UNIVERSITÉ DES LAGUNES
Année 2022-2023

Fiiche 3
Espaces compacts

Licence 3 : Sciences et Technologie

TD : TOPOLOGIE

Exercice 1 Montrer que dans un espace topologique séparé, une suite convergente et sa limite forme un ensemble compact.

Exercice 2 Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique tel que $card\, \mathcal{O}$ soit fini.Montrer que E est compact.
En déduire que tout espace topologique fini (c'est-à-dire $card\, E$ fini) est compact.

Exercice 3

1. Soit $\mathbb{N}$ muni de la topologie discrète. Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas compact.
2. Montrer qu'un espace discret est compact si et seulement si il est fini.

Exercice 4 Démontrer que si $f\ E \to F$ est continue, avec E compact et F séparé, alors $f(E)$ est compact.

Exercice 5 Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. On rappelle que $d\ :\ X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est continue. Soit $K \subset X$, $K \neq \emptyset$. Le diamètre de K noté $diam(K)$ est définie par

$$diam(K) = \sup\{d(x,\ y)\ :\ (x,\ y) \in K \times K\}.$$

Montrer que si K est compact alors le diamètre de K est réalisé c'est-à-dire

$$\exists (x,\ y) \in K \times K \qquad \text{tel que} \qquad d(x,\ y) = diam(K).$$

Exercice 6 Soit $(X,\, d)$ et $(Y,\, \delta)$ deux espaces métriques et $f\ :\ X \to Y$ une application. On suppose que X est compact, f est continue et bijective.
Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel normé. Soit A et B deux parties non vide de E.

1. Montrer que A et B compacts entraînent $A + B$ compacts.
2. A compact et B fermé entraînent $A + B$ fermés.
3. Donner un exemple où A et B sont fermés mais pas $A + B$.

Exercice 8 Soit $(X,\, d)$ un espace métrique. Un sous-ensemble A de X est dit **précompact** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de A par des boules fermées de rayon ε dont les centres sont des points de A.

1. Montrer que Si X est compact alors il est précompact.
2. En déduire que si A est précompact alors l'adhérence de A notée $\overline{A}$ est précompact.