Licence 3 : Sciences et Technologie

TD : TOPOLOGIE

Exercice 1
Est-ce que $(\mathbb{Z}, \mathcal{O})$ où $\mathcal{O} = \{\emptyset, \{1, 2\} \{1, 2, 3\}, \{2, 3, -4\}, \{1, 2, 3, -4\}, \mathbb{Z}\}$ est un espace topologique ?

Exercice 2
Soit X un ensemble quelconque.

1. On munit X de la topologie discrète. Quelles sont les parties fermées de X ? Quel est l'intérieur, quelle est l'adhérence d'un sous-ensemble A de X ? Quels sont les voisinages d'un point x de X ?
2. Mêmes questions pour X muni cette fois de la topologie grossière.

Exercice 3
Soit X un ensemble. On désigne par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Soit $\alpha : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ une application vérifiant les paropriétés suivantes :

1. $\alpha(X) = X$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $\alpha(A) \subset A$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $(\alpha \circ \alpha)(A) = \alpha(A)$.
4. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(X)$, on a $\alpha(A \cap B) = \alpha(A) \cap \alpha(B)$.

Montrer que la famille $\mathcal{T} = \{\alpha(A) \ : \ A \in \mathcal{P}(X)\}$ est une topologie sur X telle que pour toute partie A de X on ait $\overset{\circ}{A} = \alpha(A)$.

Exercice 4
Soit X un espace topologique et $f\ X \to \mathbb{R}$ une application.
Montrer que f est continue si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(]a, +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty, a[)$ sont des ouverts de X.

Exercice 5

1. Soit X un espace discret. Montrer que pour tout espace topologique Y et toute application $f ; X \to Y$, f est continue.
2. Soit Y un espace grossier. Montrer que pour tout espace X toute application $f ; X \to Y$, f est continue.

Exercice 6
Soient $(X, \mathcal{O})$ et $(Y, \mathcal{T})$ deux espaces topologiques et $f : (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{T})$ une application.

1. Montrer que : f ouverte $\iff \forall A \subset X \quad f\left(\overset{\circ}{A}\right) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f(A)}}$.
2. Montrer que : f fermée $\iff \forall A \subset X \quad \overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

3. Soit $f : x \longmapsto \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, et $g : x \longmapsto x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f et g ne sont pas ouvertes.
4. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ est continue, fermée et non ouverte.

Exercice 7
Soit $f\ (X, \mathcal{O}) \to (Y, \mathcal{T})$ une bijection continue.
Màntrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est ouverte
2. f esr fermée .
3. f est un homéomorphisme.