Licence 3 : Sciences et Technologie

TD : TOPOLOGIE

Exercice 1 Pour tous n, m éléments de $\mathbb{N}^*$. On pose

$$d(n,\, m) = 0 \quad \text{si } n = m \quad \text{et} \quad d(n,\, m) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \quad \text{si } m \neq n.$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $f(n) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que $d(f(n),\, f(m)) < d(n,\, m)$ si $n \neq m$ mais que f n'est pas une contraction.

Exercice 2 Soit $E = \mathcal{C}([0,\, 1],\, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,\, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sur $E \times E$, on dédinit les applications d et e par

$$d(f,\, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx \quad \text{et} \quad e(f,\, g) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - g(x)|.$$

1. Montrer que d et e sont des distances sur E.
2. Soit $r > 0$. On définit g par

$$g(x) = -\frac{4x}{r} + 4 \quad \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}r \quad \text{et } g(x) = 2 \quad \text{si } \frac{1}{2}r \leqslant x \leqslant 1.$$

   Montrer que $g \in B_d(f,\, r)$ mais que $g \notin B_e(f\, 1)$.
3. En déduire que d et e ne sont pas topologiquement équivalentes.

Exercice 3 Soient $(X,\, d)$ un espace métrique et $a \in X$. Pour tous x et y dans X, on pose;

$$d_a(x,\, y) = d(a,\, x) + d(a,\, y) \quad \text{si } x \neq y \quad \text{et} \quad d_a(x,\, y) = 0 \ \text{ si } x = y.$$

1. Montrer que d_a est une distance sur X.
2. Montrer que pour tout réel $r > 0$, on a $B_{d_a}(a,\, r) = B_d(a,\, r)$.
   Autrement dit, la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la distance d_a est égale à la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la distance d.
3. Soit $x \in X$ tel que $x \neq a$. ¡montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $B_{d_a}(x,\, r) = \{x\}$.
4. soit A une partie de X.
   a) Montrer que si $a \notin A$, alors A est un ouvert de X pour la sistance d_a.
   b) On suppose que $a \in A$.
   Montrer que A est un ouvert de X pour d_a si et seulement si A est un voisinage de a pour la distance d.
5. Montrer que si d est la distance discrète sur X, alors d et d_a sont équivalentes.

Exercice 4 Soit $E = \mathcal{C}([0,\, 1] \to \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications continues de $[0,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose :

$$N(f) = \int_0^1 t|f(t)|dt \quad \text{et } \|f\|_\infty = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|.$$

1. Montrer que N est une norme sur E.
2. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$f_n(t) = 1 - nt \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad f_n(t) = 0 \ \text{ si } \ \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1.$$

a) Calculer $\|f_n\|_\infty$ et $N(f_n)$.
b) En déduire que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Sur E on définit une application $\mathcal{N}$ par

$$\mathcal{N}(P) = \sup_{x \geqslant 0} e^{-x} |P(x)|.$$

On considère l'application $\mathcal{T} \,:\, E \to E$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \mathcal{T}(P)(x) = P(x+1).$$

1. Montrer que $\mathcal{N}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur E.
3. Montrer que $\mathcal{T}$ est linéaire.
4. Montrer que pour tout P élément de E on a

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}(P)) \leqslant \, e\,\mathcal{N}(P).$$

Exercice 6 On note l^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. Montrer que l'application $\|\cdot\|$ définie sur l^∞ par

$$\|x\| = \sup\{|x_n| \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

est une norme.