1.2.7 Compacité dans les espaces métriques

1.2.102 THÉORÈME
Soit (X, d) un espace métrique. X est compact si est seulement si toute suite dans X a une sous-suite convergente.

Démonstration: $\Longrightarrow$ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X qui n'admet pas de valeur d'adhérence, alors pour tout $y \in X$, il existe $r(y) > 0$ tel que la boule $B(y, r(y))$ ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par hypothèse X, il existe $K \subset X$ fini tel que $X = \bigcup\limits_{y\in K} B(y, r(y))$. Par le principe des tiroirs (de Dirichlet) une de ces boules doit rencontrer une infinité de termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; contradiction.

$\Longleftarrow$ Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Puisque X est séparé, il suffit de montrer que (U_i) a un sous-recouvrement fini.

Montrons d'abord que (U_i) admet un *nombre de Lebesgue* :

1.2.104 LEMME (LEMME DE RECOUVREMENT DE LEBESGUE)
Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert d'un espace métrique compact X, il existe $\delta > 0$ appelé *nombre de Lebesgue du recouvrement* tel que pour tout $x \in X$ la boule $B(x,\ \delta)$ est contenue dans un des U_i.

Démonstration: Supposons par l'absurde que ce n'est pas vrai, on trouve pour tout n, un point x_n tel que $B(x_n,\ 2^{-n})$ n'est contenu dans aucun U_i. Par hypothèse, la suite (x_n) a une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers un $x \in X$. Il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$, puis $r > 0$ tel que $B(x,\ r) \subset U_i$. Pour k est assez grand, $2^{-n_k} < \dfrac{r}{2}$ et $d(x_{n_k},\ x) < \dfrac{r}{2}$, d 'où $B(x_{n_k},\ 2^{-n_k}) \subset B(x_{n_k},\ \frac{r}{2}) \subset B(x,\ r) \subset U_i$, contradiction. ∎

Donc pour montrer que X est compact, il suffit de montrer qu'il peut être recouvert d'un nombre fini des boules ouvertes de rayon δ.
S'il n'en était pas ainsi, on peut construire par récurrence une suite (x_n) telle que $x_n \notin \bigcup\limits_{k<n} B(x_k,\ \delta)$ (en utilisant l'axiome du choix dénombrable). Alors $d(x_n,\ x_m) \geq \delta$ si $n \neq m$, donc (x_n) n'a aucune sous-suite de Cauchy. Une telle suite n'a pas de valeur d'adhérence, contredit l'hypothèse. ∎

1.2.106 DÉFINITION
Un espace métrique est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$, il admet un recouvrement fini par des boules ouvertes de rayon ε.

1.2.107 REMARQUE
On obtient une définition équivalente en prenant des boules fermées.

1.2.108 THÉORÈME
Soit (X, d) un espace métrique. X est compact si est seulement si X est complet et précompact.

Démonstration: $\Longrightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, les boules ouvertes de rayon ε, $\{B(x,\ \varepsilon)\}_{x\in X}$, forment un recouvrement ouvert de X, donc admettent un sous-recouvrement fini. D'où X est précompact.
Maintenant, soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de X. Toute intersection finie des F_n est non vide, donc par compacité $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide, d'où X est complet.
$\Longleftarrow$ Soit (x_n) une suite de X. Nous allons montrer que (x_n) a une sous-suite de Cauchy, et celle-ci converge puisque X est complet.
Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une famille finie $\mathscr{K}_n$ de boules de rayon $\frac{1}{n}$ qui recouvre X. On construit par récurrence une application strictement croissante $\varphi_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une boule $B_n \in \mathscr{K}_n$ qui contient la sous-suite $(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

1) Puisque $\mathscr{K}_0$ est finie et que tout x_n est dans une boule de $\mathscr{K}_0$, il existe $B_0 \in \mathscr{K}_0$ qui contient une infinité de x_n, donc une sous-suite $(x_{\varphi_0(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.
2) Supposons $\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ et $B_0, \cdots, B_n$ déjà construites. Puisque $\mathscr{K}_{n+1}$ est finie et que tout $(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(k)})$ est dans une boule de $\mathscr{K}_{n+1}$, il existe $B_{n+1} \in \mathscr{K}_{n+1}$ qui contient une sous-suite $(x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n\circ\varphi_{n+1}(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.
   La sous-suite ainsi obtenue par procédé diagonal, $(y_n) = (x_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors $y_n \in B_n$ donc $d(y_n,\ y_m) < \frac{1}{n}$ si $m > n$, est donc de Cauchy.

1.2.110 COROLLAIRE (THÉORÈME DE HEINE)
Soient (X, d) et $(Y,\ d')$ des espaces métriques, avec X compact. Toute application continue $f : X \to Y$ est uniformément continue.

Démonstration: Soit $\varepsilon > 0$, montrons par l'absurde qu'il existe $\delta > 0$ tel que $(d(x,\ x') < \delta \Rightarrow d'(f(x),\ f(x')) < \varepsilon$. Si ce n'est pas vrai, on trouve des suites $(x_n \in X)$, $(x'_n \in X)$ telles que $d(x_n,\ x'_n) \leq 2^{-n}$ et $d'(f(x_n),\ f(x'_n)) \geq \varepsilon$. Quitte à passer à des sous-suites, on peut supposer que (x_n) et (x'_n) convergent vers un point x, on a alors

$$\varepsilon \leq d(f(x_n),\ f(x'_n)) \leq d(f(x_n),\ f(x)) + d(f(x'_n),\ f(x))$$

Donc l'une des deux suites $(d(f(x_n),\ f(x)))$ et $(d(f(x'_n),\ f(x)))$ ne tend pas vers 0, ce qui prouve que f n'est pas continue en x. ∎

1.3 Espaces de fonctions continues

1.3.1 Topologie de la convergence uniforme

1.3.1 DÉFINITION
Soient X un espace topologique et Y un espace métrique. On désigne par $\mathscr{B}(X,Y)$ l'ensemble des applications bornées X dans Y i.e. $f \in \mathscr{B}(X, Y)$ si $f(X)$ a un diamètre borné.

On munit $\mathscr{B}(X, Y)$ de la distance uniforme i.e. pour $f, g \in \mathscr{B}(X, Y)$

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Il est clair que $(\mathscr{B}(X, Y), d_\infty)$ est un espace métrique. Par définition, la topologie associée est celle de la *convergence uniforme*.

On désigne par $\mathscr{BC}(X, Y) := \{f \in \mathscr{B}(X, Y), |$ f est continue sur $X\}$

1.3.2 PROPOSITION
L'espace $\mathscr{BC}(X, Y)$ est un fermé de $\mathscr{B}(X, Y)$; autrement dit toute limite uniforme d'applications continues et bornées est une application continue et bornée.

Démonstration: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{BC}(X, Y)$ et $f \in \mathscr{B}(X, Y)$ telles que $\lim_{n\to+\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$.

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon) > 0$ tel que $n \geq N$, entraîne $d_\infty(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $x_0 \in X$, comme f_N est continue, il existe un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 dans X tel que $f_N(V_{x_0}) \subset B(f_N(x_0), \frac{\varepsilon}{3})$.
Il s'agit maintenant de montrer que $f(V_{x_0}) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$.

Soit $y \in f(V_{x_0})$, alors il existe $x \in V_{x_0}$ tel que $y = f(x)$.

D'où $d(f(x_0), f(x)) \leq d(f(x_0), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f_N(x)) + d(f_N(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, ainsi $f(V_{x_0}) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. ∎

La complétude de $\mathscr{B}(X, Y)$ et de $\mathscr{BC}(X, Y)$ ne dépend que de la complétude de (Y, d).

1.3.4 THÉORÈME
Si (Y, d) est un espace métrique complet alors il en va de même pour $\mathscr{B}(X, Y)$ et de $\mathscr{BC}(X, Y)$.

Démonstration: Remarquons d'abord que puisque $\mathscr{BC}(X,\ Y)$ est un fermé de $\mathscr{B}(X,\ Y)$ il suffit de montrer la complétude de $\mathscr{B}(X,\ Y)$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{B}(X,\ Y)$.

Pour chaque $x \in X$ fixé, puisque $d(f_n(x),\ f_m(x)) \leq d_\infty(f_n,\ f_m)$ la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (Y, d), par compluétude, elle converge vers élément de Y que nous noterons $f(x)$. Il s'agit maintenant de montrer que la fonction f, ainsi définie, appartient à $\mathscr{B}(X,\ Y)$ et $\lim_{n\to+\infty} d_\infty(f_n,\ f) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, il existe $N(\varepsilon) > 0$ tel que $n, m \geq N(\varepsilon)$, entraîne $d(f_n(x),\ f_m(x)) < \varepsilon$ pour tout $x \in X$. Par passage à la limite lorsque n tends vers $+\infty$, on obtient :
pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, et pour tout $x \in X$ on a $d(f_n(x),\ f(x)) \leq \varepsilon$.
Puisque $f_{N(\varepsilon)} \in \mathscr{B}(X,\ Y)$, il existe $y_1 \in Y$ et $R > 0$ tel que $f_{N(\varepsilon)}(X) \subset B(y_1, R)$. On en déduit que $f(X) \subset B(y_1, R+\varepsilon)$, donc $f \in \mathscr{B}(X,\ Y)$.
Comme ε est arbitraire, on aura $\lim\limits_{n\to+\infty} d_\infty(f_n,\ f) = 0$. ■

1.3.6 REMARQUE

Lorsque X est compact, toute fonction continue, $f : X \to Y$ est nécessairement bornée. Dans ce cas on note $\mathscr{C}(X, Y)$ à la place de $\mathscr{BC}(X,\ Y)$.

En général, la convergence uniforme entraîne la convergence simple, la réciproque n'est pas vraie. le théorème de Dini, nous donne un cas particulier où la réciproque est valide :

1.3.7 THÉORÈME (DE DINI)

Soit X un espace topologique compact. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite monotone de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ qui converge simplement vers $f \in \mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ i.e.

i) (f_n) est décroissante i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, $f_{n+1} \leq f_n$
(ou bien (f_n) est croissante i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a, $f_n \leq f_{n+1}$)

ii) Pour tout $x \in X$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

Démonstration: On va traiter le cas (f_n) décroissante, celui où (f_n) est croissante s'en déduit en passant à $-f_n$.

On pose $g_n = f_n - f$. Alors (g_n) est une suite décroissante de fonctions continues positives, qui converge simplement vers la fonction identiquement nulle 0. Il s'agit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n\|_\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in X} g_n(x) = 0$.
Si ce n'est pas vrai, il existe $\varepsilon > 0$, tel que pour tout entier n, $\|g_n\|_\infty \geq \varepsilon$. On pose $F_n = \{x \in X \,|\, g_n(x) \geq e$. Alors, (F_n) est suite décroissante de fermés non vides du compact X.

En effet, comme les g_n sont continues, les ensembles F_n, sont fermés, de $g_{n+1} \leq g_n$, en déduit $F_{n+1} \subset F_n$, et par continuité de g_n sur le compact X, il existe x_n tel que $g_n(x_n) = \|g_n\|_\infty \geq \varepsilon$ d'où $x_n \in F_n$ donc non vide.

D'après, la propriété de l'intersection finie des compacts, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Soit $a \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, alors pour tout n, $g_n(a) \geq \varepsilon$, contredit la convergence simple de (g_n) vers 0. ■

1.3.9 Remarque

Le résultat est pris en défaut si l'une des hypothèses est omise :

1) X n'est pas compact :
   Par exemple si $X =]0, +\infty[$ et $f_n(x) = \frac{1}{nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ qui converge simplement vers 0. Mais la convergence n'est pas uniformément puisque
   $\|f_n\|_\infty \geq f_n(n) = 1$.
2) Si f n'est pas continue : Par exemple si $X = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
   La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de $\mathscr{C}(X, \mathbb{R})$ qui converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$. La convergence ne peut être uniformément puisque f n'est pas continue.
3) Si (f_n) n'est pas monotone : Par exemple si $X = [1, 0]$ et pour $n > 1$,
   $$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -(n+1)x + \frac{2(n+1)}{n} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{2}{n}, 0] \end{cases}$$
   La suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0. Mais la convergence n'est pas uniformément puisque : $\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{1}{n}) = 1$.