ESPACES MÉTRIQUES

1. Distances et espaces métriques

Soit E un ensemble.

Définition 1.1. *: On appelle distance sur E toute application d de $E \times E$ vers $[0, +\infty[$ telle que*

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall\, x, y \in E$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in E$ *(Inégalité triangulaire).*

Ex : • $E = \mathbb{R} \qquad d(x, y) = |x - y|$

• $E = \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ x = (x_1, \ldots, x_n)\ y = (y_1, \ldots, y_n)$

$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \quad d_2(x, y) = \big(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\big)^{1/2},$

$d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| = \sup\{|x_i - y_i| \mid i \in [1, n]\}.$

• $E = C([0, 1], \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$.

Soit $f, g \in E$.

$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt,$

$d_2(f, g) = \big(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2\, dt\big)^{1/2}, \quad d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|.$

Définition 1.2. *Si d est une distance sur E alors le couple (E, d) s'appelle un espace métrique.*

Construction d'espaces métriques

Proposition 1.1. *Etant donnés $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$ des espaces métriques, on pose $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ et*

$$\delta_1 : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i),$$

$$\delta_2 : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) \longrightarrow (\sum_{i=1} d_i^2(x_i, y_i))^{1/2}$$

et

$$\delta_\infty : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \longrightarrow \sup_{1 \le i \le n} d_i(x_i, y_i).$$

Alors $(E, \delta_1), (E_1, \delta_2), (E, \delta_\infty)$ *sont des espaces métriques.*

Définition 1.3. *Soit* (E, d) *un espace métrique et* $F \subset E$*. Alors la restriction de* d *à* $F \times F$*, notée* d_F*, est une distance sur* F*.* (F, d_F) *s'appelle un sous espace de* (E, d)*.*

Dans la suite, (E, d) est un espace métrique.

2. Parties ouvertes

Définition 2.1. *Soit* $a \in E$ *et* $r \in [0, \infty[$*. L'ensemble*

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}$$

s'appelle la boule ouverte de centre a *et de rayon* r*.*

<u>**Ex**</u> : • $E = \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

$B(0, 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| < 1\}$

• $E = \mathbb{R}^2$ $d = d_2$. $B(0, 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

• $E = \mathbb{R}^2$ $d(x, y) = d_\infty(x, y) = \sup(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$

$B(0, 1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sup(|x_1|, |x_2|) < 1\}$

Définition 2.2. *Un ensemble* U *de* E *est dit ouvert si* $\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0$ *tel que* $B(x, \varepsilon) \subset U$*.*

<u>**Ex**</u> : **1)** $B(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}$ est un ensemble ouvert de E. En effet, étant donné $x \in B(a, r)$, soit $\varepsilon = r - d(x, a)$.

$\varepsilon > 0$ car $x \in B(a, r)$. Montrons que $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$. $\forall y \in B(x, \varepsilon)$, on a

$$\begin{aligned} d(a, y) &\le d(a, x) + d(x, y) && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &< d(a, x) + \varepsilon && (\text{car } y \in B(x, \varepsilon)) \\ &= r \end{aligned}$$

Donc $y \in B(a, r)$.$\square$

2) En particulier, si $(E, d) = (\mathbb{R}, |. - .|)$ et $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Alors $]a, b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$

Proposition 2.1. *L'ensemble* $\mathcal{U}$ *des ouverts de* E *possède les 3 propriétés suivantes :*

1) *stablilité par réunion quelconque :* $(U_i)_{i \in I} \subset \mathcal{U} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U}$*,*

2) *stablilité par intersection finie :* $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{U}$,

3) $\emptyset$ *et* E *sont dans* $\mathcal{U}$.

Définition 2.3. *Soit* $A \subset E$. *Alors l'ensemble*

$$\{x \in A \mid \exists \varepsilon > 0\,,\, B(x,\varepsilon) \subset A\}$$

s'appelle l'intérieur de A et est noté int(A) *ou* $\mathring{A}$.

Proposition 2.2. *Soit* $A \subset E$. *Alors*

1) *int* (A) *est un ouvert de* E.

2) *int* (A) *est le plus grand ouvert contenu dans* A *c'est-à-dire*

$$U \text{ ouvert, } U \subset A \Longrightarrow U \subset \mathit{int}\,(A).$$

3. Parties fermées

Définition 3.1. *Un sous ensemble* A *de* E *est dit fermé si son complémentaire*

$$A^C := \{x \in E \mid x \notin A\}$$

est un ouvert de E.

Par passage au complémentaire, on déduit de la Proposition 2.1 la

Proposition 3.1. *L'ensemble* $\mathcal{F}$ *des fermés de* E

1) *est stable par intersection quelconque,*

2) *est stable par réunion finie,*

3) *contient* $\emptyset$ *et* E.

Caractérisation séquentielle des fermés

Définition 3.2. *Soit* $a \in E$. *On dit qu'une suite* (x_n) *de* E *converge vers* a *si*

$$d(x_n, a) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

Notations : $x_n \longrightarrow a$ *ou* $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Théorème 3.1. *Une partie* A *de* E *est fermé si et seulement si* $\forall (x_n) \subset A\,,\, \forall a \in E$

$$x_n \longrightarrow a \Rightarrow a \in A.$$

<u>Démonstration</u> : Soit A fermé et $(x_n) \subset A$.
Si $a \notin A$ alors $a \in A^C$, ouvert donc $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A^C$. Donc $d(x_n, a) \geq \varepsilon\; \forall n \geq 0$ car $x_n \in A$. Donc (x_n) ne converge pas vers a. L'implication de l'énoncé s'en déduit par contraposée.

Réciproquement, si A^C n'est pas ouvert alors $\exists b \in A^C$ tel que $\forall \varepsilon > 0\,,\, B(b,\varepsilon) \not\subset A^C$ c'est-à-dire $B(b, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. En particulier, si $\varepsilon = 1/n$ alors il existe $x_n \in B(b, 1/n) \cap A$. Donc $d(x_n, b) \leq 1/n$, $x_n \longrightarrow b$. Par hypothèse, $b \in A$. Contradiction.$\square$

Adhérence d'un ensemble

Définition 3.3. *Soit $A \subset E$. On dit qu'un point $a \in E$ est adhérent à A s'il existe une suite $(a_n) \subset A$ convergeant vers a.*

L'ensemble des points adhérents à A est appellé l'adhérence ou la fermeture de A et se note $\overline{A}$.

Théorème 3.2. *Soit $A \subset E$. Alors*

1) *$\overline{A}$ est un fermé contenant A.*

2) $\overline{A} = \displaystyle\bigcap_{F\, fermé, F \supset A} F.$

3) *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A, c'est-à-dire*

$$F \text{ fermé, } F \supset A \Rightarrow \overline{A} \subset F.$$

4) *Si A est fermé alors $\overline{A} = A$.*

Démonstration : **1)** Soit $a \in A$, $a_n = a \Rightarrow A \subset \overline{A}$.
Montrons que $\overline{A}$ est fermé : soit $(x_n) \subset \overline{A}$, $x_n \longrightarrow x \in E$.

Comme $x_n \in \overline{A}$, il existe $a_n \in A$ tel que $d(a_n, x_n) \leq 1/n$. D'où

$$\begin{aligned} d(a_n, x) &\leq d(a_n, x_n) + d(x_n, x) \\ &\leq 1/n \qquad + d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Donc $a_n \longrightarrow x$ et $x \in \overline{A}$. Donc $\overline{A}$ est fermé.

2) D'après **1)**, $\displaystyle\bigcap_{F\, fermé, F \supset A} F \subset \overline{A}$. Réciproquement, soit $a \in \overline{A}$. Alors $\exists (a_n) \subset A$ tel que $a_n \longrightarrow a$. $\forall F$ fermé, contenant A, on a $(a_n) \subset F$ donc $a \in F$ car F est fermé.

3) $\Longleftarrow$ **2)**

4) $A \subset \overline{A}$ d'après **1)**. Réciproquement, en choisissant $F = A$ dans **3)**, on a $\overline{A} \subset A$. $\square$

4. Frontière d'un ensemble

Définition 4.1. *Soit $A \subset E$. La frontière de A est l'ensemble des points $x \in E$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ et $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.*

La frontière de A est notée $fr(A)$ ou ∂A.

Proposition 4.1. *Soit $A \subset E$. Alors $fr(A) = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.*

Démonstration : Si $x \in fr(A)$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ donc $\exists a_n \in A$ tel que $d(a_n, x) \leq 1/n$. Donc (a_n) converge vers x c'est-à-dire $x \in \overline{A}$. De même, on montre que $x \in \overline{A^c}$. Ainsi $fr(A) \subset \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$. $x \in \overline{A} \Rightarrow \exists (a_n) \subset A$ tel que $a_n \longrightarrow x$.
Donc $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $d(a_{n_\varepsilon}, x) < \varepsilon$ et $a_{n_\varepsilon} \in A$. Donc $a_{n_\varepsilon} \in B(x,\varepsilon) \cap A$.
Idem avec $\overline{A^c}$. $\square$

Définition 4.2. *Soit $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que*

1) *a est un point isolé de A si $a \in A$ et $\exists \varepsilon > 0$ tel que $B(a,\varepsilon) \cap A = \{a\}$.*

2) *a est un point d'accumulation de A si $\forall \varepsilon > 0$, $B(a,\varepsilon) \cap A$ contient au moins deux points.*

5. Parties denses

Définition 5.1. *Soit $U \subset A \subset E$. On dit que U est dense dans A si $A \subset \overline{U}$.*

Ex : $(E,d) = (\mathbb{R}, |.-.|)$. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 5.2. *Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$ et $x \in E$. Alors*

1) *$d(x,A) := \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$ s'appelle la distance de x à A.*

2) *On dit que A est borné dans (E,d) s'il existe $x \in E$ et $R > 0$ tel que $A \subset B(x,R)$.*

3) *Si A est borné alors le diamètre de A, noté $diam(A)$ est défini par*

$$diam(A) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\}.$$

Suites dans un espace métrique

Soit (x_n) une suite de E.

Définition 5.3. *Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Alors la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle une sous-suite de (x_n).*

Ex : $(E,d) = (\mathbb{R}, |.-.|)$, $x_n = (-1)^n \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $n \longrightarrow 2n$. $x_{\varphi(n)} = x_{2n} = 1$

Définition 5.4. *On dit qu'un point $a \in A$ est une valeur d'adhérence de (x_n) s'il existe une sous suite de (x_n) convergeant vers a.*

Ex : $(E,d) = (\mathbb{R}, |.-.|)$, $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

$x_{\varphi(n)} = 1 + \dfrac{1}{2n} \longrightarrow 1$. Donc $a = 1$ est une valeur d'adhérence de (x_n).

6. Applications continues

Soit (E,d) , (E',d') deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow E'$. Soit $a \in E$.

Définition 6.1. *On dit que f est continue en a si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon, a) > 0$ tel que $\forall x \in E$,*

$$d(x,a) < \delta(\varepsilon, a) \Longrightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Rq : Cette définition exprime que si x est sufisamment proche de a alors $f(x)$ est proche de $f(a)$.

Ex : $(E,d) = (E',d') = (\mathbb{R}, |.-.|)$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) - f(a) = (x-a)(x+a).$$

Soit $\delta(\varepsilon, a) = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{2|a|+1}\right)$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-a| < \delta(\varepsilon, a)$, on a $|x| \leq |x-a| + |a| < 1 + |a|$, d'où

$$|f(x) - f(a)| \leq |x-a|(|x|+|a|) < |x-a|(2|a|+1) < \varepsilon,$$

car $|x-a| < \frac{\varepsilon}{2|a|+1}$.

Théorème 6.1. *f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(x_n) \subset E$ convergeant vers a, on a*

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a) \text{ dans } (E',d').$$

Définition 6.2. *On dit que f est continue sur E si f est continue en tout point de E.*

Définition 6.3. *Soit $A \subset E$, $B \subset E'$.*
$f(A) = \{f(a) \in E' \mid a \in A\}$ s'appelle l'image de A par l'application f.
$f^{-1}(B) = \{a \in E \mid f(a) \in B\}$ s'appelle l'image réciproque de B par l'application f.

Ex : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$. $f([1,2]) = [1,4]$, $f^{-1}([1,4]) = [1,2] \cup [-2,-1]$.

Théorème 6.2. *Les propositions suivantes sont équivalentes.*
1) *f est continue sur E.*
2) *Pour tout ouvert U de E', $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E.*
3) *Pour tout fermé F de E', $f^{-1}(F)$ est un fermé de E.*

Ex : **1)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to \begin{cases} x-1 & \text{if } x < 0 \\ x+1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$.
Alors $f^{-1}(]0,2[) = [0,1[$ n'est pas un ouvert. f n'est pas continue en 0.

2) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application continue sur E. Alors, d'après le théorème ci dessus, les ensembles

$$\{x \in E \mid f(x) > 0\}, \quad \{x \in E \mid f(x) < 0\}$$

sont ouverts dans E. Les ensembles

$$\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}, \quad \{x \in E \mid f(x) = 0\}$$

sont fermés dans E.

Définition 6.4. *On dit que f est uniformément continue sur E si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall x, y \in E$,*

$$d(x, y) < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Homéomorphismes

Définition 6.5. *Un homéomorphisme de E sur E' est une bijection continue de E sur E' dont la fonction réciproque est continue sur E'.*
On dit que E et E' sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de E sur E'.

Proposition 6.1. *Soit $f : E \to E'$ une bijection continue sur E. Alors f est un homéomorphisme si et seulement si pour tout ouvert U de E, $f(U)$ est un ouvert de E'.*

Ex : **1)** Soit $E = E' = \mathbb{R}$, $d = d' = |. - .|$. Alors $] - \pi/2, \pi/2[$ et $\mathbb{R}$ sont homéomorphes.
2) Soit $E = [0, 2\pi[$, $E' = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $d = d' = |. - .|$ et $f : E \to E'$, $x \to e^{ix}$. Alors f n'est pas un homéomorphisme.

ARNAUD ROUGIREL
IUFM POITOU CHARENTES
E-mail address: rougirel@math.univ-poitiers.fr