_1 \cdots m_k$, for any integers $a_1, \dots, a_k$.

The definite article (and its absence)

measure theory	théorie de la mesure
number theory	théorie des nombres
Chapter one	le chapitre un
Equation (7)	l'équation (7)
Harnack's inequality	l'inégalité de Harnack
the Harnack inequality	
the Riemann hypothesis	l'hypothèse de Riemann
the Poincaré conjecture	la conjecture de Poincaré
Minkowski's theorem	le théorème de Minkowski
the Minkowski theorem	
the Dirac delta function	la fonction delta de Dirac
Dirac's delta function	
the delta function	la fonction delta

Mathematical arguments

Set theory

$x \in A$	**x is an element** of A; x lies in A; **x belongs** to A; x is in A
$x \notin A$	**x is not** an element of A; x does not lie in A; **x does not belong** to A; x is not in A
$x, y \in A$	**(both) x and y** are elements of A; ...lie in A; ...**belong** to A; ...are in A
$x, y \notin A$	**(neither)** x nor y is an element of A; ...lies in A; ...**belongs** to A; ...is in A
$\emptyset$	**the empty set** (= set with no elements)
$A = \emptyset$	A **is an empty** set
$A \neq \emptyset$	A is non-empty
$A \cup B$	**the union of** (the sets) A and B; A union B
$A \cap B$	**the intersection of** (the sets) A and B; A intersection B
$A \times B$	**the product of** (the sets) A and B; A times B
$A \cap B = \emptyset$	A **is disjoint from** B; the intersection of A and B is empty
$\{x \mid \ldots\}$	**the set of** all x such that ...
$\mathbf{C}$	**the set of** all complex numbers
$\mathbf{Q}$	**the set of** all rational numbers
$\mathbf{R}$	**the set of** all real numbers

$A \cup B$ contains those elements that belong to A or to B (or to both).
$A \cap B$ contains those elements that belong to both A and B.
$A \times B$ contains the ordered pairs (a, b), where a (resp., b) belongs to A (resp., to B).
$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ times}}$ contains all ordered n-tuples of elements of A.

belong to appartenir à
disjoint from disjoint de
element élément
empty vide
  non-empty non vide
intersection intersection
inverse l'inverse
  the inverse map to f l'application réciproque de f
  the inverse of f l'inverse de f
map application
  bijective map application bijective
  injective map application injective
  surjective map application surjective
pair couple

ordered pair couple ordonné
triple triplet
quadruple quadruplet
n-tuple n-uplet
relation relation
equivalence relation relation d'équivalence
set ensemble
finite set ensemble fini
infinite set ensemble infini
union réunion

Logic

$S \vee T$	`S or T`
$S \wedge T$	`S and T`
$S \Longrightarrow T$	`S implies T; if S then T`
$S \Longleftrightarrow T$	`S is equivalent to T; S iff T`
$\neg S$	`not S`
$\forall x \in A \ldots$	`for each [= for every] x in A ...`
$\exists x \in A \ldots$	`there exists [= there is] an x in A (such that) ...`
$\exists! x \in A \ldots$	`there exists [= there is] a unique x in A (such that) ...`
$\nexists x \in A \ldots$	`there is no x in A (such that)...`

$x > 0 \wedge y > 0 \Longrightarrow x + y > 0$	if both x and y are positive, so is $x+y$
$\nexists x \in \mathbf{Q} \quad x^2 = 2$	no rational number has a square equal to two
$\forall x \in \mathbf{R}\ \exists y \in \mathbf{Q} \quad \lvert x - y \rvert < 2/3$	for every real number x there exists a rational number y such that the absolute value of x minus y is smaller than two thirds

Exercise. Read out the following statements.

$$x \in A \cap B \iff (x \in A \wedge x \in B), \qquad x \in A \cup B \iff (x \in A \vee x \in B),$$
$$\forall x \in \mathbf{R} \quad x^2 \geq 0, \qquad \neg \exists x \in \mathbf{R} \quad x^2 < 0, \qquad \forall y \in \mathbf{C}\ \exists z \in \mathbf{C} \quad y = z^2.$$

Basic arguments

It follows from ... that ...
We deduce from ... that ...
Conversely, ... implies that ...
Equality (1) holds, by Proposition 2.
By definition, ...

16

The following statements are equivalent.

Thanks to ..., the properties ... and ... of ... are equivalent to each other.

... has the following properties.

Theorem 1 holds unconditionally.

This result is conditional on Axiom A.

... is an immediate consequence of Theorem 3.

Note that ... is well-defined, since ...

As ... satisfies ..., formula (1) can be simplified as follows.

We conclude (the argument) by combining inequalities (2) and (3).

(Let us) denote by X the set of all ...

Let X be the set of all ...

Recall that ..., by assumption.

It is enough to show that ...

We are reduced to proving that ...

The main idea is as follows.

We argue by contradiction. Assume that ... exists.

The formal argument proceeds in several steps.

Consider first the special case when ...

The assumptions ... and ... are independent (of each other), since ...

..., which proves the required claim.

We use induction on n to show that ...

On the other hand, ...

..., which means that ...

In other words, ...

argument argument
assume supposer
  assumption hypothèse
axiom axiome
case cas
  special case cas particulier
claim *v.* affirmer
  (the following) claim l'affirmation suivante; l'assertion suivante
concept notion
conclude conclure
  conclusion conclusion
condition condition
  a necessary and sufficient condition une condition nécessaire et suffisante
conjecture conjecture

consequence conséquence
consider considérer
contradict contredire
  contradiction contradiction
conversely réciproquement
corollary corollaire
deduce déduire
define définir
  well-defined bien défini(e)
  definition définition
equivalent équivalent(e)
establish établir
example exemple
exercise exercice
explain expliquer
  explanation explication
false faux, fausse
formal formel
hand main
  on one hand d'une part
  on the other hand d'autre part
iff [= if and only if] si et seulement si
imply impliquer, entraîner
induction on récurrence sur
lemma lemme
proof preuve; démonstration
property propriété
  satisfy property P satisfaire à la propriété P; vérifier la propriété P
proposition proposition
reasoning raisonnement
reduce to se ramener à
remark remarque(r)
required réquis(e)
result résultat
s.t. = such that
statement énoncé
t.f.a.e. = the following are equivalent
theorem théorème
true vrai
truth vérité
wlog = without loss of generality
word mot
  in other words autrement dit

ENTREPRENEURIAT

EXAMEN « ENTREPREUNARIAT » MATH INFO L3 (Décembre 2016)

Durée : 01 H 30 mn

1°/ Parmi les caractères suivants, citez (sans justification) ceux qui sont utiles à un Entrepreneur : *(3 pts)*

Etre aimable – Etre dégourdi – Etre manipulateur – Etre talentueux - Etre créatif – Etre solidaire – Etre éloquent - Etre sensible - Etre volontaire – Etre savant – Etre travailleur – Etre solidaire

2°/ Dites (sans justification) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

a) Tout chef d'entreprise est nécessairement un Entrepreneur. *(1 pt)*

b) On parle d'entrepreneuriat lorsqu'un salarié s'associe avec son patron pour créer une nouvelle entreprise. *(1 pt)*

c) La création d'une ONG à but humanitaire est un projet entrepreneurial. *(1 pt)*

d) Le « business model » d'un projet est son « business plan » *(1 pt)*

e) Si vous êtes issu d'une famille d'entrepreneurs, vous êtes certain de réussir dans les affaires. *(1 pt)*

3°/ Que désigne le terme «essaimage» dans le cadre de l'entreprenariat? Quels sont les avantages pour l'Essaimeur et pour l'Essaimé ? *(5 pts)*

4°/ Parmi les éléments ci-dessous, citez dans l'ordre les trois (3) qui constituent les étapes d'un projet entrepreneurial : *(3 pts)*

La mise en œuvre – la création – le financement – la rédaction – la réflexion – la prospection – l'élaboration

5°/ Ci-dessous un entretien entre M. TRAORE et son fils MAMADOU :

TRAORE : Mon fils, tu me dis que tu veux être un entrepreneur mais sais tu au moins ce que c'est ?
MAMADOU : Oui Papa, un entrepreneur c'est quelqu'un qui construit des maisons;
TRAORE : Que te faut-il pour réaliser ton rêve ?
MAMADOU : J'ai surtout besoin de beaucoup d'argent
TRAORE :Et qu'est ce qui te fait dire que tu vas réussir ?
MAMADOU : Ah Papa, comment tu peux en douter, j'ai fait des études de gestion et en plus je suis « un petit Dioula » donc j'ai les affaires dans le sang »

Déceler les erreurs (en les justifiant) dans les réponses de MAMADOU aux questions de son père. *(4 pts)*

EXAMEN « ENTREPREUNARIAT » M2 MATH-INFO (Novembre 2016)

Durée : 01 H 30 mn

1°/ Dites en justifiant votre réponse si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

a) La « débrouillardise » est un défaut chez un entrepreneur. *(2 pts)*

b) Tout chef d'entreprise est nécessairement un Entrepreneur. *(2 pts)*

c) Si vous n'êtes pas issu d'une famille d'entrepreneurs ce n'est pas la peine de penser à se lancer en affaires. *(2 pts)*

d) On parle d'intrapreneuriat lorsqu'un salarié s'associe avec son patron pour créer une novelle entreprise. *(2 pts)*

e) On ne peut parler d'entreprenariat que pour un projet à but lucratif. *(2 pts)*

2°/ Qu'est qu'un business plan ? *(2 pts)*

3°/ Que désigne le terme «essaimage» dans le cadre de l'entreprenariat? Quels sont les avantages pour le salarié et pour l'entreprise source ? *(4 pts)*

4°/ Un de vos amis, M. KOUADIO qui finit ses études l'année prochaine, vous parle de ses projets en ces termes :

« Moi KOUADIO, je ne crains pas pour mon avenir pour les raisons suivantes :

- *Mon père va me donner une importante somme d'argent dès que je finis mes études pour créer ma propre entreprise*
- *Etant issue d'une famille de commerçants donc j'ai le sens des affaires.*
- *Je ne sais pas encore dans quel secteur je vais me lancer mais ce n'est pas un problème car j'ai fait des études de gestion »*

Donner des conseils à M. KOUADIO en atténuant son optimisme. *(4 pts)*

ANALYSE DES DONNEES

Année universitaire 2015-2016
UFHB/UFRMI : Licence 3
Travaux dirigés : Analyse de la variance

Exercice 1 : Nous voulons tester quatre types de carburateurs : A_1, A_2, A_3 et A_4. Pour chaque type de carburateur nous disposons de six pièces qui sont montées successivement en parallèle sur quatre voitures que nous supposons avoir des caractéristiques parfaitement identiques. Le tableau ci-dessous indique pour chacun des essais la valeur d'un paramètre lié à la consommation :

Essai	A_1	A_2	A_3	A_4
1	21	23	18	20
2	24	23	19	21
3	25	32	28	25
4	20	23	19	15
5	34	32	24	29
6	17	15	14	9

1. Dans cette partie nous ne tenons pas compte de la possible influence de l'ordre dans lequel les essais ont été effectués.
   (a) Proposer une méthode statistique permettant d'étudier l'influence des modalités du facteur Carburateur sur la Consommation. Énoncer le modèle et les hypothèses nécessaires au modèle que vous projetez d'utiliser. Ce modèle comporte-t-il des répétitions ?
   (b) Il y a-t-il des différences entre les Carburateur ? Quelles sont les estimations des coefficients du modèle ? Si nécessaire, comparer les différents niveaux du facteur Carburateur.
2. Après avoir effectué l'analyse de la première partie nous apprenons que tous les essais numéro 1 ont été réalisés un lundi, tous les essais numéro 2 un mardi…, tous les essais numéro 6 un samedi. Nous décidons donc dans cette partie de tenir compte de la possible influence de l'ordre de réalisation des essais, c'est-à-dire du facteur Essai.
   (a) Proposer une méthode statistique permettant d'étudier conjointement l'influence du facteur Carburateur et du facteur Essai sur la consommation. Énoncer le modèle et les hypothèses nécessaires au modèle que vous projetez d'utiliser. Ce modèle comporte-t-il des répétitions ?

(b) Il y a-t-il des différences entre les carburateurs ? Il y a-t-il des différences dues à l'ordre de réalisation des essais ? Quelles sont les estimations des paramètres du modèle ? Si nécessaire, comparer les différents niveaux du facteur Carburateur ainsi que les différents niveaux du facteur Essai.

Exercice 2 : Nous testons l'influence de différents régimes alimentaires sur des rats de laboratoire. Le gain de poids des rats est désigné par la variable Poids, exprimée en grammes, les deux facteurs sont les variables Calorie et Vitamine. La variable Calorie vaut 1 si les rats n'ont pas suivi un régime hypercalorique et 2 s'ils ont suivi un tel régime hypercalorique. La variable Vitamine vaut 1 si les rats n'ont pas reçu de compléments vitaminés et 2 s'ils ont reçu de tels compléments.

Calorie	Vitamine	Poids	Calorie	Vitamine	Poids
1	1	84	1	1	66
1	2	62	1	2	59
2	1	87	2	1	89
2	2	103	2	2	90
1	1	66	1	1	56
1	2	84	1	2	74
2	1	92	2	1	101
2	2	107	2	2	116
1	1	82	1	1	79
1	2	73	1	2	74
2	1	77	2	1	95
2	2	95	2	2	112
1	1	62	1	1	89
1	2	75	1	2	74
2	1	88	2	1	91
2	2	96	2	2	92

1. Quels modèles d'analyse de la variance à deux facteurs pouvez-vous utiliser pour étudier ces données ? Nous décidons de retenir, pour répondre aux questions suivantes, le modèle le plus complet parmi ceux dont il est possible de se servir. Rappeler les hypothèses associées au modèle.
2. Procéder à l'étude à l'aide du logiciel R.
3. Quelles sont les estimations des paramètres du modèle ?
4. Devons-nous réaliser des tests de comparaisons multiples ? Si oui, pour quel(s) facteur(s) ? Le(s) faire.

2

Exercice 3 : Les 21 candidats à un oral ont été répartis au hasard entre 3 examinateurs. Le premier examinateur a fait passer l'oral à 6 étudiants, le second à 8 étudiants et le troisième à 7 étudiants. Les notes qu'ils ont eues sont :

Examinateur	Kouko	Koffi	Adou
	10,11,11,12,13,16	8,11,11,13,14,15,16,16	10,13,14,14,15,16,16

La variation des moyennes est-elle due au hasard ou est-elle un réel "effet d'examinateur" ?

Exercice 4 : Le tableau suivant présente les salaires annuels bruts d'individus au bout de cinq ans d'expériences selon leur niveau de formation initiale. Qu'en pensez-vous ?

Licence	Master	Doctorat
39.9	39.7	25.6
32.5	32.6	48.2
36	25.7	47.3
28.1	35.4	29.3
22.4	29.1	35.6
23.5	40.3	26.4
24.6	27.6	28.8
21.5	22.1	47.5
24.2	28.9	35.8
23.7	31.6	42.6
30.7	32.6	45

Exercice 5 : On a vu comment comparer les populations d'un même facteur. Supposons maintenant qu'un expérimentateur souhaite comparer l'influence de trois régimes alimentaires et de deux exploitations sur la production laitière. Les résultats expérimentaux sont dans le tableau suivant. Qu'en pensez-vous ?

Exploitation ↓ Régime alimentaire ⟶	A	B	C
1	7	36	2
2	13	44	18

UFR de Mathématiques et Informatique
Année 2015-2016
Licence Mathématiques et Applications
Examen d'Analyse des données (3h)
(Fascicules autorisés)

Question de cours :

1. Donner les différents types de classification automatique et leur principe.
2. Quelles sont les éléments d'entrée d'une analyse en composantes principales ?

Exercice 1 : On observe $p = 2$ variables sur $n = 5$ individus uniformément pondérés.

x_1	x_2
3	-2
3	2
0	-1
4	-3
0	-1

1. Calculez la matrice S de covariance.
2. Diagonalisez la matrice S.
3. Calculez la matrice C des composantes principales.

Exercice 2 : On donne la répartition des étudiants de la licence de mathématiques de l'Université de Gondouana City selon leur sexe et leur niveau d'études.

	L1	L2	L3
Masculin	500	300	200
Féminin	100	50	25

1. Calculer les matrices profils-lignes et profils-colonnes.
2. Donner le Khi-deux d'écart à l'indépendance.

Exercice 3 : On fait une analyse en composantes principales d'un tableau de 9 individus, mesurés sur 4 variables v1, v2, v3 et v4. On suppose que tous les individus ont le même poids. On a

Var(v1) = 12,8125 Var(v2) = 10,0625 Var(v2) = 13,5694 et Var(v4) = 8,9028 ;

les valeurs propres de la matrice de covariance:

15,9410 ; 10,4055 ; 0,5493 ; . ;

Les vecteurs propres

	[vp1]	[vp2]	[vp3]	[vp4]
[1,]	0.5151694	0.5686517	-0.1852853	-0.6139259
[2,]	0.5076129	0.3712665	0.4499844	0.6340381
[3,]	0.4922789	-0.6581534	0.4603842	-0.3354728
[4,]	0.4843461	-0.3250085	-0.7424485	0.3294671 ;

On donne les composantes principales

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]
jean	-8.612059	1.4093727	-0.06752404	0.07158969
alai	-3.878793	0.5022279	-0.01309446	-0.07093634
anni	-3.213388	-3.4683149	0.17497150	0.01065973
moni	9.851807	-0.5995132	-0.03680819	-0.14998275
didi	6.406574	2.0465857	0.07561885	0.19044801
andr	-3.033102	4.9211080	-0.07749344	-0.13542301
pier	-1.025444	-6.3771179	0.16386970	-0.02986136
brig	1.953971	4.1995965	0.20192835	0.03907002
evel	1.550436	-2.6339447	-0.42146828	0.07443601

1. Calculer l'inertie totale
2. Donner les matrices M et D
3. Donner la matrice à diagonaliser
4. Donner la qualité de représentation de Alai sur le plan (1,2)
5. Donner la qualité globale de représentation des individus sur le plan (1,2)
6. Représenter les individus sur le plan (1,2)
7. Représenter les variables
8. Indiquer les variances des deux premières composantes
9. Calculer la contribution de jean à l'inertie du nuage projeté (plan (1,2)).
10. Donner la valeur des variables v1 et v3 pour Pier.

UFR de Mathématiques et Informatique
Année 2015-2016
Licence Mathématiques et Applications
Examen d'Analyse des données (2h30)
(Fascicules autorisés)

Question de cours :

1. Donner les différents types de classification automatique et leur principe.
2. Quelles sont les éléments d'entrée d'une analyse en composantes principales ?

Exercice 1 : On observe p =2 variables sur n =5 individus uniformément pondérés.

X1	X2
3	-2
3	2
0	-1
4	-3
0	-1

1. Calculez la matrice S de covariance.
2. Diagonalisez la matrice S.
3. Calculez la matrice C des composantes principales.
4. Donner les corrélations entre les composantes principales et les anciennes variables.
5. Donner la qualité de représentation de l'individu n°1 sur le premier axe.
6. Donner la contribution de l'individu n°2 à la formation du deuxième axe.
7. Donner la qualité globale du premier axe.

Exercice 2 : On donne la répartition des étudiants de la licence de mathématiques de l'Université de Gonduana City selon leur sexe et leur niveau d'études.

	L1	L2	L3
Masculin	500	300	200
Féminin	100	50	25

1. Calculer les matrices profils-lignes et profils-colonnes.
2. Donner le Khi-deux d'écart à l'indépendance.

Exercice 3 : On fait une analyse en composantes principales d'un tableau de 9 individus, mesurés sur 4 variables v1, v2, v3 et v4. On suppose que tous les individus ont le même poids. On a

Var(v1) = 12,8125 Var(v2) = 10,0625 Var(v3) = 13,5694 et Var(v4) = 8,9028 ;

les valeurs propres de la matrice de covariance:

15,9410 ; 10,4055 ; 0,5493 ; .. ;

Les vecteurs propres

	[vp1]	[vp2]	[vp3]	[vp4]
[1,]	0.5151694	0.5686517	-0.1852853	-0.6139259
[2,]	0.5076129	0.3712665	0.4499844	0.6340381
[3,]	0.4922789	-0.6581534	0.4603842	-0.3354728
[4,]	0.4843461	-0.3250085	-0.7424485	0.3294671 ;

On donne les composantes principales

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]
jean	-8.612059	1.4093727	-0.06752404	0.07158969
alai	-3.878793	0.5022279	-0.01309446	-0.07093634
anni	-3.213388	-3.4683149	0.17497150	0.01065973
moni	9.851807	-0.5995132	-0.03680819	-0.14998275
didi	6.406574	2.0465857	0.07561885	0.19044801
andr	-3.033102	4.9211080	-0.07749344	-0.13542301
pier	-1.025444	-6.3771179	0.16386970	-0.02986136
brig	1.953971	4.1995965	0.20192835	0.03907002
evel	1.550436	-2.6339447	-0.42146828	0.07443601

1. Calculer l'inertie totale
2. Donner les matrices M et D
3. Donner la matrice à diagonaliser
4. Donner la qualité de représentation de Alai sur le plan (1,2)
5. Donner la qualité globale de représentation des individus sur le plan (1,2)
6. Représenter les individus sur le plan (1,2)
7. Représenter les variables

TD Analyse des données   Prof MONSAN VINCENT

ACP normé c'est quand on divise les observations par les ecarts types. revient à prendre comme metrique $i \leq \frac{\partial x_j}{\partial x}$ D_{1/s^2}

1- C'est normé
La somme des valeurs propres proche (inertie totale) // trace de la matrice de corrélation

2- Quel est le pourcentage expliqué par le plan principal ?

3- Coordonnée de Kouao selon le premier axe

$$C_e = Y M a_e$$

$$\begin{pmatrix} \frac{172 - 169,80}{5,31} \\ \frac{75 - 66,90}{5,15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,56 \\ 0,58 \\ 0,59 \end{pmatrix}$$

contribution de Koffi selon le deuxième axe i (axe 2. prim2

$$ctr^2_{Koffi} = \frac{0,1(-0,82)^2}{0,61}$$

qualité de représentation de api selon troisième axe

$$qual^3_{Api} = \frac{(C^3_{api})^2}{(C^1_{api})^2 + (C^2_{api})^2 + (C^3_{api})^2}$$

C^i_{api} la coordonnée de api selon l'axe i

4) Representation des individus sur le plan principale
le plan principal est celui contient (engendré) de 2 (premiers) axes.

5)

−	+
atsé (−2,94)	Konan (1,80)
Ahoue (−1,16)	yao (1,19)

Les âges ont.

AFC : permet de voir la liaison entre 2 variables qualitatives

ACP : indice des données, le poids, d'une metrique

ACM : Decription de liaison entre plusieurs variables qualitatives

Faire une partition de l'ensemble de sorte que les elements de chaque partition s'ouvente le plus proche possible.

* methode non hiérarchiques

une partition sera meilleur si l'inertie intra est faible.

− si chaque individu forme une classe l'inertie intra sera donc égale à zéro qu

La meilleure partition

*methode hiérachique = methode de partitionnement

Questions de de cours :

→ Methode des centres mobiles.

Faire une partition de 3 classes

on cherche les centres de gravités de ces 3 groupes les methodes hiérachiques sont très rapides car le nombr d'itération est peu nombreux.

La classification hiérachique $d(a,b,c) = \min(d(a,c), d(b,c))$

$d(a-b,c) = \inf(d(a,c), d(b,c$

$d(a,b),c) = \sup(d(a,c), d(b,c$

calculer la distance entre 2 groupes

* methode d'agrégation

les methodes mixtes qui est la combinaison des 2 techniques (des 2 methodes)

classification automatique
classification non supervisée

x_1	x_2
3	-2
3	2
0	-1
4	-3
0	-1

mean : 2 −0,6

$\frac{1}{n} Y^t Y$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3-2 & 3-2 & 0-2 & 4-2 & 0-2 \\ -2+0{,}6 & 2+0{,}6 & -1+0{,}6 & 0+0{,}6 & -1+0{,}6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1{,}4 \\ 1 & 2{,}6 \\ -2 & -0{,}4 \\ 2 & -0{,}6 \\ -2 & -0{,}4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 14 & -8 \\ -8 & 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}8 & \\ & 2{,}8 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ -1{,}4 & 2{,}6 & -0{,}4 & -0{,}6 & -0{,}4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1{,}4 \\ 1 & 2{,}6 \\ -2 & -0{,}4 \\ 2 & -0{,}6 \\ -2 & -0{,}4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\Big($$

PROBABILITE AVANCEE

Université F. H. B
UFR-MI: Licence 3

Année universitaire 2015-2016

PROBABILITES AVANCEES
Fiche 2 : Indépendance stochastique, Vecteurs gaussiens

Exercice 1

On considère une variable aléatoire (X, Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ admet la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) := \alpha(1-x^2)I_{[0,1]}(x)ye^{-3y}I_{]0,+\infty[}(y),$$

où α est un reél.
1. Déterminer la valeur du reél α.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y).
3. Calculer $\mathbb{P}(0 < X \leq 2, Y \geq 1)$.
4. Calculer la matrice de dispersion D de (X, Y).

Exercice 2

Soient n et m deux entiers naturels non nuls, X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que la variable X est binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$ et Y est une binomiale de paramètres $(m, \frac{1}{2})$. Calculer la probabilité que $X = Y$.

Exercice 3

On considère $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite indépendante de v.a.r. de même loi de Bernouilli $B(p)$ $(0 < p < 1)$ définie sur un même espace de probabilit e $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit un entier $r \geq 1$, on définit les nouvelles v.a.r. en posant pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} T(\omega) &:= \inf\{n \in \mathbb{N}^*/X_n(\omega) = 1\} \\ \tau_r(\omega) &:= \inf\{n \in \mathbb{N}^*/X_1(\omega) + X_2(\omega) + ... + X_n(\omega) = r\} \\ \theta_r(\omega) &:= \inf\{n \in \mathbb{N}^*/X_1(\omega) + X_2(\omega) + ... + X_{n+r}(\omega) = r\} \end{aligned}$$

avec la notation $\inf(\emptyset) := +\infty$.
1. Montrer que T est une v.a à valeurs dans $\bar{\mathbb{N}}^*$. Déterminer sa loi et calculer son espérance.
2. Montrer, pour tout $x \in]0, 1[$, la relation

$$\sum_{k=r-1}^{+\infty} C_k^{r-1} x^{k-r+1} = \frac{1}{(1-x)^r}.$$

1

3. Montrer que la v.a.τ_r est une v.a. réelle discrète de loi (dite loi de Pascal de paramètres r, p)

$$\mathcal{P}(r,p) := \sum_{k=r}^{+\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \delta_k .$$

Vérifier que $\mathbb{P}(\tau_r = +\infty) = 0$.

4. Montrer que la v.a.θ_r est une v.a. réelle discrète de loi (dite loi de Binomiale négative de paramètres r, p)

$$\mathcal{I}(r,p) := \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^k \delta_k$$

Vérifier que $\mathbb{P}(\theta_r = +\infty) = 0$.

Exercice 4

On choisit au hasard une corde sur un cercle de rayon r et de centre O. On désire calculer la probabilité p pour qu'elle soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit (de longueur $\sqrt{3}r$). Ceci est équivalent à calculer la probabilité pour que la distance de la corde, choisie au hasard, au centre du cercle soit inférieure à $\frac{r}{2}$.

On considère que la longueur de la corde est déterminée par la donnée de la distance H de son milieu au centre du cercle. On suppose que H suit une loi uniforme sur $[0;r]$.

1) Quelle est la loi de la longueur de la corde ?

2) Quelle est son espérance et sa variance ?

3) Quelle est la probabilité qu'elle soit plus grande que $\sqrt{3}r$?

Exercice 5

Soient X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et ε une variable aléatoire réelle indépendante de X de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$.

1. Montrer que la variable $Y := \varepsilon X$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

2. Prouver que les v.a.r. X, Y vérifient la relation $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ mais le couple (X, Y) n'est pas indépendant.

Exercice 6

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \left(\alpha e^{-\frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2)}\right)$.

1. Déterminer la constante α et la matrice de dispersion du couple (X, Y).

2. Préciser les lois respectives des varaibles aléatoires réelles X et Y.

3. Le couple de variables aléatoires réelles (X, Y) est-il indépendant.

Exercice 7

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
1. Déterminer les lois respectives des variables aléatoires réelles $U := X + Y + Z$, $V := 2X - Y - Z$ et $W := Y - Z$.
2. Montrer que les variables aléatoires réelles $X - Y, Y - Z$ et $Z - X$ sont chacunes indépendantes de la v.a.r.U.
3. Le vecteur aléatoire de dimension 3, (U, V, W), est-il gaussien.Préciser sa loi.
4. Le triplet de v.a.r.(U, V, W) est-il indépendant.
5. On note φ la fonction caractéristique de X^2. On admettra que, pour tout réel x, $\varphi(x0 = (1-2ix)^{-\frac{1}{2}}$. On pose $T := (X-Y)^2 + (Y-Z)^2 + (Z-X)^2$.
(*i*) Vérfier, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, l'égalité

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 2\left(x - \frac{1}{2}(x+y)\right)^2 + \frac{3}{2}(y-z)^2$$

(*ii*) Exprimer la fonction caractéristique $\Phi_{(U,T)}$ du vecteur aléatoire (U, T) à l'aide de φ.
(*iii*) En déduire l'expression de $\Phi_{(U,T)}(u, t)$ en fonction de u et t.

Université F. H. B
UFR-MI: Licence 3

Année universitaire 2015-2016

PROBABILITES AVANCEES
Fiche 3 : Fonctions caractéristiques, Convergences

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, ..., X_n)$ une suite indépendante de v.a.r. toute de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On définit respectivement les v.a.r. moyenne empirique et varianc eempirique par

$$\bar{X}_n := \frac{X_1 + ... + X_n}{n} \quad \text{et} \quad S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X})^2$$

$\gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$

1. Montrer que la v,a.r. X_1^2 suit la loi $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ appélée aussi loi du Khi-deux à 1 dégré de liberté $\chi^2(1)$.
2. En utilisant la fonction caratéristique des lois Gamma, déduire que la loi de la v.a.r. $\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ est $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ appélée aussi loi du Khi-deux à n dégré de liberté $\chi^2(n)$.
3. Montrer que $S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}_n^2$.
4. En utilisant la loi forte des grands nombre, étudier les convergences presque-sure des suites $\bar{X}_n$ et S_n^2.

Exercice 2

Soit $(X_n; n2 \in \mathbb{N}^*)$ une suite de v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
1.Montrer que la moyenne empirique $\bar{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge dans L^2 vers la moyenne $\frac{1}{\lambda}$.

2. On pose $Y_n := \sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right)$. Montrer que Y_n converge en loi vers une gaussienne dont on déterminera ses paramétres.

Exercice 3

On considère $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0;\theta]$, où $\theta > 0$. On pose pour $n \geq 1$, $X_n := \max_{1\leq i\leq n} U_i$.
1. Montrer que $(X_n, \ n \geq 1)$ converge p.s. et déterminer sa limite. On pourra calculer $\mathbb{P}(|Xn - \theta| > \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.
2. Etudier la convergence en loi de la suite $(n(\theta - X_n), n > 1)$.

Exercice 4

1. En considérant une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur [0, 1]. Calculer à l'aide de la loi faible des grands nombres

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)dx_1dx_2\ldots dx_n$$

où f est une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $(Y_k,\ k\geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha>0$. Déterminer la loi de $Z_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

3. Montrer que la suite des moyennes empiriques $(\bar{Y}_n = \frac{Z_n}{n},\ n\geq 1)$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera. Calculer (en s'inspirant de la question 1),

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k\geq 0} e^{-\alpha n}\frac{(\alpha n)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $\alpha>0$ et f est une application continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2

2013-2014

UFHB
L3

Probabilités Avancées

Session 2

Par Pr. M. N'ZI

Durée: 2 heures

Exercice 1. (4 points) Soient X et Y deux v.a.r. qui suivent une loi normale.
1) Leur somme $Z = X + Y$ suit-elle nécessairement une loi normale ?
2) En supposant en plus $Cov(X,Y) = 0$, Z suit-elle une loi normale ?
3) Le vecteur $V = (X,Y)$ est-il nécessairement gaussien ?
N.B. Justifier vos réponses

Exercice 2. (6 points) Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Soit de plus (U,V) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi uniforme sur la surface $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}_+^2 : u^{1/\alpha} + v^{1/\beta} \leq 1\}$ i.e.

$$f_{(U,V)}(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{S} & \text{si} \quad (u,v) \in D \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où S désigne l'aire de D. Déterminer la loi de

$$X = \frac{U^{1/\alpha}}{U^{1\alpha} + V^{1/\beta}}.$$

Exercice 3. (6 points) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi symétrique. On suppose que pour tous a et b réels, strictement positifs, la variable aléatoire $aX + bY$ et la variable aléatoire $(a+b)X$ ont la même loi.

1) Déterminer la fonction caractéristique φ de X.

2) Montrer que X admet une densité que l'on calculera.

Exercice 4.(4 points) n personnes sont réparties au hasard le long d'une route de L km. Les positions de celles-ci sont des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme.

1) Pour $n = 2$, déterminer la probabilité que les deux personnes ne soient pas à une distance inférieure à D km.

2) Pour $n = 3$, Déterminer la probabilité de ne jamais rencontrer deux personnes situées à une distance inférieure à D km.

3) Pour n quelconque, reprendre la question 2).

BON COURAGE

UFHB **2013-2014**
M1

Probabilités avancées
par Pr. M. N'ZI
Durée: 2heures

N.B. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1. (8 Points) Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien, centré de matrice de dispersion

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1. & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver la loi de $U = X + 2Y - Z$.

2) Trouver la loi de $Y^2/2 + Z^2/3$.

3) Donner la densité du vecteur aléatoire $(X + Y, Y - Z)$.

Exercice 2. (12 Points) On réalise une expérience composée d'épreuves indépendantes de Bernoulli. La probabilité de succès est p, d'échec $q = 1 - p$.

a) Quelle est la probabilité qu'une chaîne de n succès consécutifs ait lieu avant que n'apparaîsse une chaîne de m échecs?Indications: On pose $E =$<<une chaîne de n succès consécutifs a lieu avant que n'apparaîsse une chaîne de m échecs>>, $H =$<<la première épreuve livre succès>>, $F =$<<les épreuves 2 à n sont toutes des succès>> et $G =$<<les épreuves 2 à m sont toutes des échecs>>.

1) Trouver une relation entre $\mathbb{P}(E)$, $\mathbb{P}(E|H)$ et $\mathbb{P}(E|\overline{H})$.

2) Trouver une relation entre $\mathbb{P}(E|H)$, $\mathbb{P}(F|H)$, $\mathbb{P}(\overline{F}|H)$, $\mathbb{P}(E|F \cap H)$, et $\mathbb{P}(E|\overline{F} \cap H)$

3) Trouver une relation entre $\mathbb{P}(E|\overline{H})$, $\mathbb{P}(G|\overline{H})$, $\mathbb{P}(\overline{G}|\overline{H})$, $\mathbb{P}(E|\overline{G} \cap \overline{H})$, et $\mathbb{P}(E|G \cap \overline{H})$

4) Montrer que $\mathbb{P}(E|H) = p^{n-1} + (1 - p^{n-1})\mathbb{P}(E|\overline{H})$ et $\mathbb{P}(E|\overline{H}) = (1 - q^{m-1})\mathbb{P}(E|H)$

5) En déduire $\mathbb{P}(E)$

b) Quelle est la probabilité qu'une chaîne de m échecs consécutifs ait lieu avant que n'apparaîsse une chaîne de n succès?

BON COURAGE

UFR/MATHS-INFO
Niveau: Licence 3

Année Académique 2014-2015
16 décembre 2015

Examen de Probabilités Avancées
Session 1
Durée 2h 30

Exercice 1 (4 points)

On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche. On joue à pile ou face indéfiniment avec une pièce parfaite. A chaque fois qu'on obtient face on ajoute une boule noire au contenu de l'urne. La première fois qu'on tombe sur pile on tire une boule de l'urne. Si on obtient jamais pile on se fait donner une boule blanche.

(1) Déterminer la probabilité de ne jamais avoir pile.

(2) Déterminer la probabilité d'avoir une boule blanche.

Exercice 2 (5 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles défines sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ de loi uniforme sur $[0,1]$ et indépendantes. on pose $Z = X^2 + Y^2$ si $X^2 + Y^2 \leq 1$ et $Z = 0$ si $X^2 + Y^2 > 1$.

(1) Montrer que pour toute fonction borélienne positive on a

$$\mathbb{E}(f(Z)) = \frac{\pi}{4}\int_0^1 f(r)dr + (1 - \frac{\pi}{4})f(0)$$

(2) On note μ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0.

a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(r)dr = f(0)$

b) Déduire la loi de Z

Exercice 3 (5 points) On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On perd un point si on ontient un chiffre strictement inférieur à 3, on gagne un point si on obtient 6, sinon on a rien. Soit X la v.a représentant le chiffre obtenu et Y la v.a donnant le gain. On pose $\mathcal{F} = \sigma(\{2,4,6\})$ et $\mathcal{H} = \sigma(\{1\},\{1,2\})$.

Calculer $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ et $\mathbb{E}(X|Y)$.

Exercice 4 (6 points) Soit (X,Y,Z) un vecteur gaussien, centré de matrice de dispersion

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1): Trouver la loi de $U = X + 2Y - Z$.

2): Trouver la loi de $Y^2/2 + Z^2/3$.

3): Donner la densité du vecteur aléatoire $(X+Y, Y-Z)$.

Université Nangui Abrogoua — 2015-2016
MASTER 1

ECUE: Compléments de Probabilités

Examen (session 2)

Durée: 2 heures

Par Pr. M. N'ZI

Exercice 1. L'Un animal d'expérience dispose de n chemins indépendants $C_1, C_2, \ldots, C_n$ pour atteindre une friandise. Il doit effectuer n tentatives.

Chaque chemin C_j, à chaque tentative, a une probabilité p_j d'être ouvert, indépendamment des autres tentatives. Les récompenses sont renouvelées après chaque tentative.

A) L'animal choisit un chemin au hasard (loi uniforme), puis essaie d'effectuer ses n parcours par ce même chemin (marquage avec renforcement).

a) Décrire l'espace de probabilité représentant cette expérience.

b) On pose $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les n variables aléatoires définies par:

$$X_j = 1 \quad \text{si la } j^{ème} \text{ tentative est réussie}$$
$$X_j = 0 \quad \text{sinon.}$$

1) Déterminer les lois des X_j.

2) Déterminer les lois des couples (X_i, X_j), $\quad 1 \leq i < j \leq n$. Les X_j sont-elles indépendantes?

3) On pose

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Calculer $\mathbb{P}(S_n \geq 1)$, $\mathbb{E}(S_n)$ et $Var(S_n)$.

B) L'animal, à chaque tentative, choisit un chemin différent (marquage exclusif); Répondre aux mêmes questions qu'en A).

C) L'animal choisit, à chaque tentative, un chemin indépendamment de ce qui a précédé (absence de marquage). Répondre aux mêmes questions qu'en A).

Exercice 2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi uniforme sur le disque unité.

1) Quelles sont les lois de X et Y?

2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

3) Calculer la covariance de X et Y. Conclure.

4) Déterminer la loi de $Z = \dfrac{X}{Y}$

BON COURAGE

UFHB-UFRMI
Niveau: L3

Année Académique
2015/2016

Examen de Probabilités avancées
Session 1

Exercice 1 (8 points)

Trois personnes A; B; et C jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée, de la façon suivante : A et B jouent en premier et le gagnant, par exemple A, rencontre C. Si A gagne également cette seconde partie, il est déclaré vaniqueur. Sinon C rencontre B, s'il gagne, C est déclaré vainqueur, sinon B rencontre à nouveau A, ... C'est-à-dire qu'à chaque fois le gagnant d'une partie rencontre le perdant de la partie précédente, et il faut gagner deux parties consécutives pour être déclaré vainqueur. On cherche la probabilité de gain de chacun des trois joueurs.

On considère les événements ci-dessous:

$V_k(A)$ désigne l'événement:" *A sort vainqueur du jeu à la $k^{ème}$ partie* "

$V(A)$ est l'événement :" *A sort vainqueur du jeu.*"

On définit de même $V_k(B), V_k(C), V(B), V(C)$.

1) Calculer $\mathbb{P}(V_k(A))$ en fonction de k
2) Exprimer $V(A)$ en fonction des $V_k(A)$
3) Déduire $\mathbb{P}(V(A))$
4) Calculer $\mathbb{P}(V(B))$
5) Calculer $\mathbb{P}(V(C))$ en suivant la même procédure que dans les questions 1), 2) et 3).
6) Est-ce qu'on peut jouer indéfiniment?

Exercice 2 (6 points)

Soient X une variable aléatoire réelle (v.a.r.) de loi gaussienne centrée réduite et Z une v.a.r., indépendante de X, uniformément distribuéee sur $\{-1, 1\}$.

1) Vérifier que ZX est gaussienne
2) En considérant la somme $X + ZX$, montrer que le couple (X, ZX) n'est pas gaussion.
3) Montrer que X et ZX ne sont pas indépendantes

Exercice 3 (6 points) Trois personnes A, B, et C arrivent à la poste en même temps pour téléphoner. Il y a deux cabines téléphoniques qu'occupent immédiatement A et B; C remplace le premier sorti. A, B, et C quittent chacun la poste immédiatement après avoir téléphoné. On suppose que les temps d'occupation de la cabine par A, B et C sont des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre α.

On note X_A le temps d'occupation de la cabine par la personne A. On définit de même X_B et X_C.

1) Exprimer l'événement $D(A)$: " *A sort le dernier*" en fonction de X_A, X_B et X_C. Calculer la probabilité que A sorte le dernier.

2) Calculer la probabilité que C sorte le dernier après avoir exprimé l'événement "C sort le dernier" en fonction de X_A, X_B et X_C.

3) Exprimer le temps total T passé par C dans la poste en fonction de X_A, X_B et X_C. Donner la loi de probabilité T .

4) Donner la probabilité de l'instant du dernier départ, l'instant 0 étant l'arrivée des trois personnes à la poste.

UFHB-UFRMI
Niveau: L3

Année Académique
2015/2016

Examen de Probabilités avancées
Session 2

Exercice 1 (**7 points**) Soit X une variable aléatoire réelle et F sa fonction de répartition c'est à dire pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

1) Montrer que F est continue à droite.
   On suppose maintenant que X est absolument continue et on considère la variable aléatoire $Y = F(X)$.
2) Que signifie cette hypothèse?
3) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.
4) Soit $y \in]0,1[$. On pose $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, F(x) \leq y\}$.
   a) Montrer que A est non vide. (Utiliser le fait que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.)
   b) Montrer que A est majorée. (Utiliser le fait que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$). Dites pourquoi A admet une borne supérieure que l'on note u. Calculer $F(u)$.
   c) Montrer que $\mathbb{P}(Y \leq y) = y$. En déduire la loi de Y.

Exercice 2 (**8 points**) On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n jetons ($n \geq 2$) numérotés de 1 à n et on y prend une poignée (ensemble) aléatoire de jetons. Cette poignée peut être vide. On note N (qui est aléatoire!) le nombre de jetons de la poignée et S la somme (aussi aléatoire!!) des chiffres sur les jetons de la poignée obtenue. (S la poignée est vide, i.e. $N = 0$, on convient que S prend la valeur 0).

1) On suppose dans cette question que toutes les poignées possibles sont équiprobables.
   a) Trouver la loide N et son espérance.
   b) Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le jeton numéro i appartient à la poignée obtenue et 0 sinon. Déterminer le paramètre de la variable aléatoire de Bernoulli X_i.
   c) Montrer que $S = \sum_{i=1}^{n} i \cdot X_i$. En déduire $\mathbb{E}(S)$.
   d) Montrer que les variables aléatoires X_i sont deux à deux indépendantes et en déduire la variance de S.
2) On suppose dans cette question que N suit la loi uniforme sur $\{0, \cdots, n\}$ (c'est à dire que, dans cette question ce sont les tailles des poignées qui sont équiprobables).
   a) Quelle est l'espérance de N?
   b) Avec les notations de 1), calculer pour $k \in \{0, \cdots, n\}$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X_i = 1 | N = k)$ et en déduire le paramètre de la variables aléatoire X_i.
   c) Calculer l'espérance de S.
   d) Les variables aléatoires X_i sont-elles encore indépendantes? Que vaut $cov(X_i, X_j)$?
3) On suppose $n = 3$, déterminer la loi de S dans le premier et dans le second cas.

UFHB 2015/2016

Exercice 3 (5 points) Déterminer sans utiliser la fonction caractéristique, la loi de $X+Y$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$.

TD Probabilité Avancée

Prof ELOUHAFLIN
Dr OWO
22/11/2016

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & \text{si } -e \leq x < -1 \\ x+1-a & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est un nombre réel.

1°) Calculer a et déterminer la fonction de repartition F_X de X

2°) Calculer l'esperance de la variable X.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire normale centrée reduite.
Préciser dans chacun des cas ci-dessous, la loi de probabilité de la variable Y définie en fonction de X.

1°) $Y = X^3$

2°) $Y = F(X)$ où F est la fonction de repartition de la variable X.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle uniforme sur $[0,1]$.
Montrer que la relation $Y = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-X)$ où α est un paramètre réel strictement positif, définit presque-sûrement une variable aléatoire réelle.
Quelle est la loi de la variable aléatoire Y.

Exercice 4

1°) Montrons que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles presque-sûrement égales, alors elles ont la même loi. ~~Montrer~~

2°) Montrer que la reciproque est fausse

EXERCICE 5

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. Pour tout réel $a > 0$ on pose

$$X_a := X \mathbb{1}_{\{|X| \leq a\}} - X \mathbb{1}_{\{|X| > a\}}$$

1) vérifier que pour tout réel $a > 0$ et toute application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $h(X_a) = h(X)\mathbb{1}_{[0,a]}(X) + h(-X)\mathbb{1}_{]a,+\infty]}(X)$

2) En déduire que, pour tout réel positif a, la variable aleatoire réelle X_a suit la loi normale centrée reduite.

Solutions

EXERCICE 1

$$f_X(x) = \frac{a}{x} \chi_{[-e,-1[}(x) + (x+1-a)\chi_{[-1,0[}(x)$$

1) on a les conditions suivantes sur f_X :

$$\begin{cases} f_X(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x}\chi_{[-e,-1[}(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (x+1-a)\chi_{[-1,0[}(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

~~$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-e}^{-1} \frac{a}{x}\chi_{[-e,-1[}(x)\,dx +$~~

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-e}^{-1} \frac{a}{x}\,dx + \int_{-1}^{0} (x+1-a)\,dx$$

$$= \left[a \ln|x|\right]_{-e}^{-1} + \left[\tfrac{1}{2}x^2 + (1-a)x\right]_{-1}^{0}$$

$$= -a - \frac{1}{2} + 1 - a$$

$$= -2a + \frac{1}{2}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \Rightarrow -2a + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{4}}$

2) soit X une variable aléatoire

Determinons F_X la fonction de repartition

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$

* Si $x < -e$

$F_X(x) = 0$

* $-e \leq x < -1$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-e}^{x} f(t)dt = -\frac{1}{4}\left(\ln|x| - 1\right)$

* Si $-1 \leq x < 0$

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-e}^{-x} f(t) + -1/4 \int_{-1}^{x} f(t)\, dt = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x + 1$

* Si $x \geq 0$

$F_X(x) = 1$

Donc $F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -e \\ -\frac{1}{4}(\ln|x| - 1) \text{ si } -e \leq x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x + 1 \text{ si } -1 \leq x < 0 \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

2) Esperance de X

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_{-e}^{-1} x\left(\frac{1}{4x}\right)dx + \int_{-1}^{0} x\left(x + \frac{5}{4}\right)dx$

$E(X) = -\frac{1}{24} - \frac{e}{4}$

Exercice 2

1) $Y = X^3 \quad X \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$

Soit h une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathbb{E}(h(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) f_Y(y)\, dy$

$\mathbb{E}(h(X^3)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x^3) f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x^3) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$

quand $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$

$dx = \frac{1}{3}(y)^{-\frac{2}{3}} dy$

$\mathbb{E}(h(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \cdot \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{y^{3/2}}{2}} dy$

$f_Y(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{y^{3/2}}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(y)$

2) $Y = F(X)$ où F est la fonction de repartition

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

le support de Y est $[0,1]$

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$

si $y < 0$ $\quad F_Y(y) = 0$

si $y > 1$ $\quad F_Y(y) = 1$

si $y \in [0,1]$ $\quad F_Y(y) = \mathbb{P}(F(X) < y) = \mathbb{P}(X < F^{-1}(y))$

$= F(F^{-1}(y))$

$= y$

car F réalise une bijection réciproque IR

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & si\ y<0 \\ y & si\ y \in [0,1] \\ 1 & si\ y>1 \end{cases}$$

Donc $Y \rightsquigarrow U([0,1])$

Exercice 3

$X \rightsquigarrow U([0,1])$

$Y = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-X)$, $\alpha > 0$. Montrons que Y definit presque surement une variable aléatoire.

Determiner la loi de Y.

$X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ $\quad X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}$

Dire que Y définit presque surement une variable aléatoire s'il existe un ensemble $N \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0$ et $\forall \omega \notin N$, Y est bien definie.

On a: $Y = -\frac{1}{\alpha}\ln(1-X)$

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto -\frac{1}{\alpha}\ln(1-t)$ avec $t \in [0,1]$

$D_f = [0,1[$

$X^{-1}(\{1\}) = N$

Il suffit de prendre $N = X^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = 1\}$ car $\mathbb{P}(X^{-1}(\{1\})) = 0$ puisque X est une variable à densité continue. Par conséquent Y definit presque surement une variable aléatoire.

Determinons la loi de Y

$$0 \leq X < 1$$
$$0 < 1-X \leq 1$$
$$-\infty < \ln(1-X) \leq 0$$
$$0 \leq Y < +\infty \text{ presque surement.}$$

On a: $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\alpha}\ln(1-X) \leq y\right)$
$= \mathbb{P}(-\ln(1-X) \leq y)$
$= \mathbb{P}(\ln(1-X) \geq -\alpha y)$

$$F_Y(y) = 1 - \mathbb{P}(\ln(1-x) \leq y)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(1-x < e^{-\alpha y})$$
$$= 1 - \mathbb{P}(-x < e^{-\alpha y} - 1)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(x > 1 - e^{-\alpha y})$$
$$= \mathbb{P}(x < 1 - e^{-\alpha y})$$

$$F_Y(y) = F_X(1 - e^{-\alpha y})$$

$$\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = f_Y(y) = \frac{\partial F_X(1-e^{-\alpha y})}{\partial y} = \alpha e^{-\alpha y} f_X(1-e^{-\alpha y})$$

$$f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y}$$

vérifions que $1 - e^{-\alpha y} \in [0,1]$

$0 < e^{-\alpha y} < 1 \quad , \forall y \in \mathbb{R}_+$

$0 > -e^{-\alpha y} > -1$

$1 > 1 - e^{-\alpha y} > 0 \quad , \forall y \in \mathbb{R}_+$

Y suit la loi exponentielle de paramètre α.

Enoncé exercice 6

Soit X de densité $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ ; \ x \in [-1,1] \\ 0 \ \text{sinon} \end{cases}$

$Y = X^2 = \varphi(x)$ (détermination de loi)

Enoncé exercice 7

Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variation iid tq $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X_k = -1) = q$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ où $p \in]0,1[$ avec $p + q = 1$

on pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \ , n \in \mathbb{N}^*$

a) Déterminer la fonction caractéristique de Y_n

b) en déduire la loi de Y_n

$$\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto E(e^{itX})$$

Fonction génératrice

$$X : \Omega \to \mathbb{N}$$
$$G_X : [-1,1] \to \mathbb{R}$$
$$S \mapsto E(S^X)$$

Exercice 4 solution

1) Montrons que si X et Y sont des variables aléatoires réelles presque sûrement égales alors elle est la même loi.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité

$X = Y$ P.S $\Leftrightarrow \exists N \subset \Omega$ tq $N = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}$

et $\mathbb{P}(N) = 0$

montrons que $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}^Y$.

on a : $\Omega = \Omega \setminus N \cup N$

Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}^X(]-\infty, a]) = \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, a]))$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in]-\infty, a]\})$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \setminus N / X(\omega) \in]-\infty, a]\}) \cup \{\omega \in N / X(\omega) \in]-\infty, a]\}\})$$

$$\mathbb{P}^X(]-\infty, a]) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \setminus N / X(\omega) \in]-\infty, a]\}) + \mathbb{P}(\{\omega \in N / X(\omega) \in]-\infty, a]\})$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \setminus N / Y(\omega) \in]-\infty, a]\}) + 0$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \setminus N / Y(\omega) \in]-\infty, a]\}) + \mathbb{P}(\{\omega \in N / Y(\omega) \in]-\infty, a]\})$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \setminus N / Y(\omega) \in]-\infty, a]\})$$
$$= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / Y(\omega) \in]-\infty, a]\})$$
$$= \mathbb{P}^Y(]-\infty, a])$$

comme a quelconque. Alors $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}^Y$. D'où X et Y ont la même loi

~~Donnons~~ Montrons que la réciproque est fausse.

Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{U}([0,1])$

$Y = 1 - X$

Soit $\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h(1-X)) = \int_{\mathbb{R}} h(1-x) f_X(x)\,dx$

$= \int_{\mathbb{R}} h(1-x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx$

$= \int_0^1 h(1-x)\,dx$

Posons $y = 1-x \quad dy = -dx$

$\mathbb{E}(h(Y)) = -\int_1^0 h(y)\,dy = \int_0^1 h(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} h(y) \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,dy$

D'où $f_Y(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}y$

$Y \rightsquigarrow U([0,1])$

$X \rightsquigarrow U([0,1])$

Exercice 5

$X \rightsquigarrow N(0,1)$, $\forall a > 0$, $X_a := X \mathbb{1}_{\{|X| \leq a\}} - X \mathbb{1}_{\{|X| > a\}}$

1. Vérifions que $\forall a > 0$ et pour toute application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

$h(X_a) = h(X) \mathbb{1}_{[0,a]}(X) + h(-X) \mathbb{1}_{]-a,+\infty]}(X)$

On a : $X_a = X \mathbb{1}_{\{-a \leq X \leq a\}} - X \mathbb{1}_{\{X < -a \text{ ou } X > a\}}$

$X_a = X \mathbb{1}_{\{X \in [-a,0[\cup [0,a]\}} - X \mathbb{1}_{\{X \in]-\infty,-a[\cup]a,+\infty]\}}$

$X_a = X \mathbb{1}_{[-a,0[}(X) + X \mathbb{1}_{[0,a]}(X) - X \mathbb{1}_{]-\infty,-a[}(X) - X \mathbb{1}_{]a,+\infty]}(X)$

Soit h une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $\quad X \rightsquigarrow N(0,1)$

Determinons $h(X_a)$

$$h(X_a) = \begin{cases} h(X) \text{ si } X \in [-a,0[\\ h(X) \text{ si } X \in [0,a] \\ h(-X) \text{ si } X \in]-\infty,-a[\\ h(-X) \text{ si } X \in]a,+\infty[\end{cases}$$

$$h(X_a) = \begin{cases} h(x) \text{ si } x \in [-a, a] \\ h(-x) \text{ si } x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[\end{cases}$$

$$h(X_a) = \begin{cases} h(x) \text{ si } |x| \leq a \\ h(-x) \text{ si } |x| > a \end{cases}$$

Donc $h(X_a) = h(x) \mathbb{1}_{\{|x| \leq a\}} + h(-x) \mathbb{1}_{\{|x| > a\}}$

2) En déduire que $\forall a > 0$, $X_a \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{E}(h(X_a)) = \mathbb{E}(h(x) \mathbb{1}_{\{|x| \leq a\}}) + \mathbb{E}(h(-x) \mathbb{1}_{\{|x| > a\}})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x) \mathbb{1}_{\{|x| \leq a\}} f_X(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}} h(-x) \mathbb{1}_{\{|x| > a\}} f_X(x)\, dx$$

$$\mathbb{E}(h(X_a)) = \int_{-a}^{a} h(x) f_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{-a} h(-x) f_X(x)\, dx + \int_{a}^{+\infty} h(-x) f_X(x)\, dx$$

Posons $y = -x$ $\quad dy = -dx$

$$* \int_{-\infty}^{-a} h(-x) f_X(x)\, dx = \int_{+\infty}^{a} - h(y) f_X(-y)\, dy$$

$$= \int_{a}^{+\infty} h(y) f_X(y)\, dy \quad \text{car la fonction densité } f_X \text{ est pair}$$

$$= \int_{a}^{+\infty} h(x) f_X(x)\, dx$$

$$* \int_{a}^{+\infty} h(-x) f_X(x)\, dx = \int_{-a}^{+\infty} - h(y) f_X(-y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} h(y) f_X(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{a} h(x) f_X(x)\, dx$$

Donc $\mathbb{E}(h(X_a)) = \int_{-a}^{a} h(x) f_X(x)\, dx + \int_{a}^{+\infty} h(x) f_X(x)\, dx +$

$$\int_{-\infty}^{-a} h(x) f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

D'où $f_{X_a}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

D'où $f_{X_e}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$!

Donc $X_e \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 7

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variable aleatoire iid tq $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_k = -1) = q$ et $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ où $p \in]0,1[$

avec $p + q = 1$

1) On pose $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) fonction caractéristique de Y_n

$$\varphi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}(e^{itY_n}), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$= \mathbb{E}\left(e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}\right) = \mathbb{E}\left(e^{itX_1} \times e^{itX_2} \times \dots \times e^{itX_n}\right)$$

$$= \mathbb{E}(e^{itX_1})\,\mathbb{E}(e^{itX_2}) \dots \mathbb{E}(e^{itX_n}) \quad \text{car les } X_i \text{ sont indépendants}$$

$$\varphi_{Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{itX_k})$$

$$= \left(\mathbb{E}(e^{itX_1})\right)^n \quad \text{car } X_i \text{ identiquement distribués.}$$

$$\varphi_{Y_n}(t) = (\varphi_{X_1}(t))^n$$

$$\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}(e^{itX_1})$$

$$= e^{it}\,\mathbb{P}(X_1 = 1) + e^{-it}\,\mathbb{P}(X_1 = -1)$$

$$\varphi_{X_1}(t) = p e^{it} + q e^{-it}$$

Par conséquent $\varphi_{Y_n}(t) = [p e^{it} + q e^{-it}]^n$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (p e^{it})^k (q e^{-it})^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (e^{itk}) q^{n-k} e^{-it(n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} e^{i(k-n+k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^k q^{n-k} e^{it(2k-n)}$$

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{itx} \mathbb{P}(X=x)$$

Posons $x = 2k - n$

Si n est pair $\Rightarrow$ x est ~~est~~ paire.

$k = \frac{x+n}{2}$

$$\varphi_{Y_n}(t) = \sum_{\substack{x=-n \\ \text{paire}}}^{n} C_n^{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} q^{\frac{n-x}{2}} e^{itx}$$

$X(\Omega) = \{-n, 2-n, \dots, n\}$

$\mathbb{P}(X=x) = C_n^{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} q^{\frac{n-x}{2}}$ avec $x \in X(\Omega)$

Si n est impair $\Rightarrow$ x est impaire

$$\varphi_{Y_n}(t) = \sum_{\substack{x=-n \\ x \text{ impair}}}^{n} C_n^{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} q^{\frac{x-n}{2}} e^{itx}$$

$\mathbb{P}(X=x) = C_n^{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} q^{\frac{x-n}{2}}$ avec $x \in X(\Omega)$

$Y_n(\Omega) = \{2k - n \text{ avec } k \in \overline{0,n}\}$ et

$\forall x \in Y_n(\Omega)$, $\mathbb{P}(X=x) = C_n^{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} q^{\frac{x-n}{2}}$.

TD PROBABILITE AVANCEES

Fiche 2 : indépendance stochastique, Vecteurs gaussiens 29-11-16

Exercice 1.

$f(x,y) = \alpha(1-x^2)\, 1\!\!1_{[0,1]}(x)\, y e^{-3y}\, 1\!\!1_{]0,+\infty[}(y)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Déterminer α

2) Déterminer les lois marginale du couple (X,Y)

3) calculer $P(0 \leq X \leq 2, Y \geq 1)$

4) Calculer la matrice de dispersion D de (X,Y)

Resolution

1) Determinons α

$f(x,y)$ est une fonction de densité. donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(1-x^2)\, 1\!\!1_{[0,1]}(x)\, y e^{-3y}\, 1\!\!1_{]0,+\infty[}(y)\,dx\,dy$$

$$= \alpha\left[\left(\int_0^1 (1-x^2)\,dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y e^{-3y}\,dy\right)\right]$$

or : $\int_0^1 (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

$\int_0^t y e^{-3y}\,dy = ?$, $t>0$. Posons $\begin{cases} u(y) = y \\ v'(y) = e^{-3y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(y) = 1 \\ v(y) = -\frac{e^{-3y}}{3} \end{cases}$

Donc $\int_0^t y e^{-3y}\,dy = \left[-\frac{y e^{-3y}}{3}\right]_0^t + \int_0^t \frac{e^{-3y}}{3}\,dy$

$$\int_0^t y e^{-3y}\,dy = -\frac{t e^{-3t}}{3} - \frac{1}{9}\left[e^{-3y}\right]_0^t$$

$$= -\frac{t e^{-3t}}{3} - \frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{9}$$

$$\int_0^{+\infty} y e^{-3y} = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{t e^{-3t}}{3} - \frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{9}\right] = \frac{1}{9}$$

En somme $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{2\alpha}{27} = 1$

D'où $\alpha = \frac{27}{2}$

(a)

La fonction de densité est donc $f(x,y) = \frac{27}{2}(1-x^2)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,y e^{-3y}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$.

2) Lois marginale du couple (X,Y)

- Loi de X

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \left[\int_0^{+\infty} \frac{27}{2}(1-x^2)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,y e^{-3y}\,dy\right]$$

$$= \frac{27}{2}(1-x^2)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\int_0^{+\infty} y e^{-3y}\,dy$$

$$= \frac{27}{2} \times \frac{1}{9}(1-x^2)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

$$f_X(x) = \frac{3}{2}(1-x^2)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

- Loi de Y

$$f_Y(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{27}{2}(1-x^2)\,y e^{-3y}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\,dx$$

$$= \frac{27}{2} y e^{-3y}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)\int_0^1 (1-x^2)\,dx$$

$$= \frac{27}{2} \times \frac{2}{3} y e^{-3y}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

$$f_Y(x) = 9y e^{-3y}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

3) Les variables X et Y étant indépendantes,

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2, Y \geq 1) = \mathbb{P}^X([0,2])\,\mathbb{P}^Y([1,+\infty[)$$

$$= \left[\int_0^1 \frac{3}{2}(1-x^2)\,dx\right]\left[\int_1^{+\infty} 9y e^{-3y}\,dy\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \times 9\left(\frac{e^{-3}}{9} + \frac{e^{-3}}{3}\right)$$

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2, Y \geq 1) = 4e^{-3}$$

2

4) La matrice de distance D.

$$D = \begin{bmatrix} Var(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & Var(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var X & 0 \\ 0 & Var Y \end{bmatrix}.$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

On a : $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f_X(x)\,dx$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^5\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x)\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$$

Donc $Var X = \frac{1}{5} - \frac{9}{64} = \frac{64-4}{320} = \frac{19}{320}$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} 9y \times y e^{-3y}\,dy$$

$$= 9\int_0^{+\infty} y^2 e^{-3y}\,dy$$

$$= 9 \lim_{t \to +\infty} \int_0^t y^2 e^{-3y}\,dy$$

$$\int_0^t y^2 e^{-3y}\,dy = ?$$

Posons $\begin{cases} u(y) = y^2 \\ v'(y) = e^{-3y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(y) = 2y \\ v(y) = -\frac{1}{3}e^{-3y} \end{cases}$

$$\int_0^t y^2 e^{-3y}\,dy = \left[-\frac{1}{3}y^2 e^{-3y}\right]_0^t + \frac{2}{3}\int_0^t y e^{-3y}\,dy$$

$$= -\frac{1}{3}t^2 e^{-3t} + \frac{2}{3}\left[-t\frac{e^{-3t}}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{9}\right]$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{2}{[illegible]} \times 9 = \frac{2}{[illegible]}$$

3

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_0^{+\infty} 9y^2 \times y\, e^{-3y}\, dy = 9\int_0^{+\infty} y^3 e^{-3y} dy$$
$$= 9 \lim_{t\to+\infty} \int_0^t y^3 e^{-3y} dy$$

$$\int_0^t y^3 e^{-3y} dy = ?$$

$$\begin{cases} u(y) = y^3 \\ v'(y) = e^{-3y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(y) = 3y^2 \\ v(y) = -\frac{1}{3} e^{-3y} \end{cases}$$

$$\int_0^t y^3 e^{-3y} dy = \left[-\frac{1}{3} y^3 e^{-3y}\right]_0^t + \int_0^t y^2 e^{-3y} dy$$
$$= -\frac{1}{3} t^3 e^{-3t} + \int_0^t y^2 e^{-3y} dy$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = 9 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{3} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{19}{320} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$
$$Var(Y) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

<u>Exercice 2</u>

Calcule de $\mathbb{P}(X=Y)$

$$(X=Y) = \bigcup_{k=0}^{n\wedge m} (X=k, Y=k)$$

supposons que $n \wedge m$

$$\mathbb{P}(X=Y) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n\wedge m} (X=k, Y=k)\right)$$

Pour $j \neq i$ on a: $(X=i, Y=i) \neq (X=j, Y=j)$

d'où $\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k, Y=k)$

$$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot C_m^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}$$

(4)

$$\mathbb{P}(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_m^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m-2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_m^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} C_m^k$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} C_{m+n}^{n}$$

Exercice 3

$(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite independante de v.a.r. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabi

$X_k \rightsquigarrow \mathcal{B}(p)$ $(0<p<1)$

$T(\omega) := \inf \{ n \in \mathbb{N} / X_n(\omega) = 1 \}$

$T_r(\omega) := \inf \{ n \in \mathbb{N}^* / X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega) = r \}$

$\theta_r(\omega) := \inf \{ n \in \mathbb{N}^* / X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_{n+r}(\omega) = r \}$

avec $\inf(\emptyset) = +\infty$

1- Montrons que T est une variable aleatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}^*$

(7)

Exercices

$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1) \qquad \varepsilon \rightsquigarrow \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$

1- Montrons que $Y = \varepsilon X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$F(y) = \mathbb{P}(Y < y)$

$= \mathbb{P}(\varepsilon X < y) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1, X < y) + \mathbb{P}(\varepsilon = -1, X < y)$

$= \mathbb{P}(\varepsilon = 1) \times \mathbb{P}(X < y) + \mathbb{P}(\varepsilon = -1) \times \mathbb{P}(X > -y)$

$= \frac{1}{2}\varphi_X(y) + \frac{1}{2}\varphi_X(-y)$

$= \varphi_X(y)$ car $\varphi_X(-y) = 1 - \varphi_X(y)$

Donc $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{E}(h(x)) = \mathbb{E}(h(\varepsilon x))$

$= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\varepsilon=1\}} h(x) + \mathbb{1}_{\{\varepsilon=0\}} h(-x))$

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\varepsilon=1\}} h(x))$

$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{\varepsilon=1\}}) \mathbb{E}(h(x))$

6

Fiche 3 : Fonctions caractéristique, convergences

Exercice 1

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue bornée $\quad X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$

$X_n(\Omega) \subset \mathbb{R}^d$, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^d$

$$X_n \xrightarrow{P.S} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P.S} f(X)$$

$$S_n^2 = \tilde{X}_n + \tilde{Y}_n \qquad f(x,y) = x+y \text{ continue}$$

$$S_n^2 = f(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n) \xrightarrow{P.S} f(X,Y) = X+Y$$

l'on cherche à montrer que $X \rightsquigarrow N(0,1)$ alors $X^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$

Plus généralement $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ alors $\frac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow N(0,1)$

$$\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$$

1- Montrons que ~~th~~ la variable aléatoire X_1^2 suit la loi $\gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(1)$

On sait que : $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$

où $X_i \rightsquigarrow N(0,1)$

utilisons le théorème de transfert

$$E(h(X_1^2)) = \int_{\mathbb{R}} h(x^2) f_{X_1}(x)\,dx \qquad \forall h \text{ une fonction numérique, continue et bornée}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} h(x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

$x \mapsto h(x^2)\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ est paire.

donc $E(h(X_1^2)) = 2\int_{\mathbb{R}^+} h(x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$

(7)

Posons $y = x^2, \forall x > 0$ | $x = \sqrt{y}$

$dy = 2x\,dx$ | $dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$

quand $x \to +\infty$, $y \to +\infty$

$x \to 0$, $y \to 0$

D'où $\mathbb{E}(h(X_1^2)) = 2\int_{\mathbb{R}^+} h(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) dy$

$= \cancel{2}\int_{\mathbb{R}^+} h(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) y^{-1/2} dy$

donc $f_{X_1^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} y^{-\frac{1}{2}} 1\!\!1_{\mathbb{R}^+}(y)$

$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\sqrt{\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} 1\!\!1_{\mathbb{R}^+}(y)$

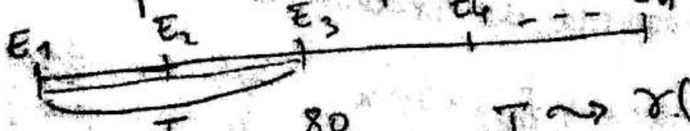
Par suite $X_1^2 \sim \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(1)$

Rappel : Pour la loi Gamma : $f_X(x) = \frac{\rho^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\rho x} 1\!\!1_{x>0}$

$\gamma(a, \rho)$

a le temps qui sépare 2 réalisations consécutives
ρ le nombre moyen par unité de temps.

Ex- 80 personnes qui passe en moyenne par heure.



$a = 2$ $\quad \rho = \frac{80}{60}$ $\quad T \sim \gamma\left(2, \frac{4}{3}\right)$

2- ~~Montrons~~ Déduisons que $\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ est de loi $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ "$\chi^2(n)$"

utilisons la fonction caractéristique des lois Gamma.

(8)

La fonction caractéristique de la loi $\gamma(a,\rho)$

$X \leadsto \gamma(a,\rho) \Rightarrow \varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto \mathbb{E}(e^{itx})$

$$\varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\rho}\right)^{-a}$$

Les X_k sont indépendants

Donc les X_k^2 sont indépendants.

D'où $\varphi_{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}(t) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{itX_k^2})$

Aussi les X_k^2 sont indépen identiquements distribu

Donc $\varphi_{\sum_{k=1}^{n} X_k^2}(t) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{itX_1})$

$$= \left(1 - \frac{it}{\rho}\right)^{-an}$$

$$= (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$$

Par conséquent $\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \leadsto \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(n)$

3) Montrons que $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2$

on a : $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(X_k^2 - 2X_k\overline{X}_n + \overline{X}_n^2\right)$

$$= \frac{1}{n-1}\sum X_k^2 - \frac{2\overline{X}_n}{n-1}\sum X_k + \frac{n}{n-1}X_n^2$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum X_k^2 - \frac{2n}{n-1}\overline{X}_n^2 + \frac{n}{n-1}X_n^2$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum X_k^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2$$

4) voir après TD Analyse convexe et optimisation et calcul différentiel

9

Fiche 3 Probabilités Avancés

Suite Exercice 1

4) En utilisant la loi forte des grands nombres, étudions les convergences presque-sure des suites $\overline{X}_n$ et S_n^2.

Comme les X_k sont iid. D'après la loi forte des grands nombres

P.S → P → loi

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P.S} E(X_1) = 0$$

On a : $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{n}{n-1}\overline{X}_n^2$

$$\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 = \frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n}\sum X_k^2$$

Les X_k^2 etant iid. D'après la loi forte des grands nombres.

$$\frac{1}{n}\sum X_k^2 \xrightarrow{P.S} E(X_1^2) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

D'autre part $\frac{n}{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

donc $\frac{n}{n-1} \xrightarrow{P.S} 1$

Alors $\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \xrightarrow{P.S} 1$

. D'autre part $\overline{X}_n \xrightarrow{P.S} 0$

Posons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

Comme g est continue.

Donc $g(\overline{X}_n) \xrightarrow{P.S} g(0) = 0$

Par conséquent $\overline{X}_n^2 \xrightarrow{P.S} 0$

(10)

De plus $\frac{n}{n-1} \xrightarrow{P.S} 1$

donc $\frac{n}{n-1} \overline{X}_n^2 \xrightarrow{P.S} 0$

finalement $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \frac{n}{n-1} \overline{X}_n^2 \xrightarrow{P.S} 1$

<u>Exercice 2</u>

$X_n \xrightarrow{L^p} X \Leftrightarrow \mathbb{E}(|X_n - X|^p) \longrightarrow 0$ $\qquad X \in L^p$ $\quad \mathbb{E}(|X|^p) < \infty$

1- Montrons que $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$ converge dans L^2 vers

$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\lambda}$

* montrons que $\overline{X}_n \in L^2$

$\mathbb{E}(\overline{X}_n^2) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2\right)$

Posons $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$

on a : $X_k \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$

Comme les variables aleatoires sont independants

alors $Y \rightsquigarrow \Gamma(n, \lambda)$

$$\mathbb{E}(\overline{X}_n^2) = \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} y^2 \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y>0}\, dy$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} y^{n+1} e^{-\lambda y}\, dy$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n+2)}{\lambda^{n+2}}$$

$$= \frac{1}{n^2 \lambda^2} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

$= \frac{n+1}{\cdot} < \infty$ donc $\overline{X}_n^2 \in L^2$ (11)

Calculons $\mathbb{E}(\overline{X}_n)$

$\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}Y\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

* $\overline{X}_n \xrightarrow{L^2} \frac{1}{\lambda}$ revient à montrer que $\mathbb{E}\left(|\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}|^2\right) \rightarrow$

on a : $\mathbb{E}\left(|\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}|^2\right) = \mathbb{E}\left(|\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)|^2\right)$

$= \mathrm{Var}(\overline{X}_n)$

$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(\sum X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{\lambda^2}$

$= \frac{1}{n\lambda^2} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Donc $\mathbb{E}\left(|\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}|^2\right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$

D'où $\overline{X}_n \xrightarrow{L^2} \frac{1}{\lambda}$.

2 - on pose $Y_n := \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right)$

Montrons que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ (on determine m et σ^2.)

les (X_i) de variable a. statistiquement tel que $\mathbb{E}(|X_1|^2) < \infty$

D'après le T.C.L on a :

$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathrm{var}(X_1))$

donc $Y_n = \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \mathrm{var}(X_1) = \frac{1}{\lambda^2}\right)$

Exercice 3

$(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoire indépendantes de loi uniforme sur $[0, \theta]$ où $\theta > 0$

on pose $\forall n \geq 1$ $X_n := \max_{1\leq i\leq n} U_i$

Rappel : $X_n \xrightarrow{P.S} X \Leftrightarrow \exists N$ tq $\mathbb{P}(N) = 0$ $\forall \omega \notin N, X_n(\omega) \to X(\omega)$

$X_n \not\to X(\omega)$ $\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall n_0 \in \mathbb{N}$

... $|X(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon$

12)

1) Montrons que X_n converge P.S et determinons sa limite.

ona: $\mathbb{P}(|X_n-\theta|>\varepsilon) = 1-\mathbb{P}(|X_n-\theta|<\varepsilon)$

$\mathbb{P}(|X_n-\theta|<\varepsilon) = \mathbb{P}(-\varepsilon < X_n-\theta<\varepsilon)$

$= \mathbb{P}(\theta-\varepsilon < X_n < \theta+\varepsilon)$

$= F_{X_n}(\theta+\varepsilon) - F_{X_n}(\theta-\varepsilon)$

Determinons $F_{X_n}(x)$

$F_{X_n}(x) = \mathbb{P}(X_n<x)$

$= \mathbb{P}(\max_{1\le i\le n} U_i < x)$

$= \mathbb{P}(U_1<x, \dots, U_n<x)$ comme les U_i sont independantes [illegible]

alors $F_{X_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(U_i<x)$ comme les U_i sont identique

ainsi $F_{X_n}(x) = [\mathbb{P}(U_1<x)]^n$

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x<0 \\ (\frac{x}{\theta})^n & \text{si } 0\le x\le\theta \\ 1 & \text{si } x>\theta \end{cases}$$

- Si $0<\varepsilon<\theta$

ona: $\theta<\varepsilon+\theta<2\theta$

donc $F_{X_n}(\varepsilon+\theta)=1$

$0<\theta-\varepsilon<\theta$

donc $F_{X_n}(\theta-\varepsilon) = \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n$

$\Rightarrow \mathbb{P}(|X_n-\theta|<\varepsilon) = 1-\left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n$

$\mathbb{P}(|X_n-\theta|>\varepsilon) = \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$

- Si $0<\theta<\varepsilon$

ona $\theta<2\theta<\theta+\varepsilon$

donc $F_{X_n}(\theta+\varepsilon)=1$

ona: $\theta-\varepsilon<0$

donc $F_{X_n}(\theta-\varepsilon)=0$

(1?)

$\Rightarrow \mathbb{P}(|X_n-\theta|<\varepsilon)=1$ et donc $\mathbb{P}(|X_n-\theta|>\varepsilon)=0$

Donc $\mathbb{P}(|X_n-\theta|>\varepsilon)=\begin{cases}(1-\frac{\varepsilon}{\theta})^n & \text{si } \varepsilon<\theta \\ 0 & \text{si } \varepsilon>\theta\end{cases}$

Pour $\varepsilon>0$, la serie de terme general $\mathbb{P}(|X_n-\theta|>\varepsilon)$ converge.

Pour $\varepsilon>0$, considerons $\sum_{n\geq 1}(1-\frac{\varepsilon}{\theta})^n=S$

S converge lorsque $|1-\frac{\varepsilon}{\theta}|<1$

Ainsi, quelque soit $\varepsilon>0$, la serie de terme general $\mathbb{P}(|X_n-\theta|>\varepsilon)$ converge.

Par conséquent $X_n \xrightarrow{p.s} \theta$

2) Etudions la convergence en loi de la suite $(n(\theta-X_n))$, $n\geq 1$

Posons $Y_n = n(\theta-X_n)$

$F_{Y_n}(y)=\mathbb{P}(Y_n<y)$

on a: $0\leq X_n\leq\theta$ $\quad 0\leq\theta-X_n\leq\theta$

$-\theta\leq -X_n\leq 0$ $\quad 0\leq Y_n\leq n\theta$.

Donc $F_{Y_n}(y)=0$ si $y<0$

Pour $0\leq y<n\theta$

$F_{Y_n}(y)=\mathbb{P}(Y_n<y)=\mathbb{P}(n(\theta-X_n)<y)$

$=\mathbb{P}(-X_n<\frac{y}{n}-\theta)$

$=\mathbb{P}(X_n>\theta-\frac{y}{n})$

$=1-\mathbb{P}(X_n\leq\theta-\frac{y}{n})$

(11)

On a : $\theta > \theta - \frac{y}{n} \geq 0$

Donc $F_{Y_n}(y) = 1 - \frac{\left(\theta - \frac{y}{n}\right)^n}{\theta} = 1 + \left(1 - \frac{y}{n\theta}\right)^n$

- si $y > n$

alors $F_{Y_n}(y) = 1$

on a donc $F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{y}{n\theta}\right)^n, & \text{si } 0 \leq y \leq n\theta \\ 1 & \text{si } y > n\theta \end{cases}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\theta}} & \text{si } y > 0 \end{cases}$

$\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-a}$

Donc $Y_n \xrightarrow{L}$

Exercice 4

$E\left(f\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) f_{(X_1, \ldots, X_n)}(x_1, \ldots, x_n) \, dx_1 \ldots dx_n$

$f_X(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x_1, \ldots, x_n)$

$E\left(f\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)\right) = \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \ldots dx_n$

$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = \overline{X}_n \xrightarrow{P} E(X_1) = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \xrightarrow{P} f\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\lim \int_{[0,1]} f\left(\frac{x_1+\dots+x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_2 = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

3- $\cdot \sum e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$

$$E\left(f\left(\frac{\overbrace{Y_1+\dots+Y_n}^{Z_n}}{n}\right)\right)$$

$\longrightarrow f(Z_1) = f(\alpha)$

$X \perp Z$ $\qquad \frac{Y}{\sqrt{2}} \rightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ $\qquad \frac{Y^2}{2} \rightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,2) \Rightarrow$

$Z \rightarrow \mathcal{N}(0,3) \Rightarrow \frac{Z^2}{3} \rightsquigarrow \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$U = \underbrace{(1, 2, -3)}_{}\overset{AX}{} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$V(U) = A \Sigma A^t$

$\gamma\left(1, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2)$

$E(U) =$

$Var(U) =$

16

UFHB-UFRMI
Niveau: L3

Année Académique
2015/2016

Examen de Probabilités avancées
Session 1
Correction

Exercice 1 (8 points)

Trois personnes A; B; et C jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée, de la façon suivante : A et B jouent en premier et le gagnant, par exemple A, rencontre C. Si A gagne également cette seconde partie, il est déclaré vaniqueur. Sinon C rencontre B, s'il gagne, C est déclaré vainqueur, sinon B rencontre à nouveau A, ... C'est-à-dire qu'à chaque fois le gagnant d'une partie rencontre le perdant de la partie précédente, et il faut gagner deux parties consécutives pour être déclaré vainqueur. On cherche la probabilité de gain de chacun des trois joueurs.

On considère les événements ci-dessous:

$V_k(A)$ désigne l'événement:" *A sort vainqueur du jeu à la $k^{ème}$ partie* "

$V(A)$ est l'événement :" *A sort vainqueur du jeu.*"

On définit de même $V_k(B), V_k(C), V(B), V(C)$.

1) **Calculer $\mathbb{P}(V_k(A))$ en fonction de k**

Un résultat de cette expérience aléatoire est une suite $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\cdots$ où ω_n désigne le joueur qui est sorti vainqueur de la n^{me} partie. Par exemple :

AA signifie que A a gagné les deux premières parties donc est vainqueur du jeu.

ACC signifie que A a gagné la première partie, a perdu contre C et ensuite C a battu B. Donc C est vainqueur.

Les éventualités pour lesquelles A est vainqueur du jeu sont des suites de longueur $3k+2, k \in \mathbb{N}$ si la suite démarre par une victoire de A ($AA, ACBAA, ACBACBAA$, etc.) ou de longueur $3k+1, k \in \mathbb{N}^*$ si la suite commence par une victoire de B ($BCAA, BCABCAA$, etc.).

Dans tout ce qui suit on suppose que les parties sont indépendantes.

Ainsi

$$\mathbb{P}(V_k(A)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \notin (3\mathbb{N}+2) \cup (3\mathbb{N}^*+1) \\ (\frac{1}{2})^k & \text{si} \quad k \in (3\mathbb{N}+2) \cup (3\mathbb{N}^*+1) \end{cases}$$

2) **Exprimer $V(A)$ en fonction des $V_k(A)$**

On a

$$V(A) = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} V_{3k+2}(A)\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_{3k+1}(A)\right)$$

3) **Déduire $\mathbb{P}(V(A))$**

On a d'après la question précédente que:

$$\mathbb{P}(V(A)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(V_{3k+2}(A)) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(V_{3k+1}(A)).$$

1

D'où
$$\mathbb{P}(V(A)=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^{3k+2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^{3k+1}.$$

Ainsi
$$\mathbb{P}(V(A)=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}+\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{14}.$$

4) **Calculer $\mathbb{P}(V(B))$**

Par raison de symétrie
$$\mathbb{P}(V(B)=\mathbb{P}(V(A))$$

5) **Calculer $\mathbb{P}(V(C))$ en suivant la même procédure que dans les questions 1), 2) et 3).**

Les éventualités pour lesquelles C est vainqueur du jeu sont de la forme $ACC, ACBACC$, etc. ou $BCC, BCABCC$, etc. Ainsi ces éventualités sont de longueur $3k$.

Notons A_1(resp. B_1) l'événement: A (resp. B) gagne la première partie. On a
$$V(C)=(V(C)\cap A_1)\cup(V(C)\cap B_1).$$

D'autre part, par symétrie on a
$$\mathbb{P}(V(C)\cap A_1)=\mathbb{P}(V(C)\cap B_1).$$

Maintenant,
$$\mathbb{P}(V(C)\cap A_1)=\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}V_{3k}\right)\cap A_1\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3k}=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}.$$

Ainsi
$$\mathbb{P}(V(C))=2\mathbb{P}(V(C)\cap A_1)=\frac{2}{7}.$$

6) **Est-ce qu'on peut jouer indéfiniment?**

On a
$$\mathbb{P}(V(A)+\mathbb{P}(V(B))+\mathbb{P}(V(C))=1,$$

donc on ne peut pas jouer indéfiniment. Le jeu finira par s'arrêter avec la victoire de l'un des joueurs.

Exercice 2 **(6 points)**

Soient X une variable aléatoire réelle (v.a.r.) de loi gaussienne centrée réduite et Z une v.a.r., indépendante de X, uniformément distribuée sur $\{-1,1\}$.

1) **Vérifier que ZX est gaussienne**

Pour tout $u\in\mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}F_{ZX}(u)&=\mathbb{P}(ZX<u)\\&=\mathbb{P}(ZX<u,Z=1)+\mathbb{P}(ZX<u,Z=-1)\\&=\mathbb{P}(X<u,Z=1)+\mathbb{P}(-X<u,Z=-1)\\&=\mathbb{P}(X<u)\mathbb{P}(Z=1)+\mathbb{P}(-X<u)\mathbb{P}(Z=-1).\end{aligned}$$

2

Comme X et $-X$ ont la même loi, on a $\mathbb{P}(X < u) = \mathbb{P}(-X < u)$. Donc

$$\begin{aligned} F_{ZX}(u) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X < u) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(-X < u) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X < u) + \mathbb{P}(-X < u)) \\ &= \frac{1}{2}(2\mathbb{P}(X < u)) \\ &= \mathbb{P}(X < u). \end{aligned}$$

D'où, X et ZX ont la même fonction de répartion c'est à dire la mëme loi. Par conséquent ZX est de loi gaussienne centrée réduite.

2) **En considérant la somme $X + ZX$, montrer que le couple (Z, ZX) n'est pas gaussien.**
Supposons que (Z, ZX) est de loi gaussienne. Dans ce cas, $X + ZX$ est de loi gaussienne aussi. Maintenant, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + ZX = 0) &= \mathbb{P}(X(1 + Z) = 0) \\ &\geq \mathbb{P}(Z = -1) \\ &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent $X + ZX$ ne peut pas avoir de densité car sinon $\mathbb{P}(X + ZX = 0) = 0 \geq \frac{1}{2}$. Donc elle doit être constante, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, (Z, ZX) n'est pas gaussienn.

3) **Montrer que X et ZX ne sont pas indépendantes**
Comme X et ZX sont de lois gaussiennes si elles étaient indépendantes le vecteur (Z, ZX) serait gaussien, ce qui n'est pas le cas. D'où X et ZX ne sont pas indépendantes.

Remarque. Il est facile de voir que $Cov(X, ZX) = 0$ sans pour autant que X et ZX soient indépendantes.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ **(6 points)** Trois personnes A, B, et C arrivent à la poste en même temps pour téléphoner. Il y a deux cabines téléphoniques qu'occupent immédiatement A et B; C remplace le premier sorti. A, B, et C quittent chacun la poste immédiatement après avoir téléphoné. On suppose que les temps d'occupation de la cabine par A, B et C sont des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre α.

On note X_A le temps d'occupation de la cabine par la personne A. On définit de même X_B et X_C.

1) **Exprimer l'événement $D(A)$: " *A sort le dernier*" en fonction de X_A, X_B et X_C. Calculer la probabilité que A sorte le dernier.**
A sort le dernier s'il met plus de temps à téléphonner que C après la sortie de B. Donc

$$D(A) = \{X_A - X_B > X_C\}.$$

Pour calculer $\mathbb{P}(D(A))$, nous proposons deux méthodes.
Méthode 1

On définit $D(B)$ et $D(C)$ par analogie avec $D(A)$. Par raison de symétrie on a

$$\mathbb{P}(D(A)) = \mathbb{P}(D(B)). \tag{0.1}$$

On a aussi

$$D(A) \cup D(B) = \{|X_A - X_B| > X_C\}.$$

Déterminons la loi de $|X_A - X_B|$. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, posons $\Delta = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2 : x > y + u\}$. Comme (X_A, X_B) et (X_B, X_A) ont la même loi, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_A - X_B| > u) &= 2\mathbb{P}(X_A > X_B + u) \\
&= 2\int_\Delta f_{(X_A, X_B)}(x, y)\,dx\,dy \\
&= 2\int_\Delta \alpha^2 e^{-\alpha(x+y)}\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha y}\left(\int_{x>y+u} \alpha e^{-\alpha x}\,dx\right) dy \\
&= 2\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha y} e^{-\alpha(y+u)}\,dy \\
&= e^{-\alpha u}\int_0^{+\infty} 2\alpha e^{-2\alpha y}\,dy \\
&= e^{-\alpha u}.
\end{aligned}$$

Donc $|X_A - X_B|$ et X_C sont indépendantes et ont la même loi exponentielle de paramètre α. Par conséquent

$$\mathbb{P}(D(A) \cup D(B)) = \mathbb{P}(|X_A - X_B| > X_C) = \mathbb{P}(X_C > |X_A - X_B|) = \frac{1}{2}$$

car

$$\mathbb{P}(|X_A - X_B| = X_C) = 0.$$

En effet pour toutes variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi, les vecteurs aléatoires (X, Y) et (Y, X) sont de même loi. Donc

$$\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(Y < X).$$

En utilisant l'équation (0.1), on déduit que

$$\mathbb{P}(D(A)) = \frac{1}{4}.$$

Méthode 2

Posons $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^* : x > y+z\}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D(A)) &= \mathbb{P}(\{X_A - X_B > X_C\}) \\
&= \int_\Gamma \alpha^3 e^{-\alpha(x+y+z)} dxdydz \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-\alpha(y+z)} \left(\int_{x>y+z} \alpha e^{-\alpha x} dx\right) dydz \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-2\alpha(y+z)} dydz \\
&= \frac{1}{4}\left(\int_0^{+\infty} 2\alpha e^{-2\alpha y} dy\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

2) **Calculer la probabilité que C sorte le dernier après avoir exprimé l'événement "Csort le dernier" en fonction de X_A, X_B et X_C.**
On a

$$D(C) = \{|X_A - X_B| < X_C\}$$

Evidemment $\{D(A), D(B), D(C)\}$ est une partition de l'univers. Donc $\mathbb{P}(D(A)) + \mathbb{P}(D(B)) + \mathbb{P}(D(C)) = 1$. On en déduit que $\mathbb{P}(D(C)) = \frac{1}{2}$.

3) **Exprimer le temps total T passé par C dans la poste en fonction de X_A, X_B et X_C. Donner la loi de probabilité de T .**
Le temps passé par C est la somme de son temps d'attente dans la poste qui est $\min(X_A, X_B)$ et de la durée de son coup de fil qui est X_C. Donc

$$T = \min(X_A, X_B) + X_C.$$

Commençons par déterminer la loi du temps d'attente $W = min(X_A, X_B)$. On a pour tout $w \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(W > w) &= \mathbb{P}(X_A > w, X_B > w) \\
&= \mathbb{P}(X_A > w)\mathbb{P}(X_B > w) \\
&= e^{-2\alpha w}.
\end{aligned}$$

Par conséquent W suit la loi exponentielle de paramètre 2α. Comme W et X_C sont des variables aléatoires indépendantes, la loi du temps T passé par C dans la poste est le produit

5

de convolution des deux lois. D'où sa fonction de densité est donnée par: pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_{\mathbb{R}} f_W(x) f_{X_C}(t-x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2\alpha^2 e^{-2\alpha x} e^{-\alpha(t-x)} 1_{]0,+\infty[}(x) 1_{]0,+\infty[}(t-x)dx \\ &= 2\alpha^2 e^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha x}dx \\ &= 2\alpha e^{-\alpha t}(1-e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

Evidemment pour tout $t \leq 0, f_T(t) = 0$.

4) **Donner la loi de probabilité de l'instant du dernier départ, l'instant 0 étant l'arrivée des trois personnes à la poste.**

Notons Z l'instant du dernier départ. On a $Z = W + \max(|X_A - X_B|, X_C)$. Il est clair que le temps d'attente de C est indépendant du temps que passe dans la poste le dernier à sortir entre A et B après que le premier soit sorti c'est à dire que W et $|X_A - X_B|$ sont indépendantes. Montrons le rigoureusement.

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(W > u, |X_A - X_B| > v) &= \mathbf{P}(W > u, X_B - X_A > v, X_A < X_B) + \mathbf{P}(W > u, X_A - X_B > v, X_A > X_B) \\ &= 2\mathbf{P}(W > u, X_B - X_A > v, X_A < X_B) \\ &= 2\mathbf{P}(X_A > u, X_B > X_A + v) \\ &= 2\int_u^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x}\left(\int_{x+v}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha y}dy\right)dx \\ &= e^{-2\alpha u}e^{-\alpha v} \end{aligned}$$

Maintenant, le vecteur $(W, |X_A - X_B|)$ est indépendant de X_C. Donc les variables aléatoires $W, |X_A - X_B|$ et X_C sont indépendantes. Puisque W est indépendante de $\max(|X_A - X_B|, X_C)$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z < z) &= \mathbf{P}(W + \max(|X_A - X_B|, X_C) < z) \\ &= \int_0^z \mathbf{P}(\max(|X_A - X_B|, X_C) < z - x) 2\alpha e^{-2\alpha x}dx \\ &= 2\alpha \int_0^z (1 - e^{-\alpha(z-x)})^2 e^{-2\alpha x}dx \\ &= 1 - 4e^{-\alpha z} + (3 + 2\alpha z)e^{-2\alpha z}. \end{aligned}$$

UNISAT-ABIDJAN

MATH-INFO-ECO-STAT

LICENCE 3

PROBABILITES

LQUES EXERCICES RESOLUS DE PROBABILITE

:URS ALEATOIRES OU VARIABLES MULTIVARIEES

UNISAT 2011-2012

Exercices

Lois conjointes, marginales et conditionnelles

4.1

On lance 3 fois une pièce de monnaie. Définissons X la variable aléatoire qui compte le nombre de piles et Y le numéro du lancement qui donne face pour la 1re fois. (On pose $Y = 0$ si l'on n'obtient pas de face en 3 jets.) Trouver les probabilités $P(X = i, Y = j)$ pour $(i, j) \in \{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}$. Constater que $\sum_{i,j} P(X = i, Y = j) = 1$.

4.2

Soit X un chiffre choisi aléatoirement parmi les entiers 1, 2, 3, 4. Soit Y un autre chiffre choisi aléatoirement parmi les chiffres au moins aussi grands que X, mais inférieurs ou égaux à 10.

1. Trouver la loi de probabilité de X et la loi de probabilité conditionnelle de $Y \mid X = x$ pour tout $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Déterminer la loi de probabilité conjointe de (X, Y).

4.3

Je viens d'ouvrir une loterie écologique. Les clients en ont en effet assez de ces systèmes informatiques compliqués auxquels ils ne comprennent rien. Ici, il s'agit seulement de lancer une paire de dés ordinaires, après avoir payé 10 €. On note le plus petit des 2 résultats (ou le résultat unique en cas d'égalité). Si c'est 1 ou 2 on perd les 10 €. Si c'est 3 ou 4, on rejoue. Si c'est 5 ou 6, je donne une excellente bouteille de champagne, qui me revient à 50 €. Comme vous l'imaginez, la simplicité de mon système de loterie fait fureur (ainsi que son appellation écologique) et je gagne en moyenne 1 000 € par jour. À combien de lancers de dés par jour cela correspond?

4.4

Les variables aléatoires X et Y ont la densité conjointe

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x^2 y} & \text{si } x \geq 1 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $P(X^2 Y > 1)$.

2. Calculer les densités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.
   X et Y sont-elles indépendantes?

4.5

Les variables aléatoires X et Y ont la densité conjointe

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy + \frac{3}{2}y^2 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Vérifier que $f(x,y)$ est une densité.
2. Trouver les densités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.
3. Trouver les densités conditionnelles $f_{X|Y=y}(x)$ et $f_{Y|X=x}(y)$.
4. Calculer $P((X,Y) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}])$.
5. Trouver $P(X < Y)$.
6. Trouver $E(Y \mid X = x)$.
7. Soit la variable aléatoire $Z = E(Y \mid X)$.
   (a) Quelle est la distribution de Z?
   (b) Trouver $E(Z)$.

4.6 (Problème de Buffon)

Sur un plan on trace des droites parallèles distantes d'une unité de longueur. On y jette au hasard une aiguille de longueur 1. On repère l'aiguille grâce à la distance X entre le milieu de celle-ci et la parallèle la plus proche et grâce à l'angle θ entre l'aiguille et une perpendiculaire aux lignes. On suppose que X suit la loi uniforme sur $(0, 1/2)$, que θ suit la loi uniforme sur $(0, \pi/2)$ et que X et θ sont indépendants. Donner la loi du couple (X, θ) et trouver la probabilité que l'aiguille rencontre une des droites (l'alternative étant que l'aiguille soit complètement située dans une des bandes délimitées par les lignes).

4.7

Marine et Laure se sont données rendez-vous à l'Arena à 20 h 30 environ. Si Marine arrive entre 20 h 15 et 20 h 45 et si Laure arrive indépendamment entre 20 h 00 et 21 h 00, trouver la probabilité que celle qui arrive en premier n'attende pas plus que 5 minutes. Quelle est la probabilité que Marine arrive en premier? (On considère que les arrivées sont uniformément distribuées.)

4.8

Selon l'horaire, un train doit arriver à la gare à 12 h 00 et la quitter à 12 h 07. Le retard X, en minutes, de l'arrivée à la gare est uniformément distribué sur l'intervalle (-2, 3). Le temps de stationnement à la gare Y est indépendant de X et est uniformément distribué sur l'intervalle (3, 5). Le train ne quitte jamais la gare avant 12 h 07. Trouver la fonction de distribution de Z, le retard avec lequel le train quitte la gare.

Indication : exprimer Z en fonction de X et Y et utiliser une représentation graphique dans le plan (x, y).

4.9

La densité conjointe des variables aléatoires X et Y est donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}/y & \text{si } 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $P(X > 1 \mid Y = y)$.

4.10

La densité conjointe de X et Y est donnée par

$$f(x,y) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \exp\left[-\frac{3}{2}(x^2 + y^2 - xy)\right], \quad (x,y) \in \mathcal{R}^2.$$

1. Trouver les densités marginales $f_X(x)$ et $f_Y(y)$.
   Indication: utiliser les propriétés de l'intégrale d'une densité normale.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
3. Trouver la densité conditionnelle $f_{X|Y}(x \mid y)$.
4. Calculer $E(X \mid Y = y)$.
   Quelle est la distribution de la variable aléatoire $E(X \mid Y)$?

4.11

Soient X et Y les scores à 2 examens. Les données historiques montrent une dépendance entre X et Y qui est modélisée par la densité bivariée

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{756}(x^2 + xy), & \text{si } 0 < x < 6 \text{ et } 0 < y < 6 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Trouver la densité marginale $f_X(x)$.
2. Trouver la densité conditionnelle $f_{Y|X}(y)$.
3. Calculer $P(X < Y)$.
4. Calculer le meilleur prédicteur $E(Y \mid X)$ et donner son espérance et sa distribution.

UNISAT 2011-2012

Loi normale multivariée

4.12

Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Trouver la densité conjointe $f(x_1, \ldots, x_n)$ de $(X_1, \ldots, X_n)$.
2. Représenter les courbes de niveau (pour le cas $n = 2$) $f(x_1, x_2) = C$.

4.13

Les ventes annuelles du rayon jouets d'une grande surface sont représentées par une variable aléatoire normale X d'espérance μ_X et de variance σ_X^2. Le bénéfice l'est par une variable aléatoire normale Y d'espérance μ_Y et de variance σ_Y^2. Le paramètre ρ_{XY} désigne la corrélation entre les ventes et le bénéfice.

1. Si les ventes s'élèvent à un montant x, quelle est la densité de probabilité du bénéfice?
2. Quelle est la densité de $E(Y \mid X)$?

4.14

Supposons que l'indice *Dow Jones*, noté D, soit une variable aléatoire distribuée selon la loi $\mathcal{N}(\nu, \tau^2)$. Soit S le *Swiss Market Index*. La densité conditionnelle de S sachant que $D = d$ est une loi normale d'espérance d et de variance σ^2.

1. Quelle est la distribution conjointe du couple (D, S)?
2. Quelle est la distribution conditionnelle de D sachant que $S = s$?
3. À partir de données historiques on connaît les valeurs de ν, τ et σ. Ayant observé une valeur s pour le *Swiss Market Index*, calculer le meilleur prédicteur pour l'indice *Dow Jones*.

Combinaisons linéaires de variables aléatoires

4.15

Soit S une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p. Représenter S comme une somme de variables aléatoires indépendantes et calculer l'espérance et la variance de S.

4.16

La variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une somme de variables aléatoires indépendantes de même distribution. Calculer son espérance, sa variance et sa distribution lorsque :

1. chaque X_i suit une loi de Poisson de paramètre λ ;
2. chaque X_i suit une loi Gamma de paramètres λ et k.

4.17

On considère un portefeuille avec 2 actifs. Son rendement R_p s'exprime comme combinaison linéaire des rendements R_1 et R_2 des 2 actifs : $R_p = a_1 R_1 + (1 - a_1) R_2$. On connaît les rendements moyens μ_1 et μ_2, les risques σ_1 et σ_2 et la corrélation entre les 2 actifs ρ_{12}.

1. Exprimer le risque σ_p du portefeuille en fonction de la proportion a_1 du premier actif.
2. Quelle doit être la proportion a_1 du 1er actif pour que le risque du portefeuille soit minimal ?
3. On note μ_p le rendement moyen du portefeuille. Exprimer σ_p en fonction de μ_p.
4. Cas particulier : $\mu_1 = 14$ %, $\mu_2 = 8$ %, $\sigma_1 = 6$ %, $\sigma_2 = 3$ %.
   Pour $\rho_{12} = 0$, on a le tableau suivant :

a_1	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
μ_P	8.00	9.20	10.40	11.60	12.80	14.00
σ_P	3.00	2.68	3.00	3.79	4.84	6.00

   Faire des tableaux semblables pour $\rho_{12} = 1, 0.5$ et -1.
5. Représenter les courbes des portefeuilles possibles dans l'espace des risques et des rendements moyens. Par convention dans ce domaine, σ_p est en abscisse et μ_p en ordonnée.

4.18

Le nombre de clients se rendant à un grand magasin donné dans l'espace d'une journée est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 50. La somme dépensée par chacun des clients quotidiens du magasin est une variable aléatoire d'espérance 8 €. On admet que les dépenses d'un client ne dépendent ni de celles des autres clients, ni du nombre total de clients pour la journée.
Quelle est l'espérance du chiffre d'affaires quotidien du magasin ?

4.19

Soient X et Y 2 variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim Bin(n,p)$ et $Y \sim Bin(m,p)$. On définit $Z = X + Y$.

1. Quelle est la distribution de Z?
2. Quelle est la distribution de $X \mid Z$?
3. Trouver $E(X \mid Z)$.

4.20

Soient X et Y 2 variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}(0,1)$. Quelle est la densité de $X + Y$?

Exercices combinés

4.21

Soit X une variable aléatoire binaire qui représente « l'état d'incertitude sur la scène internationale ». Supposons pour simplifier que X ne puisse admettre que 2 états notés N (« situation normale ») et E (« situation exceptionnelle », comme par exemple une guerre ou un attentat). Soit $P(X = N) = 0{,}95$. De plus, on considère le rendement R d'un actif financier qui suit le modèle stochastique

$$\log(R) = -\frac{\sigma^2}{2} + \sigma Y,$$

où $\sigma > 0$ et Y est une variable aléatoire dont la distribution conditionnelle sachant $\{X = N\}$ est $\mathcal{N}(0,1)$, et sachant $\{X = E\}$ est $\mathcal{N}(0.5^2)$.

1. Interpréter ce modèle : quel effet veut-on capturer avec la distribution conditionnelle postulée ?
2. Calculer l'espérance et la variance de Y.
3. En utilisant le point 2., déduire l'espérance et la variance de $Z = \log(R)$.
4. Écrire la densité $f_Y(y)$ de Y et, en utilisant le fait que la somme de 2 variables aléatoires normales reste une variable aléatoire normale, donner la distribution de Y.
5. Montrer que R suit la distribution

$$f_R(r) = \frac{1}{\sqrt{4{,}4\pi\sigma^2}} \frac{e^{(\log r + \frac{\sigma^2}{2})^2/(4{,}4\sigma^2)}}{r},$$

c'est-à-dire la loi log-normale de paramètres $(-\sigma^2/2,\ 2{,}2\sigma^2)$.

4.22

Pour chaque automobiliste, les compagnies d'assurance déterminent un indicateur B de qualité de conduite qui est lié à la classe de bonus de l'automobiliste. Des petites valeurs de B caractérisent un bon automobiliste qui se trouve dans une classe à bas risque.
Des études actuarielles indiquent que la distribution de la variable aléatoire B dans la population des automobilistes d'une certaine région est une distribution exponentielle avec espérance 0,1.
Soit N_i le nombre d'accidents durant l'année i (à partir de la date de l'obtention du permis de conduire) pour un automobiliste donné. Le nombre annuel d'accidents causés par un automobiliste, étant donné $B = b$, suit une distribution de Poisson de paramètre b. On suppose aussi que, étant donné $B = b$, il y a indépendance entre le nombre d'accidents causés par un automobiliste durant une certaine année et ceux des années suivantes ou précédentes.

1. Quelle est la probabilité qu'un automobiliste tiré au hasard n'ait aucun accident pendant les 3 premières années d'observation?
2. On observe un automobiliste tiré au hasard. Soit K la variable aléatoire qui désigne la 1re année pendant laquelle cet automobiliste cause un accident. Déterminer la loi de K, c'est-à-dire $P(K = k)$ pour $k = 0, 1, 2, \ldots$
3. Déterminer l'espérance conditionnelle $E(K \mid B)$.

4.23

On s'intéresse à évaluer la qualité des investisseurs institutionnels. On modélise celle-ci à l'aide d'une variable aléatoire X à 4 modalités (1, 2, 3, 4) : « 4 = très bonne connaissance du marché », « 3 = bonne connaissance du marché », « 2 = faible connaissance du marché » et « 1 = aucune connaissance du marché ». Pour comprendre la répartition des investisseurs entre ces 4 classes, on connaît la différence entre les prévisions données par un groupe d'investisseurs et la valeur réelle du marché mesurée par le *Dow Jones* et le *Nasdaq*. On notera D la variable aléatoire représentant cette différence entre le *Dow Jones* et la prévision d'un investisseur donné et N entre le *Nasdaq* et la prévision de ce même investisseur. On suppose que D suit une loi normale avec espérance 10 (unités en 10^3\$) et variance 2, et N une loi normale avec espérance 3 et variance 1. Enfin, soit $Y(\alpha)$ la variable aléatoire qui représente la somme pondérée des différences entre les prévisions et les valeurs réelles, c'est-à-dire $Y(\alpha) = \alpha D + (1 - \alpha)N$, où α est un coefficient positif connu.

1. Calculer la distribution de $E(Y(\alpha))$ et $\mathrm{var}(Y(\alpha))$ en sachant que la corrélation entre D et N est 0,8.
2. Trouver la distribution de $Y(\alpha)$ en supposant pour simplifier que D et N sont indépendantes.
3. En utilisant le point 2., calculer la densité de la variable aléatoire $Z = \exp(-Y(\alpha))$.

4. De plus, on connaît la relation entre X et $Y(\alpha)$ à travers la distribution conditionnelle de $X \mid Y(\alpha)$.

$j =$	1	2	3	4
$P(X = j \mid Y(\alpha) = y)$	$1-5z$	$2z$	$2z$	z

où $z = \exp(-y)$.
En utilisant 3., calculer $E(X)$.

5. Quelle est la probabilité que l'investisseur institutionnel ait une très bonne connaissance du marché?

4.24

Une compagnie pétrolière a décidé de forer dans 10 localités. La probabilité de trouver du pétrole dans une localité est seulement de 1/5, mais si du pétrole est trouvé, alors le profit P_i de la compagnie par la vente du pétrole d'une localité i (en excluant le coût du forage) suit une loi exponentielle d'espérance 5 Mio€.
Soit N la variable aléatoire qui représente le nombre de localités où l'on trouve du pétrole et Z la somme des profits tirés des ventes du pétrole de chaque localité.

1. Exprimer la variable aléatoire Z en fonction de N et des P_i.
2. Calculer $P(Z > 10\text{Mio} \mid N = 1)$ et $P(Z > 10\text{Mio} \mid N = 2)$.
3. Trouver $E(Z \mid N = n)$ et $E(Z)$.
4. Est-ce que la probabilité d'avoir un profit supérieur à 20 Mio€ en vendant le pétrole est plus grande que 1/2?

4.25

Une compagnie d'assurance modélise les montants de dédommagements lors d'accidents comme des variables aléatoires indépendantes $D_1, D_2, \dots$ suivant une loi exponentielle avec espérance $1/\mu$, avec $\mu > 0$. En outre, le nombre d'accidents $N(t)$ dans un intervalle de temps $[0, t]$ est modélisé selon une variable aléatoire de Poisson $\mathcal{P}(\lambda t)$, avec $\lambda > 0$.

Soit $S = \sum_{i=1}^{N(t)} D_i$ le montant total des dédommagements dans l'intervalle $[0, t]$.

1. À l'aide du théorème central limite, donner une approximation de la distribution conditionnelle de $S \mid N(t)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de S.
3. Exprimer la densité de S en fonction de la densité conditionnelle de $S \mid N(t)$ et de la loi de probabilité de $N(t)$.

UNISAT 2011-2012

4. Pour prévoir ses réserves, la compagnie doit connaître la probabilité que S excède une certaine limite s_0. Exprimer $P(S > s_0)$ à l'aide de la fonction de répartition de la distribution normale centrée réduite.
Indication : utiliser le point 3.

Corrigés

4.1

Après avoir dénombré toutes les possibilités, on représente les probabilités de chaque occurrence des couples (X, Y) dans le tableau suivant.

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	somme
$Y=0$	0	0	0	1/8	1/8
$Y=1$	1/8	1/4	1/8	0	1/2
$Y=2$	0	1/8	1/8	0	1/4
$Y=3$	0	0	1/8	0	1/8
somme	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Par exemple

$$P(Y=1, X=1) = P(FPF \text{ ou } FFP),$$

où F et P représentent respectivement un tirage « face » et « pile ». On retrouve les lois marginales de X et Y dans la ligne et la colonne « somme ».

4.2

1. La loi de probabilité de X est

$$P(X=x) = \frac{1}{4}, \qquad x \in \{1, 2, 3, 4\},$$

et celle de $Y \mid X = x$

$$P(Y=y \mid X=x) = \frac{1}{10-(x-1)}, \qquad y \in \{x, x+1, \ldots, 10\}.$$

2. La loi de probabilité conjointe de X et Y est obtenue par la relation

$$P(X=x, Y=y) = P(Y=y \mid X=x)P(X=x), \quad y \geq x, \quad x \in 1, 2, 3, 4.$$

Sous forme de tableau récapitulatif, cela donne :

$y=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X=1$	1/40	1/40	1/40	1/40	1/40	1/40	1/40	1/40	1/40	1/40
$X=2$	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
$X=3$	0	0	1/32	1/32	1/32	1/32	1/32	1/32	1/32	1/32
$X=4$	0	0	0	1/28	1/28	1/28	1/28	1/28	1/28	1/28

4.3

Soit X la variable aléatoire qui correspond au résultat du 1^er^ dé et Y celle qui correspond au 2^e^. Sous forme de tableau, mes gains sont :

	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	$X=6$
$Y=1$	10	10	10	10	10	10
$Y=2$	10	10	10	10	10	10
$Y=3$	10	10	0	0	0	0
$Y=4$	10	10	0	0	0	0
$Y=5$	10	10	0	0	-40	-40
$Y=6$	10	10	0	0	-40	-40

Chaque occurrence arrive avec une probabilité de 1/36. Par conséquent, l'espérance de mes gains sur 1 lancer est la somme du tableau divisée par 36

$$E(G) = \frac{1}{36}(10\cdot 20 + 0\cdot 12 - 40\cdot 4) = \frac{10}{9}.$$

Pour n lancers, l'espérance devient

$$E(\text{gain total}) = nE(G) = \frac{10}{9}n.$$

et comme on cherche n tel que le gain total soit égal à 1 000, on trouve $n = 900$.

4.4

1. Le domaine d'intégration est défini par les relations $X^2Y > 1$, $X > 1$ et $Y > 0$. Autrement dit, on intègre y de $1/x^2$ à l'infini et x sur tout son domaine.

$$\begin{aligned} P(X^2Y>1) &= \int_1^\infty \left(\int_{1/x^2}^\infty \exp(-x^2y)dy\right)dx \\ &= \int_1^\infty \left(-\frac{1}{x^2}\exp(-x^2y)\right)\Big|_{y=1/x^2}^{y=\infty} dx \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}e^{-1}dx = -e^{-1}\frac{1}{x}\Big|_{x=1}^{x=\infty} = e^{-1}. \end{aligned}$$

2. La densité marginale de X est

$$f_X(x) = \int_0^\infty \exp(-x^2y)dy = \left[-\frac{1}{x^2}\exp(-x^2y)\right]_{y=0}^{y=\infty} = \frac{1}{x^2}, \quad x \geq 1.$$

Pour la densité marginale de Y, il faut intégrer une fonction de type gaussien (e^{-x^2}). Pour y parvenir, nous allons faire apparaître la densité d'une loi normale

$$f_Y(y) \;=\; \int_1^{\infty} \exp(-x^2 y)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{2y}} \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sqrt{2y})} \exp(-x^2 y)dx.$$

Dans l'intégrale figure à présent la fonction de distribution d'une variable aléatoire X^* normale d'espérance nulle et de variance $1/\sqrt{2y}$. Par conséquent

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{\pi}{y}} P(X^* > 1) = \sqrt{\frac{\pi}{y}} P(Z > \sqrt{2y}),$$

où Z suit une loi normale centrée et réduite. Finalement

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{\pi}{y}}(1 - \Phi(\sqrt{2y})), \quad y > 0.$$

Comme $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$, X et Y ne sont pas indépendantes.

4.5

1. Afin de vérifier que $f(x, y)$ est une densité, on l'intègre par rapport à x et y sur tout leur domaine

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(2xy + \frac{3}{2}y^2\right) dxdy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{3}{2}xy^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1} dy$$
$$= \int_0^1 \left(y + \frac{3}{2}y^2\right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = 1.$$

   La fonction $f(x,y)$ est bien une densité.

2. La densité marginale $f_X(x)$ de X est

$$f_X(x) = \int_0^1 \left(2xy + \frac{3}{2}y^2\right) dy = x + \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1,$$

   et celle de Y

$$f_Y(y) = \int_0^1 \left(2xy + \frac{3}{2}y^2\right) dx = y + \frac{3}{2}y^2, \quad 0 < y < 1.$$

3. On trouve la densité conditionnelle $f_{X|Y=y}(x)$ à l'aide de la relation

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

   Ainsi

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{4x + 3y}{2 + 3y}, \quad 0 < x < 1.$$

   Et, de la même manière,

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{4xy + 3y^2}{2x + 1}, \quad 0 < y < 1.$$

4. La probabilité que X et Y appartiennent à l'intervalle $[0.1/2] \times [0.1/2]$ est

$$\begin{aligned}
P((X,Y) \in [0.1/2] \times [0.1/2]) &= \int_0^{1/2}\int_0^{1/2}\left(2xy + \frac{3}{2}y^2\right)dxdy \\
&= \int_0^{1/2}\left(x^2y + \frac{3}{2}xy^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1/2} dy \\
&= \int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4}y + \frac{3}{4}y^2\right)dy \\
&= \left(\frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{4}y^3\right)\Big|_{y=0}^{y=1/2} = \frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

5. Pour obtenir la probabilité que Y soit supérieur à X, on intègre sur le domaine suivant

$$\begin{aligned}
P(X < Y) &= \int_0^1\int_0^y\left(2xy + \frac{3}{2}y^2\right)dxdy = \int_0^1\left(x^2y + \frac{3}{2}xy^2\right)\Big|_{x=0}^{x=y} dy \\
&= \int_0^1\left(y^3 + \frac{3}{2}y^3\right)dy = \frac{5}{8}y^4\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{5}{8}.
\end{aligned}$$

6. Calculons l'espérance conditionnelle $E(Y \mid X = x)$:

$$\begin{aligned}
E(Y \mid X = x) &= \int_0^1 y f_{Y \mid X=x}(y)dy = \int_0^1 y\frac{4xy + 3y^2}{2x+1}dy \\
&= \frac{1}{2x+1}\left(\frac{4}{3}xy^3 + \frac{3}{4}y^4\right)\Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{12}\frac{16x+9}{2x+1}.
\end{aligned}$$

7. Soit $Z = E(Y \mid X = x)$. Puisque X est défini entre 0 et 1, le domaine de Z est $[25/36.3/4]$.

   (a) La fonction de répartition de Z est

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= P(Z < z) = P\left(\frac{1}{12}\frac{16x+9}{2x+1} < z\right) \\
&= P\left(X < \frac{12z-9}{16-24z}\right) = F_X\left(\frac{12z-9}{16-24z}\right).
\end{aligned}$$

   et sa fonction de densité

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= f_X\left(\frac{12z-9}{16-24z}\right)\frac{3}{8}\frac{-1}{(2-3z)^2} \\
&= -\frac{3}{8}\frac{1}{(2-3z)^2}\left(\frac{3}{8}\left(\frac{4z-3}{2-3z}\right) + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{64(2-3z)^3}, \quad \frac{25}{36} < z < \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

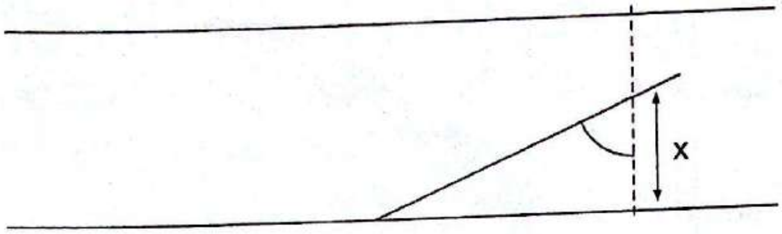


Fig. 4.1 – Illustration de l'exercice 4.6.

(b) L'espérance de Z peut se calculer de manière rapide pour éviter l'intégrale de $f_Z(z)$

$$E(Z) = E(E(Y \mid X)) = E(Y) = \int_0^1 \left(y^2 + \frac{3}{2}y^3\right) dy = \frac{17}{24}.$$

4.6

Les lois marginales de X et θ sont uniformes et leur fonction de densité sont

$$f_\theta(\theta) = \frac{2}{\pi}, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

et

$$f_X(x) = 2, \qquad 0 < x < \frac{1}{2}.$$

Les variables aléatoires X et θ sont indépendantes et, par conséquent, la densité conjointe de X et θ est

$$f(x,\theta) = \frac{4}{\pi}.$$

Au vu de la figure 4.1, il faut que l'hypoténuse du triangle en θ soit plus petite que 1/2. De cette manière, l'aiguille chevauchera forcément la droite. On a donc la condition suivante sur X

$$\frac{x}{\cos\theta} < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{\cos\theta}{2}.$$

La probabilité que l'aiguille touche une droite est donc

$$P\left((\theta, x) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\cos\theta}{2}\right]\right) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta/2} \frac{4}{\pi} dx d\theta =$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi} x \Big|_{x=0}^{x=\cos\theta/2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos\theta}{\pi} d\theta = \frac{2}{\pi} \sin\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

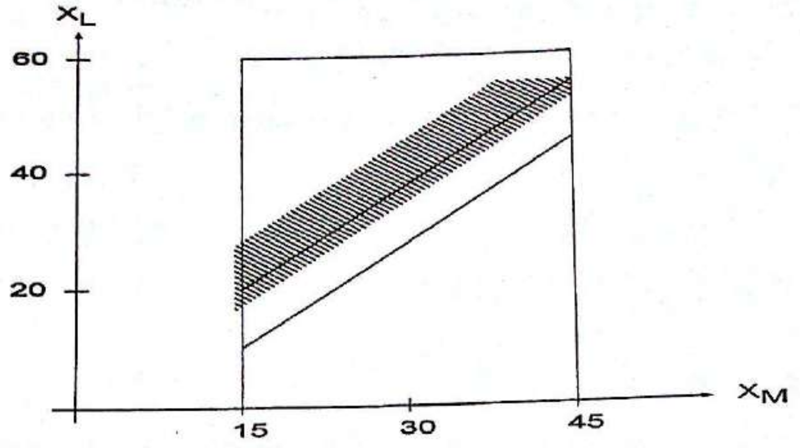


Fig. 4.2 – Domaine d'intégration de l'exercice 4.7.

4.7

Soient X_M et X_L les variables aléatoires donnant l'heure d'arrivée (en minutes après 20 h 00) de Marine et Laure. Elles suivent des lois uniformes respectivement de paramètres (15, 45) et (0, 60).

1. On cherche la probabilité que les 2 heures d'arrivée aient un écart inférieur à 5 minutes, soit

$$\begin{aligned}
&P(\mid X_L - X_M \mid < 5) = \\
&\quad = \; P(-5 < X_L - X_M < 5) = P(X_M - 5 < X_L < X_M + 5) \\
&\quad = \; \iint_{\mathcal{D}} \frac{1}{60}\frac{1}{30} dx_M dx_L,
\end{aligned}$$

où le domaine de définition $\mathcal{D}$ correspond à l'aire hachurée représentée sur la figure 4.2. Ainsi

$$\begin{aligned}
P(\mid X_L - X_M \mid < 5) &= \int_{15}^{45} \int_{x_M-5}^{x_M+5} \frac{1}{30}\frac{1}{60} dx_L dx_M \\
&= \int_{15}^{45} \frac{1}{1800}(x_M + 5 - x_M + 5) dx_M \\
&= \frac{1}{180}\int_{15}^{45} dx_M = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

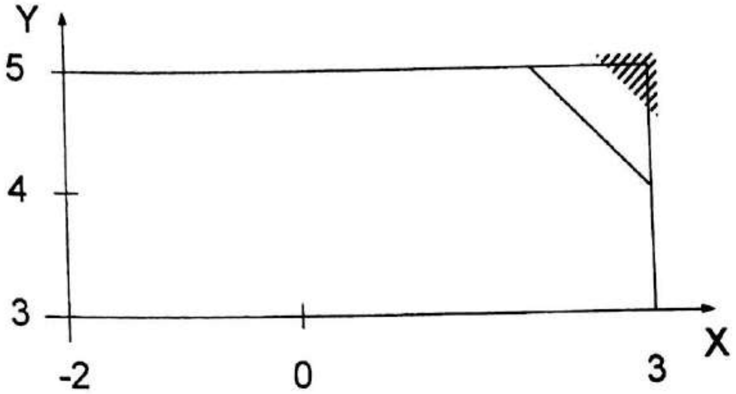


Fig. 4.3 – Représentation graphique du retard du train de l'exercice 4.8.

2. La probabilité que Marine arrive en premier est

$$P(X_M < X_L) = \int_{15}^{45} \int_{x_M}^{60} \frac{1}{30} \frac{1}{60} dx_L dx_M = \frac{1}{2}.$$

4.8

L'heure en minutes après 12 h 00 à laquelle le train quitte la gare est égale à la somme du retard X et du temps de stationnement Y. Or, cette somme ne peut pas être inférieure à 7 parce que le train ne part jamais en avance sur son horaire. Par conséquent, l'heure de départ sera égale à $\max(X+Y,7)$ et le retard Z

$$Z = \max(X+Y,7) - 7 = \max(X+Y-7,0).$$

La figure 4.3 donne une représentation du retard dans le plan (x,y).

Nous savons que le retard Z est supérieur ou égal à 0 et qu'il ne peut pas dépasser 1 minute car $X+Y-7 \leq 1$. La fonction de répartition de Z est alors

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ P(X+Y-7 \leq z) & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & \text{si } z \geq 1. \end{cases}$$

Il faut donc calculer $P(X+Y-7 \leq z)$ et nous allons utiliser un agrandissement (figure 4.4) de l'aire hachurée de la figure 4.3. Comme les distributions de X et Y sont uniformes, le calcul de cette probabilité revient à faire le rapport de

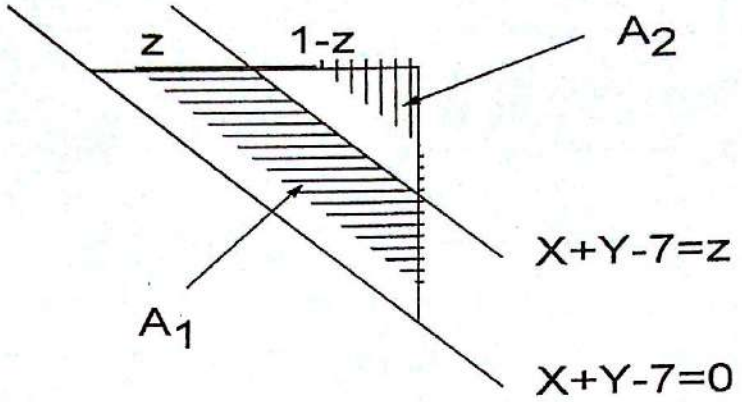


Fig. 4.4 – Agrandissement de l'aire hachurée de la figure 4.3 de l'exercice 4.8.

l'aire hachurée horizontalement (A_1) sur l'aire du triangle ($A_T = A_1 + A_2$) et on obtient

$$\begin{aligned} P(X+Y-7 \leq z) &= \frac{\text{aire } A_1}{\text{aire } A_T} = \frac{\text{aire } A_T - \text{aire } A_2}{\text{aire } A_T} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1-z)^2}{\frac{1}{2}} = 1 - (1-z)^2 = 2z - z^2. \end{aligned}$$

4.9

Pour obtenir la probabilité conditionnelle de $X \mid Y$, il faut calculer la densité marginale de Y

$$f_Y(y) = \int_0^\infty \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{x}{y} - y\right) dx = \frac{e^{-y}}{y} \left(-y \exp\left(-\frac{x}{y}\right)\right)\Big|_{x=0}^{x=\infty} = e^{-y}, \quad y > 0$$

et ainsi obtenir la densité conditionnelle

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{x}{y}\right), \quad x > 0, \quad y > 0.$$

La probabilité cherchée est donc

$$P(X > 1 \mid Y = y) = \int_1^\infty \frac{1}{y} \exp\left(-\frac{x}{y}\right) dx = \exp\left(-\frac{1}{y}\right).$$

4.10

1. Pour déterminer la densité marginale de X, on intègre la densité conjointe sur le domaine de Y

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \exp\left(-\frac{3}{2}(x^2+y^2-xy)\right) dy \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{3}{2}(y^2-xy)\right) dy. \end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale, on complète le carré afin de faire apparaître la densité d'une variable aléatoire normale et on obtient

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \exp\left(-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x^2\right) \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{3} \exp\left(-\frac{3}{2}\left(y-\frac{x}{2}\right)^2\right) dy}_{=1} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{9}{8}x^2\right). \end{aligned}$$

On voit donc que $X \sim \mathcal{N}(0, 4/9)$. La fonction de densité conjointe est symétrique en x et y et il est donc inutile de calculer la densité marginale de Y, c'est la même que celle de X

$$f_Y(y) = \frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{9}{8}y^2\right).$$

Ainsi, $Y \sim \mathcal{N}(0, 4/9)$.

2. On vérifie facilement que le produit des densités marginales est différent de la densité conjointe, ce qui signifie que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
3. La densité conditionnelle de $X \mid Y = y$ s'écrit

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\exp\left(-\frac{3}{2}(x^2+y^2-xy)\right)}{\frac{3}{2\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{9}{8}y^2\right)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \exp\left(-\frac{3}{2}\left(x^2+\frac{1}{4}y^2-xy\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \exp\left(-\frac{3}{2}\left(x-\frac{y}{2}\right)^2\right). \end{aligned}$$

et par conséquent, $X \mid Y = y \sim \mathcal{N}(y/2, 1/3)$.

4. L'espérance de $X \mid Y = y$ est directement donnée par le calcul précédent : elle vaut $E(X \mid Y = y) = y/2$. La variable aléatoire $U = E(X \mid Y) = Y/2$ suit une loi normale d'espérance nulle et de variance $1/9$.

4.11

1. **La densité** marginale de X est égale à la densité conjointe intégrée sur le domaine de Y

$$f_X(x) = \int_0^6 \frac{1}{756}(x^2 + xy)dy = \frac{1}{126}(x^2 + 3x).$$

2. **La densité** conditionnelle de $Y \mid X = x$ est le rapport entre la densité conjointe et la densité marginale de X

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{6}\frac{x+y}{x+3}.$$

3. On calcule à présent la probabilité que X soit inférieur à Y. On résout donc l'intégrale suivante

$$P(X < Y) = \int_0^6 \left[\int_0^y \frac{1}{756}(x^2 + xy)dx\right] dy = \int_0^6 \frac{5}{4536} y^3 dy = \frac{5}{14}.$$

4. Commençons par trouver l'espérance de $Y \mid X = x$

$$E(Y \mid X = x) = \int_0^6 y f_{Y|X=x}(y)dy = \int_0^6 \frac{1}{6}\frac{xy + y^2}{x+3} dy = 3\frac{x+4}{x+3}.$$

On crée maintenant une nouvelle variable aléatoire $Z = E(Y \mid X)$ définie sur le domaine $]10/3, 4[$. La fonction de répartition de Z est

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P\left(3\frac{x+4}{x+3} < z\right) =$$

$$= \quad P\left(X > 3\frac{z-4}{3-z}\right) = 1 - F_X\left(3\frac{z-4}{3-z}\right).$$

On en déduit sa fonction de densité $f_Z(z)$

$$f_Z(z) = -f_X\left(3\frac{z-4}{3-z}\right)\left|\frac{d}{dz}\left(3\frac{z-4}{3-z}\right)\right| = -\frac{27}{142}3\frac{z-4}{(z-3)^4}.$$

Finalement

$$E(Z) = \int_{10/3}^4 z f_Z(z)dz = \frac{63}{71}.$$

4.12

1. Comme toutes les variables aléatoires sont indépendantes, la densité conjointe est le produit des densités marginales

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

2. L'équation $f(x_1, x_2) = C$ donne

$$x_1^2 + x_2^2 = -2\log(2\pi C)$$

qui se trouve être l'équation d'un cercle centré sur l'origine et de rayon $\sqrt{-2\log(2\pi C)}$ pour $C < 1$.

4.13

La densité conjointe de X et Y est

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_X, y-\mu_Y)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x-\mu_X \\ y-\mu_Y \end{pmatrix}\right),$$

avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} \\ \sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

et

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_X^2(1-\rho_{XY}^2)} & -\frac{\rho_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y(1-\rho_{XY}^2)} \\ -\frac{\rho_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y(1-\rho_{XY}^2)} & \frac{1}{\sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)} \end{pmatrix}.$$

1. On calcule $f_{Y|X=x}(y)$

$$\begin{aligned}
f_{Y|X=x}(y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu_X, y-\mu_Y)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} x-\mu_X \\ y-\mu_Y \end{pmatrix}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_X^2}(x-\mu_X)^2\right)} \\
&= \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi(1-\rho_{XY}^2)}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left(\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. -2\frac{\rho_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y) + \left(1-(1-\rho_{XY}^2)\right)\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi(1-\rho_{XY}^2)}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y} - \rho_{XY}\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

et on voit que

$$Y \mid X \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY}(x-\mu_X), \sigma_Y^2(1-\rho_{XY}^2)\right).$$

2. La variable aléatoire $Z = E(Y \mid X)$ est définie par

$$Z = E(Y \mid X) = \mu_Y + \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY}(X-\mu_X).$$

Notons que $X - \mu_X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$ et que par conséquent

$$\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\rho_{XY}(X - \mu_X) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_Y^2\rho_{XY}^2).$$

Finalement

$$Z \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2\rho_{XY}^2).$$

4.14

Nous savons que $D \sim \mathcal{N}(\nu, \tau^2)$ et $S \mid D = d \sim \mathcal{N}(d, \sigma^2)$.

1. Calculons la distribution conjointe de S et D

$$\begin{aligned}
f_{S,D}(s, d) &= f_{S|D=d}(s) f_D(d) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(s-d)^2\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}\exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(d-\nu)^2\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{s^2}{\sigma^2} + \left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)d^2 - 2\frac{sd}{\sigma^2} - 2\frac{d\nu}{\tau^2} + \frac{\nu^2}{\tau^2}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}(s-\nu)^2 + \frac{2}{\sigma^2}s\nu - \frac{1}{\sigma^2}\nu^2 + \frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}(d-\nu)^2\right.\right. \\
&\quad \left.\left. +2\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}d\nu - \frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}\nu^2 - 2\frac{sd}{\sigma^2} - 2\frac{d\nu}{\tau^2} + \frac{\nu^2}{\tau^2}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}(s-\nu)^2 + \frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}(d-\nu)^2\right.\right. \\
&\quad \left.\left. +2\frac{s\nu}{\sigma^2} + 2\frac{s\nu}{\sigma^2} - 2\frac{sd}{\sigma^2} - 2\frac{\nu^2}{\sigma^2}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}(s-\nu, d-\nu)\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} s-\nu \\ d-\nu \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

où

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & -\frac{1}{\sigma^2} \\ -\frac{1}{\sigma^2} & \frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2} \end{pmatrix}, \quad \text{car} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2+\tau^2 & \tau^2 \\ \tau^2 & \tau^2 \end{pmatrix}.$$

On en conclut que

$$\begin{pmatrix} S \\ D \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \nu \\ \nu \end{pmatrix}, \Sigma\right).$$

et $S \sim \mathcal{N}(\nu, \sigma^2 + \tau^2)$.

2. De même, on calcule la distribution conditionnelle de $D \mid S = s$

$$
\begin{aligned}
f_{D|S=s}(s) &= \frac{f_{D,S}(s,d)}{f_S(s)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi\sigma\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2-\tau^2}{\sigma^2\tau^2}(d-\nu)^2 - 2\frac{(d-\nu)(s-\nu)}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}(s-\nu)^2\right]\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2-\tau^2)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma^2+\tau^2}(s-\nu)^2\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}(d-\nu)^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -2\frac{(d-\nu)(s-\nu)}{\sigma^2} + \frac{\tau^2}{\sigma^2(\sigma^2+\tau^2)}\right]\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}}(d-\nu) - \frac{\tau}{\sigma\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}\right]^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\sigma^2+\tau^2}{\sigma^2\tau^2}\left[d-\nu-\frac{\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}(s-\nu)\right]^2\right).
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$D \mid S = s \sim \mathcal{N}\left(\nu + \frac{\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}(s-\nu), \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}\right).$$

3. Le meilleur prédicteur est donné par l'espérance conditionnelle

$$E(D \mid S = s) = \nu + \frac{\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}(s-\nu) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\tau^2}\nu + \frac{\tau^2}{\sigma^2+\tau^2}s.$$

4.15

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes valant 1 avec une probabilité p. La variable aléatoire S est alors la somme de ces variables, $S = \sum_{i=1}^n X_i$, et par conséquent

$$E(S) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np,$$

et

$$\operatorname{var}(S) = \sum_{i=1}^n \operatorname{var}(X_i) = np(1-p).$$

4.16

Notons $\phi_X(t) = E\left(e^{tx}\right)$ la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X. On utilise pour cet exercice la relation

$$\phi_S(t) = \left(\phi_{X_1}(t)\right)^n.$$

où $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et les X_i sont indépendants.

1. Si X_i suit une loi de Poisson de paramètre λ, sa fonction génératrice des moments est

$$\phi_{X_i}(t) = \sum_{k=0} e^{tk} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \exp(\lambda(e^{-t} - 1))$$

et celle de S

$$\phi_S(t) = \exp(n\lambda(e^{-t} - 1)).$$

On voit que $\phi_S(t)$ est la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire de distribution de Poisson avec paramètre $n\lambda$. Ainsi, $E(S)$ $\text{var}(S) = n\lambda$.

2. La fonction génératrice des moments de X_i est

$$\phi_{X_i}(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\kappa-1}}{\Gamma(\kappa)} dx = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \int_0^\infty e^{(t-\lambda)x} x^{\kappa-1} dx.$$

On applique le changement de variable $y = -(t - \lambda)x$ pour obtenir

$$\phi_{X_i}(t) = \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \frac{1}{(\lambda - t)^\kappa} \underbrace{\int_0^\infty e^{-y} y^{\kappa-1} dy}_{=\Gamma(\kappa)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\kappa.$$

La fonction génératrice des moments de S devient

$$\phi_S(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{n\kappa}.$$

et on voit que S suit donc une loi Gamma de paramètres $(\lambda, n\kappa)$.

4.17

1. Le risque σ_p du portefeuille s'écrit

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= a_1^2\sigma_1^2 + (1 - a_1)^2\sigma_2^2 + 2a_1(1 - a_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ &= (\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2^2)a_1^2 - 2(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})a_1 + \sigma_2^2.\end{aligned}$$

2. Ce risque est minimal lorsque $\partial\sigma_p^2/\partial a_1 = 0$ car le coefficient multiplicatif $(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2^2)$ est positif. La dérivée partielle est

$$\frac{\partial\sigma_p^2}{\partial a_1} = 2a_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2^2) - 2(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}) = 0,$$

et enfin

$$a_1 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2^2}.$$

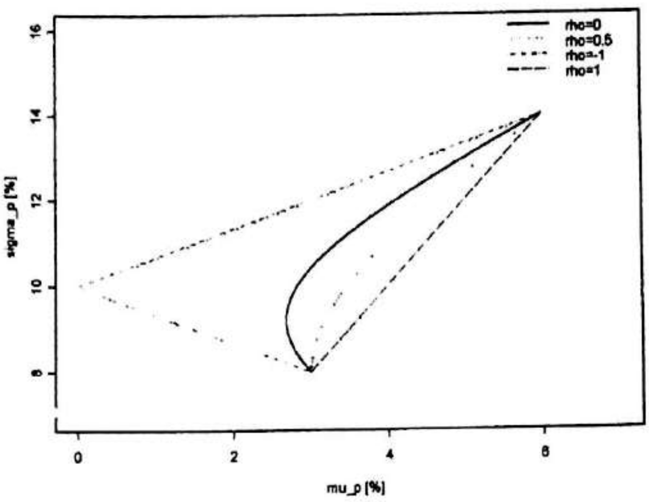


Fig. 4.5 – Courbes des portefeuilles possibles dans l'espace des risques et des rendements (exercice 4.17).

3. Le rendement moyen du portefeuille μ_p est une fonction de a_1 :

$$\mu_p = a_1\mu_1 + (1-a_1)\mu_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \frac{\mu_p - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}.$$

On substitue cette dernière équation dans l'expression de σ_p^2 pour avoir

$$\begin{aligned}
\sigma_p^2 &= \\
&= (\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2^2)\left(\frac{\mu_p - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 - 2(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12})\frac{\mu_p - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} + \sigma_2^2 \\
&= \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \sigma_2^2}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\mu_p^2 - 2\frac{\mu_2\sigma_1^2 + \mu_1\sigma_2^2 - (\mu_1 - \mu_2)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{(\mu_1 - \mu_2)^2}\mu_p \\
&\quad + \frac{\mu_2^2\sigma_1^2 + \mu_1^2\sigma_2^2 - 2\mu_1\mu_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{(\mu_1 - \mu_2)^2}
\end{aligned}$$

4. $\rho_{12} = 1$

a_1	0,00	0.20	0.40	0,60	0,80	1,00
μ_p	8,00	9.20	10.40	11.60	12.80	14.00
σ_p	3,00	3.60	4.20	4,80	5,40	6,00

$\rho_{12} = 0,5$

a_1	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
μ_p	8.00	9.20	10,40	11.60	12.80	14.00
σ_p	3.00	3.17	3.65	4.33	5.13	6.00

$\rho_{12} = -1$

a_1	0,00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
μ_p	8,00	9.20	10,40	11,60	12,80	14,00
σ_p	3,00	1.20	0.60	2.40	4.20	6.00

5. Les courbes sont représentées dans la figure 4.5.

4.18

Soient N une variable aléatoire qui compte le nombre de clients par jour et X_i une autre qui mesure les dépenses en francs du i^e client. On sait d'ores et déjà que $E(N) = 50$ et $E(X_i) = 8$. Le chiffre d'affaire quotidien est $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$. On ne peut en calculer directement l'espérance car la borne supérieure de sommation est une variable aléatoire. Pour contourner ce problème, on calcule d'abord l'espérance conditionnelle de $S \mid N = n$ et on en prend ensuite l'espérance par rapport à N

$$\begin{aligned} E_S(S) &= E_N(E_{S|N}(S \mid N)) = E_N\left(E_{S|N}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right) \\ &= E_N(NE(X_1)) = E(N)E(X_1) = 400. \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'indépendance entre X_1 et N. L'espérance du gain quotidien est de 400 €.

4.19

1. On veut trouver la distribution de la somme Z de 2 variables aléatoires binomiales indépendantes X et Y. Utilisons la fonction génératrice des moments

$$\phi_Z(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = (pe^t + 1 - p)^n(pe^t + 1 - p)^m = (pe^t + 1 - p)^{m-n}.$$

ce qui implique que Z suit une loi binomiale de paramètres $(m + n, p)$.

2. La probabilité d'observer $X = x \mid Z = z$ s'écrit

$$P(X = x \mid Z = z) = \frac{P(X = x, Z = z)}{P(Z = z)}.$$

Comme Z et X ne sont pas indépendants, on utilise le fait que $Z = X+Y$ et on obtient

$$P(X = x \mid Z = z) = \frac{P(X = x)P(Y = z - x)}{P(Z = z)} = \frac{\binom{n}{x}\binom{m}{z-x}}{\binom{m+n}{z}},$$

d'où $X \mid Z$ suit une loi hypergéométrique.

3. L'espérance de $X \mid Z = z$ est

$$E(X \mid Z = z) = \frac{nz}{m+n},$$

et, par conséquent

$$E(X \mid Z) = \frac{n}{m+n}Z.$$

4.20

La fonction de répartition de Z est

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(X + Y < z) = P(X < z - Y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-y} f_X(x)dx\right) f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y)f_Y(y)dy, \end{aligned}$$

et sa dérivée

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy.$$

Ici, la difficulté réside dans les bornes de l'intégrale car, X et Y suivant des lois uniformes $(0,1)$, l'intégrant est simplement égal à dy. On sait que Z peut varier entre 0 et 2 car $Z = X + Y$. Comme $0 < z - y < 1$ et $0 < y < 1$,

$$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{z-1}^{0} 0dy + \int_0^z dy = z & \text{si } 0 \leq z < 1 \\ \int_{z-1}^{1} dy + \int_1^z 0dy = 2 - z & \text{si } 1 \leq z < 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.21

1. La distribution conditionnelle postulée signifie qu'il y a plus de volatilité en période d'incertitude.
2. Calculons l'espérance de Y en utilisant les espérances conditionnelles

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(E(Y \mid X)) = \\ &= P(X = N) \cdot E(Y \mid X = N) + P(X = E) \cdot E(Y \mid X = E) \\ &= 0{,}95 \cdot 0 + 0{,}05 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Quant à la variance de Y

$$\begin{aligned}
\mathbf{var}(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) = E(Y^2) \\
&= P(X = N) \cdot E^2(Y \mid X = N) + P(X = E) \cdot E^2(Y \mid X = E) \\
&= 0.95 \cdot 1 + 0.05 \cdot 5^2 = 2.2.
\end{aligned}$$

3. L'espérance de Z est

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E(\log(R)) = E\left(-\frac{\sigma^2}{2} + \sigma Y\right) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2} + \sigma E(Y) = -\frac{\sigma^2}{2}
\end{aligned}$$

et sa variance

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(Z) &= \mathrm{var}(\log(R)) = \mathrm{var}\left(-\frac{\sigma^2}{2} + \sigma Y\right) \\
&= \sigma^2 \mathrm{var}(Y) = 2.2\sigma^2.
\end{aligned}$$

4. En utilisant la formule des probabilités totales, on peut écrire

$$f_Y(y) = P(X = N) \cdot f_{Y|X=N}(y) + P(X = E) \cdot f_{Y|X=E}(y)$$

et comme on se retrouve avec une somme de 2 lois normales, on en déduit que

$$Y \sim \mathcal{N}(0, 2.2).$$

5. Nous savons que

$$Z = \log(R) \sim \mathcal{N}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, 2.2\sigma^2\right)$$

et donc

$$R = \exp(Z) \sim \log\mathcal{N}\left(-\frac{\sigma^2}{2}, 2.2\sigma^2\right).$$

4.22

Soit N_i le nombre d'accidents durant l'année i pour un automobiliste et B un indicateur de la qualité de conduite. On sait que B suit une loi exponentielle avec espérance 0,1 et que $N_i \mid B = b$ suit une loi de Poisson de paramètre b. On suppose de plus que les $N_i \mid B = b$ sont indépendants.

1. On cherche la probabilité qu'un automobiliste n'ait pas d'accident pendant les 3 premières années d'observation

$$\begin{aligned}
&P(N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0) = \\
&= \int_0^\infty P(N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0 \mid B = b) f_B(b)db \\
&= \int_0^\infty P(N_1 = 0 \mid B = b)^3 f_B(b)db.
\end{aligned}$$

Lors de la dernière égalité, on a utilisé l'indépendance entre les $N_i \mid B = b$. On remplace maintenant les fonctions de distribution correspondantes pour obtenir

$$\begin{aligned} P(N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0) &= \int_0^\infty e^{-3b} \cdot 10e^{-10b} db \\ &= \int_0^\infty 10e^{-13b} db = -\frac{10}{13} e^{-b} \Big|_{b=0}^{b=\infty} = \frac{10}{13}. \end{aligned}$$

2. Si $K = k$, cela signifie que l'automobiliste n'a pas eu d'accident pendant les $k-1$ premières années et qu'il en a eu au moins un pendant la k^e. Donc

$$\begin{aligned} P(K = k) &= P(N_k \geq 1, N_{k-1} = 0, \ldots, N_1 = 0) \\ &= \int_0^\infty P(N_k \geq 1, N_{k-1} = 0, \ldots, N_1 = 0 \mid B = b) f_B(b) db \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-b}) e^{-b(k-1)} \cdot 10e^{-10b} db \\ & \int_0^\infty 10 \left(e^{-(9-k)b} - e^{-(10+k)b} \right) db \\ &= 10 \left(-\frac{1}{9+k} e^{-(9+k)b} - \frac{1}{10+k} e^{-(10+k)b} \right) \Big|_{b=0}^{b=\infty} \\ &= \frac{10}{(9+k)(10+k)}. \end{aligned}$$

3. On peut éviter le calcul de l'espérance conditionnelle de $K \mid B = b$ en remarquant que $K \mid B = b$ suit une loi géométrique avec probabilité $p = 1 - e^{-b}$. On utilise alors simplement l'espérance d'une telle loi :

$$E(K \mid B = b) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - e^{-b}}.$$

4.23

1. $E(Y(\alpha)) = E(\alpha D + (1-\alpha)N) = 10\alpha + (1-\alpha)3 = 7\alpha + 3$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(Y(\alpha)) &= \mathrm{var}(\alpha D) + \mathrm{var}((1-\alpha)N) + 2\alpha(1-\alpha) \text{ cov } (D,N) \\ &= 2\alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sqrt{2} \cdot 0,8 \\ & 0,74\alpha^2 + 0,26\alpha + 1. \end{aligned}$$

2. La somme de variables aléatoires normales suit une loi normale. Donc, grâce au point 1., $Y(\alpha) \sim \mathcal{N}(7\alpha + 3, 3\alpha^2 - 2\alpha + 1)$.
3. On voit en 1^er lieu que $-Y(\alpha) \sim \mathcal{N}(-7\alpha - 3, 3\alpha^2 - 2\alpha + 1)$, et ensuite $Z = e^{-Y(\alpha)} \sim \log\mathcal{N}(-7\alpha - 3, 3\alpha^2 - 2\alpha + 1)$, par définition de la loi log-normale.

4. **Par les propriétés** des espérances conditionnelles

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X \mid Y)) = E_Y(1 - 5Z + 4Z + 6Z + 4Z) \\ &= 1 + 9E(Z) \\ &= 1 + 9\exp(-7\alpha - 3 + \tfrac{3\alpha^2 - 2\alpha + 1}{2}) \\ &= 1 + 9\exp(\tfrac{3}{2}\alpha^2 - 8\alpha - \tfrac{5}{2}). \end{aligned}$$

5. **Par la** formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(X = 4 \mid y) f_Y(y) dy \\ &= \int_{\infty}^{+\infty} e^{-y} f_Y(y) dy = E(e^{-Y}) = M_Y(-1) \\ &= \exp\left(-7\alpha - 3 + \tfrac{3\alpha 2 - 2\alpha + 1}{2}\right) \\ &= \exp\left(\tfrac{3}{2}\alpha^2 - 8\alpha - \tfrac{5}{2}\right). \end{aligned}$$

où $M_Y(\cdot)$ **est la fonction** génératrice des moments d'une variable aléatoire $\mathcal{N}(7\alpha + 3, 3\alpha^2 - 2\alpha + 1)$.

4.24

Soit X_i **la variable** aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 si on trouve du pétrole **dans** la localité i et 0 sinon, avec $i = 1, \ldots, 10$. La variable aléatoire $N = \sum_{i=1}^{10} X_i$ **suit** alors une distribution binomiale de paramètres $(10, 0.2)$. On sait **de plus** que le profit dans la localité P_i, si on y a trouvé du pétrole, suit une **loi exponentielle** d'espérance 5.

1. **On écrit** le profit total Z comme

$$Z = \sum_{i=1}^{N} P_i.$$

Notons que la borne supérieure de la somme est une variable aléatoire et **que** $Z \mid N = n$ suit une loi Gamma de paramètres $(1/5, n)$ car c'est une **somme** de variables suivant une loi exponentielle.

2. **La variable** aléatoire $Z \mid N = 1$ a une distribution exponentielle d'espé**rance** 5, donc

$$P(Z > 10 \mid N = 1) = P(P_1 > 10) = 1 - F_{P_1}(10) = e^{-2} \simeq 0.1.3$$

Comme mentionné dans le point 1., la variable aléatoire $Z \mid N = 2$ suit une distribution Gamma de paramètres $(5, 2)$. Par conséquent

$$
\begin{aligned}
P(Z > 10 \mid N = 2) = P\left(\sum_{i=1}^{2} P_i > 10\right) = & \\
&= 1 - \int_0^{10} \frac{1}{25} \exp\left(-\frac{1}{5}x\right) x\,dx \\
&= 1 - \frac{1}{25}\left(\left(-5x \exp\left(-\frac{1}{5}x\right)\right)\Big|_{x=0}^{x=10} + 5\int_0^{10} \exp\left(-\frac{1}{5}x\right) dx\right) \\
&= 3e^{-2} \simeq 0.41,
\end{aligned}
$$

où l'on a utilisé le théorème d'intégration par parties.

3.

$$E(Z \mid N = n) = 5n$$

et

$$E(Z) = E_N(E_Z(Z \mid N)) = E(5N) = 5E(N) = 10.$$

4. Par l'inégalité de Markov

$$P(Z > 20) \leq \frac{E(Z)}{20} = 0{,}5.$$

La probabilité que le profit soit supérieur à 20 Mio€ n'est pas supérieure à 0,5.

4.25

1. Par le théorème central limite

$$S \mid N(t) \overset{approx.}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{N(t)}{\mu}, \frac{N(t)}{\mu^2}\right).$$

2. L'espérance de S est

$$E(S) = E(E(S \mid N(t))) = E\left(\frac{N(t)}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu}t$$

et sa variance

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(S) &= E(\operatorname{var}(S \mid N(t))) + \operatorname{var}(E(S \mid N(t))) \\
&= E\left(\frac{N(t)}{\mu^2}\right) + \operatorname{var}\left(\frac{N(t)}{\mu}\right) \\
&= \frac{1}{\mu^2}\lambda t + \frac{1}{\mu^2}\lambda t = \frac{2\lambda t}{\mu^2}.
\end{aligned}
$$

3. Par définition des probabilités totales

$$f_S(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_{S|N(t)}(s \mid n) \cdot P(N(t) = n).$$

4.

$$\begin{aligned} P(S > s_0) &= \int_{s_0}^{\infty} f_S(s)ds = \sum_n P(N(t) = n) \cdot \int_{s_0}^{\infty} f_{S|N(t)}(s|n)ds \\ &= \sum_n \left[1 - \Phi\left(\frac{s_0 - \frac{n}{\mu}}{\frac{\sqrt{n}}{\mu}}\right)\right] \cdot P(N(t) = n) \\ &= \sum_n \left[1 - \Phi\left(\frac{s_0 \cdot \mu}{\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\right] \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Dans la même collection nous avons