Compacité

Exercice 1 Soit X un espace métrique.

1. Soit A et B deux compacts disjoints dans X. Montrer qu'ils possèdent des voisinages ouverts disjoints (commencer par le cas où B est réduit à un point).
2. Soit K un compact non vide de X et U un ouvert de X contenant K. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, on ait l'implication :

$$d(x, K) < r \Rightarrow x \in U .$$

Exercice 2 Montrer qu'une suite convergente et sa limite forment un ensemble compact.

Exercice 3 Soient $K, F \subset \mathbb{R}^n$ des parties non vides, K compact et F fermé. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tel que $\|a - b\| = \mathrm{dist}(K, F)$.

Exercice 4 Soit E un espace compact et soit (F, d) un espace métrique. Soit $f : E \to F$ une application localement bornée, ce qui signifie que, pour tout $y \in E$, il existe un voisinage V_y de y sur lequel f est bornée. Montrer que f est bornée sur E.

Exercice 5 Soit X un espace métrique.

1. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés de X et soit $(x_n)_n$ une suite convergente telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \bigcap_{n\geqslant 0} F_n \quad .$$

   Donner un exemple pour lequel $\bigcap_{n\geqslant 0} F_n = \emptyset$.
2. Soit maintenant $(K_n)_n$ une suite décroissante de *compacts* non vides de X. Vérifier que $K = \bigcap_{n\geqslant 0} K_n$ est non vide et que tout ouvert Ω qui contient K contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Exercice 6 Soit X un espace topologique et $f : X \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'application $g : x \in X \to \int_0^1 f(x, y)\, dy$ est continue.

Exercice 7 Soit E un espace normé. Si A et B sont deux parties de E, on note $A+B$ l'ensemble $\{a + b\ ;\ a \in A \text{ et } b \in B\}$.

1. Montrer que si A est compact et B est fermé, alors $A + B$ est fermé.
2. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^2$ dont la somme n'est pas fermé.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application continue. Elle est dite *propre* si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

1. Montrer que, si f est propre, alors l'image par f de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

2. Établir l'équivalence suivante : l'application f est propre si et seulement si elle a la propriété :
$$\|f(x)\| \to \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to \infty \, .$$

Exercice 9 Soit $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{continue}\}$. On munit E de la métrique $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Montrer que la boule unité fermée de E n'est pas compact (on pourra construire une suite dont aucune sous suite n'est de Cauchy).
Que peut-on dire de la boule unité fermée de l^∞ (l'espace des suites bornées muni de la norme sup) ?

Exercice 10 Soit (X,d) un espace métrique, soit (Y,δ) un espace métrique compact et soit $f : X \to Y$ une application dont le graphe
$$G = \{(x, f(x)) \; x \in X\} \subset X \times Y$$
est fermé dans $X \times Y$. Notons $p : G \to X$ et $q : G \to Y$ les restrictions des deux projections $p(x,y) = x$ et $q(x,y) = y$. Montrer que p est un homéomorphisme de G sur X. En déduire que f est continue.

Exercice 11 Soit (X,d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application vérifiant
$$d(f(x), f(y)) < d(x,y) \quad \text{pour tout } x, y \in X \; , x \neq y \; .$$
Le but ici est de montrer que f a un unique point fixe $p \in X$.

1. Justifier que f peut avoir au plus un point fixe.
2. Montrer que les ensembles $X_n = f^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, forment une suite décroissante de compacts et que $Y = \bigcap_{n\geqslant 0} X_n$ n'est pas vide.
3. Montrer que Y est un ensemble invariant, i.e. $f(Y) = Y$, et en déduire que le diamètre de cet ensemble est zero.
4. Conclure que f a un unique point fixe $p \in X$ et que pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0) \to p$, lorsque $n \to \infty$.

Exercice 12 Soient (E,d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ une application vérifiant
$$d(f(x), f(y)) \geqslant d(x,y) \quad \text{pour tout } \; x, y \in E \; .$$
On se propose de montrer que f est une isométrie surjective. Soient $a, b \in E$ et posons, pour $n \geqslant 1$, $a_n = f^n(a) = f \circ f^{n-1}(a)$ et $b_n = f^n(b)$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \geqslant 1$ tel que $d(a, a_k) < \varepsilon$ et $d(b, b_k) < \varepsilon$ (Considérer une valeur d'adhérence de la suite $z_n = (a_n, b_n)$).
2. En déduire que $f(E)$ est dense dans E et que $d(f(a), f(b)) = d(a,b)$ (Considérer la suite $u_n = d(a_n, b_n)$).

Exercice 13 On se donne une métrique d sur $X = [0,1]$ telle que l'identité $i : (X, |.|) \to (X, d)$ soit continue (i.e. la topologie définie par d est moins fine que la topologie usuelle de X).

1. Montrer que tout sous-ensemble de X compact pour la topologie usuelle est aussi compact pour la topologie définie par d ; puis montrer cette propriété pour les fermés.
2. En déduire que la topologie définie par d est la topologie usuelle.

Compacité

Indication 1 1. Remarquer si U_a est un voisinage de a, alors $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$.

2. Raisonner par l'absurde et construire une suite (x_n) dont aucun élément n'est dans U et une suite (y_n) de K. Quitte à extraire une sous-suite se débrouiller pour qu'elle converge vers la même limite.

Indication 2 Utiliser qu'un ensemble K est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K.

Indication 3 Extraire des sous-suites...

Indication 7 On pourra utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.

Indication 8 1. Utiliser la caractérisation de la fermeture par des suites.

2. Remarquer que "$\|f(x)\| \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$" est équivalent à

$$\text{“}\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).\text{''}$$

Indication 11 1. ...

2. Utiliser l'exercice 5.
3. Montrer $f(Y) \subset Y$ puis $Y \subset f(Y)$.
4. Diamètre zéro implique ensemble réduit à un singleton.

Compacité

Correction 1 1. (a) Si A est compact et $B = \{b\}$ avec $b \notin A$. Soit $a \in A$ alors $a \neq b$ donc il existe un voisinage ouvert de a, U_a et un voisinage ouvert de b, V_a tels que $U_a \cap V_a = \varnothing$. Bien évidemment $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$. Comme A est compact on peut extraire un ensemble fini $\mathcal{A} \subset A$ tel que $A \subset \bigcup_{a \in \mathcal{A}} U_a =: U^b$. Notons alors $V^b := \bigcap_{a \in \mathcal{A}} V_a$. U^b est ouvert comme union d'ouverts et V^b est ouvert comme intersection *finie* d'ouverts. De plus $U^b \cap V^b = \varnothing$.

(b) Maintenant B est compact. Pour chaque $b \in B$ le point précédent nous fournit U^b et V^b disjoints qui sont des voisinages ouverts respectifs de A et b. On a $B \subset \bigcup_{b \in B} V^b$. On extrait un ensemble fini $\mathcal{B}$ de telle sorte que $B \subset \bigcup_{b \in \mathcal{B}} V^b =: V'$. V' est un voisinage ouvert de B. Et si $U' := \bigcap_{b \in \mathcal{B}} U^b$ alors U' est un ouvert contenant A, et $U' \cap V' = \varnothing$.

2. Supposons que ce ne soit pas vrai alors

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in X \qquad (d(x, K) < r) \text{ et } x \notin U.$$

En prenant $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ nous obtenons une suite (x_n) tel que $d(x_n, K) < \frac{1}{n}$ et $x_n \notin U$. Comme $d(x_n, K) < \frac{1}{n}$ alors il existe $y_n \in K$ tel que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Nous avons une suite (y_n) dans K compact donc on peut en extraire une sous-suite $y_{\phi(n)}$ qui converge ; notons ℓ sa limite, alors $\ell \in K$ car K est compact.

Regardons la suite extraite $(x_{\phi(n)})$, montrons quelle converge également vers ℓ :

$$d(x_{\phi(n)}, \ell) \leqslant d(x_{\phi(n)}, y_{\phi(n)}) + d(y_{\phi(n)}, \ell)$$

Les deux termes à droite de l'inégalité tendent vers 0, donc $(x_{\phi(n)})$ tend vers ℓ. Soit $F = X \setminus U$ alors F est une fermé (car U est ouvert) et $(x_{\phi(n)}) \in F$ donc la limite ℓ est dans F également. Donc $\ell \notin U$ et comme $K \subset U$ alors $\ell \notin K$. Nous avons montrer deux choses contradictoires $\ell \in K$ et $\ell \notin K$ ce qui prouve le résultat demandé.

Correction 2 Nous allons utiliser le fait qu'un ensemble K est compact si et seulement si de toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente vers un élément de K. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente et soit ℓ sa limite. Notons

$$K = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}.$$

Soit (v_n) une suite d'éléments de K. Si (v_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut extraire une sous-suite constante, donc convergente. Sinon (v_n) prend une infinité de valeurs. Nous allons construire une suite convergente(w_n) extraite de (v_n). Soit w_0 le premier des $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ qui appartient à $\{u_0, u_1, \ldots\}$. Soit w_1 le premier des $(v_1, v_2, \ldots)$ qui appartient à $\{u_1, u_2, \ldots\}$... Soit w_n le premier des $(v_n, v_{n+1}, \ldots)$ qui appartient à $\{u_n, u_{n+1}, \ldots\}$. Alors (w_n) est une suite-extraite de (v_n) et par construction (w_n) converge vers la limite de (u_n), donc vers $\ell \in K$.

Correction 3 1. Notons $\ell = \mathrm{dist}(K,F)$. Alors il existe (x_n) suite d'éléments de K et (y_n) suite d'éléments de F telles que $\|x_n - y_n\| \to \ell$. Comme K est compact alors on peut extraire de (x_n) une sous-suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge dans K. Notons $a \in K$ cette limite Alors la suite extraite $(y_{\phi(n)})$ est bornée car

$$\|y_{\phi(n)}\| \leqslant \|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\| + \|x_{\phi(n)}\|.$$

La suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge est donc bornée, et la suite $(\|y_{\phi(n)} - x_{\phi(n)}\|)$ qui converge dans $\mathbb{R}$ (vers ℓ) est bornée également. Donc la suite $(y_{\phi(n)})$ est bornée on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(y_{\phi\circ\psi(n)})$. De plus comme F est fermé alors cette suite converge vers $b \in F$. La suite $(x_{\phi\circ\psi(n)})$ extraite de $(x_{\phi(n)})$ converge vers $a \in K$. Et comme nous avons extrait deux suites (x_n) et (y_n) on a toujours $\|x_{\phi\circ\psi(n)} - y_{\phi\circ\psi(n)}\| \to \ell$. A la limite nous obtenons $\|a-b\| = \ell$ avec $a \in K$ et $b \in F$.

2. Remarque : si K était supposé fermé mais pas compact alors le résultat précédent pourrait être faux. Par exemple pour $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 1 \text{ et } y \geqslant 0\}$ et $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0\}$ nous avons $d(K,F) = 0$ mais $K \cap F = \varnothing$.

Correction 4 Comme E est compact et $E \subset \bigcup_{y\in E} V_y$ il existe un ensemble fini $\mathcal{Y} \subset E$ tel que $E \subset \bigcup_{y\in\mathcal{Y}} V_y$. Sur chaque voisinage V_y, f est bornée par une constante M_y. Notons $M = \max_{y\in\mathcal{Y}} M_y$. Alors f est bornée sur E par M. En effet pour un élément quelconque $x \in E$, il existe $y \in \mathcal{Y}$ tel que $y \subset V_y$ donc $f(x)$ est bornée par M_y donc par M.

Correction 5 1. Soit $x = \lim x_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$; montrons que x est dans F_N. On a $x_N \in F_N$, $x_{N+1} \in F_{N+1} \subset F_N$, $x_{N+2} \in F_{N+2} \subset F_{N+1} \subset F_N$, etc. Donc pour tout $n \geqslant N$ alors $x_n \in F_N$. Comme F_N est fermé, alors la limite x est aussi dans F_N. Ceci étant vrai quelque soit N, alors $x \in \bigcap_N F_N$.

Pour construire un exemple comme demandé il est nécessaire que de toute suite on ne puisse pas extraire de sous-suite convergente. Prenons par exemple dans $\mathbb{R}$, $F_n = [n, +\infty[$, alors $\bigcap_n F_n = \varnothing$.

2. (a) Pour chaque n on prend $x_n \in K_n$, alors pour tout n, $x_n \in K_0$ qui est compact donc on peut extraire une sous-suite convergente. Si x est la limite de cette sous-suite alors $x \in K$. Donc K est non vide.

   (b) Par l'absurde supposons que c'est faux, alors

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \geqslant N \quad \exists x_n \in K_n \text{ tel que } x_n \notin \Omega.$$

   De la suite (x_n), on peut extraire une sous-suite $x_{\phi(n)}$ qui converge vers $x \in K$. Or $x_n \in X \setminus \Omega$ qui est fermé donc $x \in X \setminus \Omega$. Comme $K \subset \Omega$ alors $x \notin K$ ce qui est contradictoire.

Correction 6 Soit $x \in X$ et $\varepsilon > 0$.

1. Pour tout $y \in [0,1]$ f est continue en (x,y) donc il existe un $U(y)$ voisinage de x et $[a(y), b(y)]$ voisinage de y tel que pour $(x', y') \in U(y) \times [a(y), b(y)]$ on ait $|f(x,y) - f(x',y')| \leqslant \varepsilon$.
2. Comme $[0,1] \subset \bigcup_{y\in[0,1]} [a(y), b(y)]$ et que $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$ il existe un ensemble fini $\mathcal{Y}$ tel que $[0,1] \subset \bigcup_{y\in\mathcal{Y}} [a(y), b(y)]$. De plus quitte à réduire les intervalles ont peut supposer qu'il sont disjoints et quitte à les réordonner on peut supposer que ce recouvrement s'écrit :

$$[0,1] = [0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots [t_k, 1].$$

3. Notons $U = \bigcap_{y\in\mathcal{Y}} U(y)$, c'est un voisinage de x car l'intersection est finie. Pour $x' \in U$ nous avons

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(x')| &= \left| \int_0^1 f(x,y)dy - \int_0^1 f(x',y)dy \right| \\
&\leqslant \int_0^1 |f(x,y) - f(x',y)|dy \\
&\leqslant \int_0^{t_1} |f(x,y) - f(x',y)|dy + \int_{t_1}^{t_2} \cdots + \int_{t_k}^1 |f(x,y) - f(x',y)|dy \\
&\leqslant \varepsilon(t_1 - 0) + \varepsilon(t_2 - t_1) + \cdots + \varepsilon(1 - t_k) \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc g est continue.

Correction 7 1. Pour montrer que $A + B$ est fermé, nous allons montrer que toute suite de $A+B$ qui converge, converge vers un élément de $A+B$. Soit (x_n) un suite de $A+B$ qui converge vers $x \in E$. Alors il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tel que $x_n = a_n + b_n$. Comme A est compact on peut extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)})$ qui converge vers $a \in A$. Alors $b_{\phi(n)} = x_{\phi(n)} - a_{\phi(n)}$ est convergente vers $x - a$. Notons $b = x - a$ comme B est fermé alors $b \in B$. Maintenant $x = a + b$ donc $x \in A + B$.

2. Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 1 \text{ et } x \geqslant 0\}$, soit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0\}$. Alors $F + G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\} \cup \{0\} \times [0, +\infty[$ qui n'est pas un fermé (ni un ouvert).

Correction 8 1. Supposons f propre et soit F un fermé. Montrons que $f(F)$ est un fermé. Soit (y_n) une suite de $f(F)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$. Notons K l'union de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et de $\{y\}$. Alors K est compact. Comme $y_n \in f(F)$, il existe $x_n \in F$ tel que $f(x_n) = y_n$. En fait $x_n \in f^{-1}(K)$ qui est compact car f est propre. Donc de (x_n) on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$, on note x la limite de cette sous-suite. Comme $x_{\phi(n)} \in F$ et que F est fermé alors $x \in F$. Comme f est continue alors $y_{\phi(n)} = f(x_{\phi(n)})$ tend vers $f(x)$, or $y_{\phi(n)}$ tend aussi vers y. Par unicité de la limite $y = f(x)$. Donc $y \in f(F)$ et $f(F)$ est fermé.

2. Dire $\|f(x)\| \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$ est équivalent à

$$\forall M > 0 \quad \exists m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (x \notin B(0,m) \Rightarrow f(x) \notin B(0,M)).$$

(a) Supposons f propre, soit $M > 0$. Alors $B(0,M)$ est un compact (nous sommes dans $\mathbb{R}^n$) donc $f^{-1}(B(0,M))$ est compact donc borné, c'est-à-dire qu'il existe $m > 0$ tel que $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Donc si $x \notin B(0,m)$ alors $f(x) \notin B(0,M)$.

(b) Réciproquement, soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme f est continue et que K est fermé alors $f^{-1}(K)$ est un fermé. Reste à montrer que $f^{-1}(K)$ est borné. Comme K est compact alors il existe $M > 0$ tel que $K \subset B(0,M)$, par hypothèse il existe $m > 0$ tel que si $x \notin B(0,m)$ alors $f(x) \notin B(0,M)$, ce qui s'écrit aussi par contraposition : "si $f(x) \in B(0,M)$ alors $x \in B(0,m)$", donc $f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Or $K \subset B(0,M)$ donc $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(B(0,M)) \subset B(0,m)$. Donc $f^{-1}(K)$ est borné donc compact.

Correction 9 1. Soit f_n la fonction affine suivante $f_n(t) = 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{n+1}]$ et pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$. Sur $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ on définit une "dent" qui vaut 0 aux extrémités et 1 au milieu du segment. Alors si B dénote la boule unité fermée (centrée en la fonction nulle), nous avons $d_\infty(f_n, 0) = \sup |f_n(t)| = 1$ donc $f_n \in B$. Par contre si $p \neq q$ alors $d(f_p, f_q) = 1$ donc la suite (f_n) et toute sous-suite ne sont pas de Cauchy. Si B était compact alors on pourrait extraire une sous-suite convergente donc de Cauchy. Contradiction.

2. Notons $x^n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ la suite de l^∞ (le 1 est à la n-ième place). Alors x^n est dans la boule unité fermée B centrée en 0. De plus si $p \neq q$, alors $d_\infty(x^p, x^q) = 1$. Donc toute sous-suite extraite de (x_n) n'est pas de Cauchy donc ne peut pas converger. Donc B n'est pas compact.

Correction 11 1. Si f a deux points fixes $x \neq y$, alors $d(x, y) = d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Ce qui est absurde. Donc f a au plus un point fixe.

2. f est continue et X compact donc $X_1 = f(X)$ est compact, par récurrence si X_{n-1} est compact alors $X_n = f(X_{n-1})$ est compact. De plus $f : X \to X$, donc $f(X) \subset X$ soit $X_1 \subset X$, puis $f(X_1) \subset f(X)$ soit $X_2 \subset X_1$, etc. Par récurrence $X_n \subset X_{n-1} \subset \cdots \subset X_1 \subset X$. Comme chaque X_n est non vide alors Y n'est pas vide (voir l'exercice 5).

3. Montrons d'abord que $f(Y) \subset Y$. Si $y \in Y$, alors pour tout $n \geqslant 0$ on a $y \in X_n$ donc $f(y) \in f(X_n) = X_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$. Donc pour tout $n > 0$, $f(y) \in X_n$, or $f(y) \in X_0 = X$. Donc $f(y) \in Y$.

   Réciproquement montrons $Y \subset f(Y)$. Soit $y \in Y$, pour chaque $n \geqslant 0$, $y \in X_{n+1} = f(X_n)$. Donc il existe $x_n \in X_n$ tel que $y = f(x_n)$. Nous avons construit (x_n) une suite d'élément de X compact, on peut donc en extraire une sous-suite convergente $(x_{\phi(n)})$. Notons x la limite, par l'exercice 5, $x \in Y$. Alors $y = f(x_{\phi(n)})$ pour tout n et f est continue donc à la limite $y = f(x)$. Donc $y \in f(Y)$.

   Soit $y \neq y' \in Y$ tel que $d(y, y') = \operatorname{diam} Y > 0$. Comme $Y = f(Y)$ alors il existe $x, x' \in Y$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Or $d(y, y') = d(f(x), f(x')) < d(x, x')$. On a trouvé deux élements de Y tel $d(x, x')$ est strictement plus grand que le diamètre de Y ce qui est absurde. Donc $y = y'$ et le diamètre est zéro.

4. Comme le diamètre est zéro alors Y est composé d'un seul point $\{p\}$ et comme $f(Y) = Y$ alors $f(p) = p$. Donc p a un point fixe et nous savons que c'est le seul. Par la construction de Y pour tout point $x_0 \in X$ la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers p.

Correction 12 1. Comme $E \times E$ est compact alors de la suite (a_n, b_n) on peut extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)}, b_{\phi(n)})$ qui converge vers (a_∞, b_∞). Soit $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geqslant n$ alors $d(a_{\phi(k)}, a_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(b_{\phi(k)}, b_\infty) < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc en particulier $d(a_{\phi(n+1)}, a_{\phi(n)}) \leqslant d(a_{\phi(n+1)}, a_\infty) + d(a_\infty, a_{\phi(n)}) < \varepsilon$. La propriété pour f s'écrit ici $d(a_k, b_{k'}) \leqslant d(a_{k+1}, b_{k'+1}) \geqslant$. Donc $d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)}, a_0) \leqslant d(a_{\phi(n+1)-\phi(n)+1}, a_1) \leqslant \ldots \leqslant d(a_{\phi(n+1)-1}, a_{\phi(n)-1}) \leqslant d(a_{\phi(n+1)}, a_{\phi(n)}) < \varepsilon$. Donc pour $k = \phi(n+1) - \phi(n)$, sachant que $a_0 = a$ alors $d(a_k, a) < \varepsilon$. Même chose avec (b_n).

2. (a) Soit $a \in E$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe $k \geqslant 1$ tel que $a_k = f^k(a) \in f(E)$ avec $d(a, a_k) < \varepsilon$. Donc $f(E)$ est dense dans E.

   (b) Soit $u_n = d(a_n, b_n)$. Alors par la propriété pour f, (u_n) est une suite croissante de $\mathbb{R}$. Comme E est compact alors son diamètre est borné, donc (u_n) est majorée. La suite (u_n) est croissante et majorée donc converge vers u.

   Maintenant $u_n - u_0 \geqslant 0$ et

   $$0 \leqslant u_n - u_0 = d(a_n, b_n) - d(a, b) \leqslant d(a_n, a) + d(a, b) + d(b, b_n) - d(a, b) = d(a_n, a) + d(b_n, b).$$

   Donc u_n tend vers u_0. Comme (u_n) est croissante alors $u_n = u_0$ pour tout n. En particulier $u_1 = u_0$ donc $d(a_1, b_1) = d(a_0, b_0)$ soit $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$. Donc f est une isométrie.

(c) f est une isométrie donc continue (elle est 1 lipschitziènne !). E est compact donc $f(E)$ est compact donc fermé or $f(E)$ est dense donc $f(E) = E$. Donc f est surjective

Correction 13 Dire que $i : (X, |.|) \to (X, d)$ est continue c'est exactement dire que tout ensemble U ouvert pour d est ouvert pour $|.|$ (car $i^{-1}(U) = U$).

1. Soit K un compact pour $|.|$. Soit U_i, $i \in I$ tels que $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ et tels que U_i soient des ouverts pour d. Alors les U_i sont aussi des ouverts pour la topologie définie par $|.|$. Comme K est compact pour $|.|$ alors on peut extraire un ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Donc K est aussi compact pour d.

   Si F est un fermé pour $|.|$ alors $F \subset [0, 1]$ est compact pour $|.|$ Donc compact pour d, donc fermé pour d.

2. Si U est un ouvert pour d alors U est un ouvert pour $|.|$. Car i est continue. Réciproquement si U est un ouvert pour $|.|$ alors $F = X \setminus U$ est un fermé pour $|.|$ donc F est un fermé pour d par la question précédente, donc $U = X \setminus F$ est un ouvert pour d. Conclusion les ouverts pour $|.|$ et d sont les mêmes donc $|.|$ et d définissent la même topologie.