Licence 3 : Sciences et Technologie
Devoir de maison

Exercice 1
Soit X un ensemble. On désigne par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Soit $\beta : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ une application vérifiant les paropriétés suivantes :

1. $\beta(\emptyset) = \emptyset$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $A \subset \beta(A)$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $(\beta \circ \beta)(A) = \beta(A)$.
4. Pour tout $A,\, B \in \mathcal{P}(X)$, on a $\beta(A \cup B) = \beta(A) \cup \beta(B)$.

Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\beta(A) \; : \; A \in \mathcal{P}(X)\}$ est l'ensemble des fermés d'une topologie sur X telle que pour toute partie A de X on ait $\overline{A} = \beta(A)$.

Exercice 2
Soit $(E,\, d)$ un espace métrique et A une partie non vide de E. On désigne par $\overline{A}$ l'adhérence de A.
Pour tout $x \in E$, on définit *la distance* de x à A par

$$d(x,\, A) = \inf_{y \in A} d(x,\, y).$$

1. Montrer que $d(x,\, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
2. Montrer que $d(x,\, A) = d(x,\, \overline{A})$.

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{C}([0,\, 1] \to \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications continues de $[0,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \int_0^1 t|f(t)|dt \quad \text{et } \|f\|_\infty = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$f_n(t) = 1 - nt \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad f_n(t) = 0 \;\text{ si }\; \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1.$$

a) Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $N(f_n)$.
b) En déduire que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 4 Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. Un sous-ensemble A de X est dit **précompact** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des boules fermées de rayon ε dont les centres sont des points de A.

1. Montrer que Si X est compact alors il est précompact.
2. En déduire que si A est précompact alors l'adhérence de A notée $\overline{A}$ est précompact.

Exercice 5

Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $a \in E$, on désigne par C_a sa composante connexe c'est-à-dire la réunion de toutes les parties connexes de E contenant a.

1. Montrer que pour tout $a \in E$, C_a est un fermé de E.
2. Soient x et y deux éléments distincts de E tels que $C_x \cap C_y \neq \emptyset$.
   Montrer que $C_x = C_y$.