–

TD N° 1 – MESURE

$\limsup - \liminf -$ *Tribu-Mesure*

Consignes

Les exercices doivent être préparés et résolus par les étudiants.

EXERCICE 1 Soit X un ensemble quelconque et $(A_n)_n$ une famille de parties de X

1. Montrer que $x \in \limsup A_n$ si et seulement si x appartient à une infinité d'ensembles A_n.
2. Montrer que $x \in \liminf A_n$ si et seulement si il existe un n_1 (qui peut dépendre de $x \in X$) tel que $x \in A_n$ pour tout $n \geq n_1$.
3. Montrer que

$$\limsup A_n = (\limsup A_{2n}) \cup (\limsup A_{2n+1}), \qquad \liminf A_n = (\liminf A_{2n}) \cap (\liminf A_{2n+1}).$$

Application : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de parties de $\mathbb{R}$ définie par $A_n = \left[0\,;1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

EXERCICE 2 Soit X un ensemble non vide.

1) Montrer que, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de X et $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$, alors $A \backslash (\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (A \backslash A_n)$.

2) Soit $\mathcal{R}$ un sous - ensemble non vide de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant :
   - ▷ $\forall A, B \in \mathcal{R}, \quad A \backslash B \in \mathcal{R}$.
   - ▷ $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}, \quad \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$.

   a) Montrer que $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}, \quad \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$.

   b) Montrer que $\mathcal{R}$ est une tribu sur X si et seulement si $X \in \mathcal{R}$.

EXERCICE 3 Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(A_n)_n$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$.

1. On pose

$$B_0 = A_0 \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = A_n \backslash A_{n-1}.$$

Montrer que

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n \in \mathcal{A}$.

b) les B_n, $n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k$

d) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

2. On pose

$$B_0 = A_0 \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = A_n \backslash \left(\bigcup_{p=0}^{n-1} A_p \right).$$

Montrer que

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n \in \mathcal{A}$. b) les $B_n, n \in \mathbb{N}$ sont deux à deux disjoints c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

EXERCICE 4

1. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux familles de parties d'un ensemble Ω telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.
   Montrer que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B})$.

2. Montrer que la réunion de deux tribus n'est pas en général une tribu.

3. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur un ensemble Ω. Montrer que

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{A \cup B, A \in \mathcal{A}; B \in \mathcal{B}\}) = \sigma(\{A \cap B, A \in \mathcal{A}; B \in \mathcal{B}\}).$$

EXERCICE 5

1. Montrer par exemple que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]r, +\infty[, r \in \mathbb{Q}\})$ où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ désigne la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$.
2. Notons $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{K})$.

EXERCICE 6

On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ les tribus boréliennes de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$. Soit A un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On pose $\mathcal{T}_A = \{B \subset \mathbb{R}\ :\ A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}_A$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ contenant les ouverts de $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\mathcal{T}_A = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

EXERCICE 7 Soit f une bijection d'un ensemble X. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties A de X vérifiant :

$$x \in A \Leftrightarrow f(x) \in A \text{ et } f^{-1}(x) \in A.$$

Montrer $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.

EXERCICE 8 On note $\mathcal{T}_0$: $\{A \subset \mathbb{R}\ ;\ A$ ou $\mathbb{R} \setminus A$ est dénombrable $\}$. On note $\mathcal{T}_1$ la tribu engendrée par la famille $\{\{x, x+1, x+2\}, x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{T}_2$ la tribu engendrée par la famille des parties finies de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}_0$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.
3. Est-ce que cette tribu coincide avec la tribu des Boréliens ?

EXERCICE 9 Soit μ une mesure positive sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. Un sous-ensemble E de X est dit locament mesurable si : pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \infty$ alors $E \cap A \in \mathcal{A}$. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-ensemble localement mesurable de X.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu de X et que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.
2. Montrer que si μ est une mesure σ-finie alors $\mathcal{M} = \mathcal{A}$.
3. On considère l'application μ_0 de $\mathcal{M}$ dans $[0, +\infty]$ définie par :

$$\mu_0(E) = \begin{cases} \mu(E) & \text{si } E \in \mathcal{A} \\ +\infty & \text{si } E \notin \mathcal{A} \end{cases}.$$

   Montrer que μ_0 est une mesure positive sur $(X, \mathcal{M})$.

EXERCICE 10

1. Dire pourquoi l'ensemble $A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left[n - 2^{n+1}, n + 3^{-n-1}\right]$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de A.

EXERCICE 11 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{T}$.

1. Justifier que $\limsup(A_n)$ et $\liminf(A_n)$ sont dans $\mathcal{T}$.
2. Montrer que $\mu(\liminf(A_n)) \leq \liminf(\mu(A_n))$.
3. On suppose de plus qu'il existe B dans $\mathcal{T}$ tel que $\mu(B) < +\infty$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset B$. Montrer que $\limsup(\mu(A_n)) \leq \mu(\limsup(A_n))$.
4. On suppose dans cette question que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu(\limsup(A_n)) = 0$.
5. En déduire que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite de fonctions mesurables sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{f_n \geq \varepsilon\})$ converge pour tout $\varepsilon > 0$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers la fonction nulle.

EXERCICE 12 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{T}$.

1. On suppose, dans cette question, que pour tout entier n, $A_n \subset A_{n+1}$.
   Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$.
2. On suppose que $\mu(\Omega) < \infty$ et que pour tout n, $\mu(A_n) = \mu(\Omega)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu\left(\Omega \setminus \left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)\right) = 0$. En déduire que $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mu(\Omega)$.

EXERCICE 13 On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ on note $A + a = \{x + a : x \in A\}$

1. Montrer que $T_a = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A + a \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = T_a$.
3. Pour tout $A\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on pose $\mu(A) = \lambda(A + a)$. Montrer que μ est une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
4. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a $\lambda(A + a) = \lambda(A)$.