



CSC : Conseils + Sujets + Corrections

LE VALIDEUR LMD 2020



UFR DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

- ✓ **Calcul différentiel et EDO**
- ✓ **Géométrie 3**
- ✓ **Probabilités avancées**
- ✓ **Optimisation**
- ✓ **Régression et ANOVA**
- ✓ **Analyse factorielle et Clustering**
- ✓ **Gestion de projet**
- ✓ **Technique de recherche documentaire**
- ✓ **Entrepreneuriat**
- ✓ **Anglais**
- ✓ **Technique d'expression**

L3
SEMESTRE 2

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

AVANT- PROPOS

« Je ne puis apprendre à parler à qui ne s'efforce de parler. »

Confucius

Le VALIDEUR LMD est un recueil d'anciens sujets du système LMD, de propositions de corrections et des conseils absolument importants à savoir. Sa mise à votre disposition vous permettra de vous imprégner du type de sujets auxquels vous pourriez être confrontés. En effet, à l'université, Connaître le cours est capitale ; connaître les Travaux Dirigés est conseillé mais ne pas s'approprier les anciens sujets est dangereux.

- ❖ La première partie de ce document présente quelques témoignages d'anciens et les opportunités qu'offre la filière.
- ❖ La seconde partie contient les sujets avec propositions de corrections des années académiques (2014-2015/2015-2016/2016-2017/2017-2018/2018-2019) et les travaux dirigés (TD) avec corrections des années antérieures.

S'appuyant sur l'expérience personnelle des auteurs et sur de nombreux témoignages d'étudiants, cet ouvrage se veut résolument concret et Opérationnel.

Vous avez des questions au sujet du VALIDEUR LMD ? Un point de cours qui vous résiste ? Une erreur que vous avez croisée dans l'ouvrage ? Voulez-vous intégrer l'équipe ? Ou vous voulez juste nous laisser un petit mot gentil ? Et bien n'hésitez pas à nous contacter. Nous nous ferons un plaisir de vous répondre dans les meilleurs délais : tornaproyeo@gmail.com

L'EQUIPE VALIDEUR LMD.



SOMMAIRE

Avant-propos	/1
Introduction	/5
Première partie	
Témoignages des aînés	/7
Vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatique	/10
Quelques précieux liens absolus pour mieux vous orienter	/11
Deuxième partie	
Maquette de l'année académique	/13
Examens de CALCUL DIFFERENTIEL	
Examen UNISAT session 1 2015-2016	/14
Examen session 1 2015-2016	
Examen session 2 2015-2016	
Examen ENS session 1 2016-2017	/17
Examen session 1 2016-2017	
Examen ENS session 2 2016-2017	
Examen session 2 2016-2017	
Examen session 1 2017-2018	/21
Examen session 2 2017-2018	
Examen session 1 2018-2019	/23
Examen session 2 2018-2019	
Examens de EDO 2	
Examen session 1 2014-2015	/25
Examen session 2 2014-2015	
Examen session 1 2015-2016	/27
Examen session 2 2015-2016	
Examen UNISAT session 2 2015-2016	
Examen session 1 2016-2017	/30
Examen ENS session 1 2016-2017	
Examen session 2 2016-2017	
Examen session 1 2017-2018	/33
Examen session 2 2017-2018	
Examen session 1 2018-2019	/35
Examen session 2 2018-2019	
Examens de GEOMETRIE 3	
Examen session 1 2014-2015	/37
Examen session 1 2015-2016	/38
Examen session 2 2015-2016	
Examen session 1 2016-2017	/40
Examen session 2 2016-2017	
Examen session 1 2017-2018	/42
Examens de PROBABILITES AVANCEES	
Examen session 1 2014-2015	/43
Examen session 1 2015-2016	/44
Examen session 2 2015-2016	
Examen session 1 2016-2017	/48
Examen session 2 2016-2017	
Examen session 2 2018-2019	/52
Examens d'OPTIMISATION	
Examen session 1 2014-2015	/54
Examen session 2 2014-2015	
Examen session 1 2015-2016	/58
Examen session 2 2015-2016	
Examen session 1 2016-2017	/60
Examen session 2 2016-2017	
Examen session 1 2017-2018	/64

Examen session 2 2017-2018	
Examen session 2 2018-2019	/68
Examens de REGRESSION ET ANOVA	
Examen session 1 2015-2016	/69
Examen session 1 2015-2016	
Examen session 2 2015-2016	
Examen session 2 2015-2016	
Examen session 1 2016-2017	/83
Examen session 1 2017-2018	/88
Examen session 2 2017-2018	
Examen session 1 2017-2018	
Examen session 1 2018-2019	/94
Examen session 2 2018-2019	
Examens d'ANALYSE FACTORIELLE ET CLUSTERING	
Examen session 1 2015-2016	/100
Examen session 2 2015-2016	
Examen session 1 2016-2017	/104
Examen session 1 2017-2018	/108
Examen session 2 2017-2018	
Examen session 1 2018-2019	/112
Examen session 2 2018-2019	
Examens de GESTION DE PROJETS	
Examen session 1 2014-2015	/116
Examen session 1 2015-2016	/119
Examen session 2 2015-2016	
Examen session 1 2016-2017	/125
Examen session 2 2016-2017	
Examen session 1 2017-2018	/130
Examen session 2 2017-2018	
Examen session 1 2018-2019	/132
Examens de TRD	
Examen session 2 2014-2015	/136
Examen session 2 2015-2016	/137
Examen session 1 2016-2017	/138
Examen ENS session 1 2016-2017	
Examen session 2 2016-2017	
Examen session 1 2017-2018	/141
Examen session 1 2018-2019	/143
Examens d'ENTREPRENARIAT	
Examen session 1 2015-2016	/145
Examen M2 session 1 2015-2016	
Examen session 1 2016-2017	/147
Examen session 2 2016-2017	
Examen session 1 2017-2018	/149
Examen session 1 2018-2019	/150
Examens d'ANGLAIS	
Examen session 1 2015-2016	/151
Examen session 1 2015-2016	
Examen session 2 2015-2016	
Examen session 2 2015-2016	
Examen session 1 2016-2017	/155
Examen session 1 2017-2018	/157
Examen session 2 2017-2018	
Examen session 1 2018-2019	/165

Examens de TECHNIQUE D'EXPRESSION	
Examen session 1 2015-2016	/168
Examen session 1 2016-2017	/169
Examen session 2 2016-2017	
Examen session 1 2017-2018	/171
Examen session 1 2018-2019	/172
FICHES DE TD	
Calcul différentiel 2015-2016	/173
EDO S2 2015-2016	/175
Probabilités avancées 2015-2016 et 2016-2017	/176
Analyse des données 2015-2016	/180
PROPOSITIONS DE CORRECTIONS	
CALCUL DIFFERENTIEL	
Examen session 1 2015-2016	/192
Examen session 2 2015-2016	/199
Examen session 1 2017-2018	/205
EDO_S2	
Examen session 2 2018-2019	/210
GEOMETRIE 3	
Examen session 1 2018-2019	/214
PROBABILITES AVANCEES	
Examen session 1 2015-2016	/217
Examen session 2 2015-2016	/223
Examen session 1 2018-2019	/234
OPTIMISATION	
Examen session 2 2015-2016	/240
Examen session 1 2016-2017	/244
Examen session 1 2018-2019	/248
REGRESSION ET ANOVA	
Examen session 1 2015-2016	/253
ANALYSE FACTORIELLE ET CLUSTERING	
Examen session 1 2016-2017	/258
GESTION DE PROJETS	
Examen session 2 2015-2016	/263
Examen session 1 2016-2017	/265
Examen session 2 2016-2017	/269
Examen session 1 2018-2019	/273
TRD	
Examen session 1 2016-2017	/278
Examen session 2 2016-2017	/280
ENTREPRENARIAT	
Examen session 1 2016-2017	/281
Examen session 2 2016-2017	/282
ANGLAIS	
Examen session 1 2016-2017	/283
TECHNIQUE D'EXPRESSION	
Examen session 1 2016-2017	/285
CORRECTION DE TD	
Calcul différentiel	/286
EDO_S2	/310
Probabilités avancées	/319
Analyse convexe et optimisation	/362
ANOVA	/377
Analyse des données	/382
Bibliographie	/385

Introduction

L'équipe Valideur LMD vous souhaite la bienvenue en Licence 3 de mathématique. Toutes nos Félicitations !

Rien de si agréable de se voir admis en Licence 3. Pour ceux qui sont autorisés, ce n'est pas grave. Comme on le dit souvent mieux vaut avoir un peu que de ne rien avoir (mieux vaut être autorisé que de reprendre l'année).

Bref : la venue en licence 3 est une chose, une autre est de pouvoir y faire face à ce troisième niveau du premier cycle Universitaire. Nous pouvons vous dire qu'avec la Licence, beaucoup de portes s'ouvrent à vous. Pour pouvoir avoir des informations sur le comportement à avoir, sur les opportunités, Nous allons plus ou moins répondre à quelques questions.

❖ Quel est le niveau de difficulté de la Licence 3 ?

Evidemment le niveau de difficulté augmente par rapport à celui de la Licence 1&2. Certains ont tendance à penser que plus tu avances plus c'est facile. Ce n'est pas vraiment le cas. Seulement il faut savoir que pour celui qui a acquis le niveau Licence 1&2 en toute honnêteté n'a pas à se préoccuper.

A vrai dire les cours deviennent de plus en plus volumineux.

❖ Comment surmonter ces difficultés ?

En premier lieu, il faut avoir confiance en soi. Ah oui !! Et recommander le reste à DIEU.
En deuxième lieu, apprendre ses cours au jour le jour puis ses travaux dirigés (vraiment important) et voir les anciennes compositions qui se trouvent dans ce document.
Lors des compositions, svp faite bien les exercices que vous choisissez. Même lorsque vous rencontrez un exercice que vous avez déjà traité, faite bien attention à la rédaction. En troisième lieu travailler quelques fois en groupe *très important*. Attention !! Apprendre ses cours avant le travail en groupe ; sinon c'est inutile.

L'équipe VALIDEUR LMD 2020 se dit heureux de contribuer efficacement à la formation des futurs cadre de la nation. En outre elle se compose de :

- MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 → Yéo TORNA MI/UFHB
- MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 → Tobo GONSEU BIENVENU MI/UFHB
- MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 → Gbadié Tersia Marius Claver MI/UFHB
- MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 → N'guessan Taneh JEAN-ROMUALD MI/UFHB
- MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 → Koukra Essigbé Charlie Christelle MI/UFHB
- MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 → Koudou Moko Christelle MI/UFHB
- MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 → Bamba Adama MI/UFHB
- MEMBRE VALIDEUR LMD 2020 → Koffi Yetran Ange Eric MI-Actuariat/UFHB

PREMIERE PARTIE

Bienvenu dans cette première partie novatrice du document valideur LMD. Dans cette partie, il s'agira pour nous de vous donner cette propulsion à **votre projet professionnel**. Omniprésentes dans l'industrie – aérospatiale, imagerie, cryptographie..., ou dans les services-banques, assurances..., les mathématiques apparaissent aussi dans de nombreux autres secteurs : sondages, gestion des risques, protection des données...Elles interviennent dans notre vie quotidienne – télécommunication, transports, médecine, météorologie, musique...et contribuent à la résolution de problématiques actuelles : énergie, santé ; environnement, climatologie, développement durable...Pour renchérir de cette diversité des mathématiques informatiques auprès des étudiants de l'Université Félix Houphouët Boigny ; voici ci-après des témoignages d'anciens ayant effectués des études à l'UFR Math Info de ladite Université.

Après un Baccalauréat série D avec une mention en 2013, j'ai été orienté à l'UFR Maths-Info afin de poursuivre mes études et après une première année de **tronc commun** en 2014 que j'ai validé avec succès je me suis orienté en **Licence 2 de mathématiques et applications** afin de toujours rester dans la ferveur des mathématiques car c'est l'orientation que j'ai voulu donner à ma vie. Après avoir validé la licence 2 en 2015 j'ai continué sur la même lancée en me dirigeant vers une **Licence 3 de mathématiques et applications** que j'ai obtenu avec brio en 2016. Et après ma L3 j'avais la possibilité de m'orienter soit en Master EDP Optimisation et analyse numérique, soit en Master maths fondamentale, soit en Probabilité ; étant passionné des maths appliquées je décidai de m'orienter en EDP-Optimisation et analyse numérique dans le but de décrocher un **doctorat en Analyse numérique**, une année que je ne termine pas suite à ma motivation d'aller terminer mes études en France. Cela ma conduire à postuler pour **Campus France** qui s'est soldé par un succès et aujourd'hui Alhamdulillah je continue mes Etudes en **Licence 3 de Mathématiques Pures à l'Université Clermont Auvergne (France)**. Etant ici je m'aperçois d'autres opportunités plus facile à accéder après une Licence de Maths d'où ma motivation a changé mon objectif qui était d'avoir un doctorat en analyse numérique, aujourd'hui j'ai décidé de faire un Master de statistiques et analyses des données après ma licence afin de devenir un Data Scientist .**Mes conseils aux plus jeunes**, c'est d'abord leur dire de ranger leurs BACs avec les mentions dans leurs sacs car une autre histoire vient de commencer et la meilleur manière de vivre pleinement cette histoire est d'être endurant , patient, courageux, bosseur et avoir la foi en Dieu comme on aimait si bien le dire « **c'est nous qui bossons mais c'est DIEU qui fait valider** » ; soyez humble ,respectueux envers vos aînés quelques soit leurs âges car pour nous, aînés signifie qu'il a intégré l'université avant toi donc quel que soit ton intelligence tu lui dois respect et considération et vice versa. **Surtout ne traînez pas à l'université**, ne vous attardez pas sur les futilités, ne vous adonnez pas aux vices, visez bien votre objectif et donnez-vous les moyens de les atteindre car les années passent très vite étant à la fac.

Merci pour votre attention, c'était votre frère, votre aîné, votre conseiller
KONE YACOUBA alias Scologie First

Je suis **Alassane Daniogo**. Après mon baccalauréat au Lycée scientifique de Yamoussoukro, je me suis orienté en math info. Ainsi avec ma licence 2 mathématique, j'ai été admis au concours d'entrée à l'école **Supérieure de l'Aéronautique et de la Haute technologie de Casablanca**. Mes motivations ont été mon rêve de devenir un jour ingénieur dans les domaines de l'électricité, mon regard sur des devantiers qui arrivaient à gravir les échelons malgré toutes les difficultés, ma détermination et mon courage. Comme conseils à la nouvelle génération, ne pas oublier d'aucune nation ne pourrait avancer sans science. Cependant, il faut s'armer de courage, faire des efforts pour s'investir dans cette science très porteuse dans le monde d'aujourd'hui.

Je me rappelle encore ce jour : « **Le jour où j'ai été orienté en Math-Info** ». Ce jour-là, un oncle m'a dit : « **Math-Info ? Petit ! C'est pour devenir professeur de Maths ou bien ? Bizarrement, c'est ce que plusieurs personnes pensent et disent dans l'ignorance.** »

Aujourd'hui, cet oncle s'étonnait de me voir embrasser la filière de DATA SCIENCE – BIG DATA (Filière dont il n'a aucune notion) : Voilà un exemple des bienfaits de la filière Mathématique et Informatique. Vous vous demanderiez certainement « Comment j'ai fait pour arriver à ce stade ? ».

Soyez-en rassurés, vous avez intégré une filière qui ne peut vous laisser pas au chômage après même que vous ayez validé la L2/L3 ; car cette filière ouvre plusieurs portes à bien plus de concours que vous ne pouvez imaginer.

Mais, Comment décrocher au moins la L2/L3 ?

C'est Le travail (La bosse, le Kosso, les 2kpi, encore la bosse) ; et non seulement le travail mais aussi le courage ; pas ça seulement, il y a aussi la confiance en soi et LA CONFIANCE EN DIEU. Ne comptez pas sur votre série du BAC ni sur votre note en Maths à l'examen.

Ici, c'est le travail, le courage, la confiance en soi et la Confiance en Dieu.

Vous pouvez y arriver !!! J'ai obtenu la licence sans reprendre de classe, sans même avoir été autorisé. Vous aussi vous pouvez le faire !!!

Travaillez et travaillez en groupe ! Loin de vous les mauvais groupes et LOIN DE VOUS LA TRICHERIE (même en examen) !!!

Vous êtes des ZOULOUS ! Croyez en vous et croyez en DIEU.

RESTEZ DIGNE DANS LA DOULEUR !!! Digné Brice KOUSSAN Data Scientist chez Orange CI

Je suis Traoré Yacouba. Après un BAC C au lycée moderne kv de Meagui, j'opte pour mes études supérieures, la filière MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE. Ce choix résulte du fait que mon professeur de math de Tle C qui a été un très bon enseignant pour moi est passé par cette filière et est celui qui m'a vraiment encouragé à suivre cette formation. De plus j'aimais vraiment les maths. Avant de venir, plusieurs personnes ont essayé de me dissuader de venir faire la filière car pour eux, c'est une « mission impossible ».

Alors une fois en math info, le début n'a pas été du tout facile pour un nouveau de la ville comme moi et surtout le système de transport ; il fallait faire un arbitrage le retard et risque d'agression. Une solution a été de rester au campus avec des amis et dormir dans les amphis (mais là encore j'étais constamment à cours de liquidité). Quant aux cours, je remercie l'équipe "LE VALIDEUR" pour avoir mis à notre disposition un document (LE VALIDEUR LMD) nous permettant d'avoir une idée de ce qui nous attendait dans les compos et de nous avoir dispensé des cours gratuitement. Avec détermination et persévérance, je valide la première année, la deuxième année et la licence en Mathématique. En licence 2, je passe le concours ITS sous réserve que plus tard, sans trop de concentration, j'échoue. En licence, je passe cette fois-ci le concours ISE sous réserve, STIC et central Casablanca et je réussis au concours ISE. Et depuis octobre 2018 je suis la formation des Ingénieurs Statisticiens Economistes.

Pour la jeune génération, j'aimerais d'abord vous dire que si vous avez été orientés en MATH INFO c'est parce-que vous en avez les capacités. Il ne faut surtout pas vous sous-estimer. Ne vous laissez pas dominer par les problèmes ; faites face et avancez (parmi mes amis d'autre essayaient le salon et faisaient d'autre corvées à la maison avant de venir, ils ont cependant validé les trois années sans reprendre et des concours). Empreignez-vous constamment de bons documents et entourez-vous d'amis qui aiment travailler sérieusement. Et pour finir un point sur lequel j'aimerais insister, c'est l'information : Informez-vous régulièrement si possible et ne passez pas vos temps à surfer sur les réseaux sociaux à ne rien faire de bon. Utilisez plutôt ces réseaux à bon escient notamment en prenant des informations auprès des aînés.

Je suis KOUAME N'Guessan Anan, élève ingénieur statisticien économiste à l'École Nationale Supérieure de Statistiques et d'Économie Appliquée (ENSEA). Pour la petite histoire, c'était en 2014 lors de la classe de terminale C, au lycée classique d'Abidjan que j'ai entendu parler de cette prestigieuse école qu'est l'ENSEA, mais pour moi c'était le BAC avant tout. Après l'obtention de mon BAC C en 2014, mon objectif était d'entrer à l'INPHB, je ne voulais même pas fouler le sol de l'université vu tout ce qui s'y raconte (grève, FESCI). Malheureusement j'ai échoué au concours et me voici contraint d'aller à



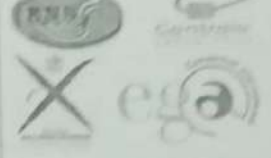
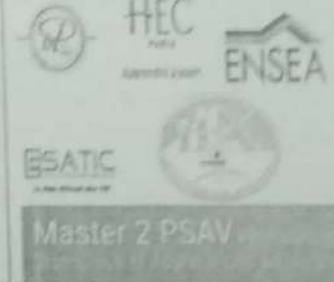
l'université. J'avais le choix entre trois filières : SFA, PHYSIQUE CHIMIE, MATH INFO. Des filières que je ne voulais pas faire car, disait-on que ce genre de filière était fait pour devenir professeur de lycée ou collège. Finalement j'opte pour math info. Arrivé en Math-Info, je découvre un nouveau monde, un nouvel esprit, les anciens nous racontèrent à quel point la filière est difficile. J'étais déboussoler jusqu'à me demander qu'est-ce que je suis venu faire ici. Les débuts n'étaient pas faciles mais je me suis battu d'arrache-pied pour m'adapter. C'est ainsi que j'obtiens ma licence en mathématique en 2018 sans reprendre une seule année. En master j'opte pour l'option EDP mais au bout de quelques mois de cours la motivation n'y était plus, avec toutes ces grèves, je ne voyais pas mon avenir dans cette filière. Je décide alors d'aller tenter ma chance dans les concours. C'est ainsi qu'en 2019 je suis admis aux concours d'ISE, ITS et IFORD. J'opte pour la formation ISE. Mon conseil pour la jeune génération, c'est d'avoir un rêve, un but à atteindre. Il faut rêver grand et se donner les moyens d'y parvenir en travaillant rigoureusement car le travail paie toujours. Ne pas trop se fier aux "on dit" sur les filières. Croyez en vos capacités.

Je suis KONE SIDNEY AZIZ KHADER, élève ingénieur à l'Ecole Supérieure Africaine des Technologies de l'Information et de la Communication (ESATIC) en Systèmes d'Informations et Génie Logiciel. Après l'obtention de mon baccalauréat D au lycée moderne Djedji Amondji Pierre 220 Logements d'Adjamé, j'ai intégré l'UFR de mathématiques et informatiques à l'université FHB de Cocody. Passionné des TIC, je me suis orienté dans la filière Sciences Informatiques après le tronc commun. J'ai évolué dans cette filière jusqu'au master 1 ensuite j'ai présenté le concours d'entrée à l'ESATIC niveau master.

Je tiens à souligner que dès ma première année en math info mon projet d'études était déjà claire, mon objectif était de pouvoir entamer une carrière d'informaticien.

Pour finir, le conseil que je puisse laisser aux plus jeune c'est de croire en ce qu'on ambitionne de faire et se donner les moyens d'atteindre ses objectifs, croire en DIEU et en soi même, bosser et rester optimiste et enfin s'informer au maximum sur les concours qu'on veut présenter.

Pour une vue globale des possibilités après des études en mathématiques informatiques

Etant en licence 1 math info	<ul style="list-style-type: none"> • Procédure CAMPUS France • Concours AD de l'ENSEA, TS de l'EAMAC • Des bourses pour les étudiants de L1 	
Etant en licence 2 math info	<ul style="list-style-type: none"> • ITS sous réserve • Cycle ingénieur EAMAC sous réserve • ISFA, EURIA, ISUP...(BECEAS) 	
Etant en licence 3 math info	<ul style="list-style-type: none"> • Concours ENS • ISE de l'ENSEA sous réserve • Cycle ingénieur Centrale Casablanca 	
Une L3 math info validée	<ul style="list-style-type: none"> • Concours cycle ingénieur INPHB, ISE • Concours Master IFORD, IIA, Big Data, ESATIC, PSAV • Concours écoles de commerce HEC, ESSEC, ESCP... 	

NB: Qui peut le plus, peut le moins. Cela dit que si vous être de niveau sup vous avez la possibilité de postuler à tous les opportunités de niveaux inférieures tout en respectant les conditions d'âge pour certains concours.

Quelques précieux liens absolus pour mieux vous orienter

Campus France Côte d'Ivoire :

<https://www.ivoire.campusfrance.org> (site d'informations de base)

Concours Centrale Casablanca :

<http://www.centrale-casablanca.ma/fr/> (site info et concours cycle ingénieur)

Concours INPHB Yamoussoukro (Bourse du gouvernement après admission) :

<http://www.inphb.ci/2/vues/accueil/> (site info)

http://www.inphb.ci/ConCours_Ing-INPHB-2020/ (site concours Ingénieurs)

Concours ENSEA Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :

<http://ensea.ed.ci/> (site info)

<http://capesa.ensai.fr> (site concours cycle AS/cycle ingénieur)

Concours HEC Paris (Bourse du gouvernement après admission) :

<https://www.hec.edu/fr>

<https://www.hec.edu/fr/grande-ecole-masters/programme-grande-ecole/admissions>

Concours ENS Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :

<https://ens.laatech.com/> (site concours)

<http://www.ensabidjan.ci/> (site info)

Concours IIA Yaoundé :

<http://www.iiayaounde.com/>

<http://www.iiayaounde.com/linstitut/conditions-dadmission/>

Concours X polytechnique de Paris (Bourse du gouvernement après admission) :

<https://www.polytechnique.edu/> (site officiel)

<https://www.polytechnique.edu/admission-cycle-ingenieur/fr/voie-universitaire-univ-filiere-universitaire-internationale-fui> (page admission)

Concours ESATIC Abidjan (Bourse du gouvernement après admission) :

<https://www.esatic.ci/index1.php> (site info)

<https://www.esatic.ci/admission.php> (page admission)

Concours ISFA Lyon (Actuariat) :

<https://isfa.univ-lyon1.fr/>

<https://isfa.univ-lyon1.fr/formation/actuariat/admission-a-la-formation-d-actuaire-a-l-isfa-803812.kjsp>

Bourse Japon 2020 (Bourse du gouvernement Japonais après admission) :

<https://www.ci.emb-japan.go.jp/files/000475798.pdf> (PDF d'information à télécharger)

https://www.ci.emb-japan.go.jp/itpr_ja/00_000401.html (site officiel de la bourse)

Bourse Russie 2020 (Bourse du gouvernement Russe après admission) :

<https://cotedivoire.mid.ru/web/cote-d-ivoire-fr/conditions-a-remplir-pour-devenir-candidats-aux-bourses-du-gouvernement-russe>

M2PSAV de l'UFR Math Info (Possibilité de Bourse du gouvernement après admission) :

<http://m2psav.master.edu-math.org/> (site officiel)

http://m2psav.master.edu-math.org/?page_id=18 (page de candidature)

Concours IFORD Yaoundé (Bourse du gouvernement après admission) :

<http://www.iford-cm.org/>

<http://www.iford-cm.org/index.php/etudes-formation/concours-entree/informations-utiles>

Concours EAMAC de Niamey (Bourse d'organisme Aéronautique(ANAC,SODEXAME ...) après admission) :

<http://www.anac.ci/anac/web/> (site de l'autorité nationale de l'aviation civile de Côte d'Ivoire)

<http://www.anac.ci/anac/web/docs/BrochureANAC2017.pdf> (PDF pour s'informer sur l'aviation en Côte d'Ivoire à télécharger)

DEUXIEME PARTIE

Université Félix HOUPHOUËT-BOIGNY
 Mathématiques et Informatique
 Sciences et Technologies
 Licence
 Mathématiques
 Mathématiques et Applications
 L3

Etablissement
 UFR
 Domaine
 Grade
 Mention
 Parcours
 Niveau

Semestre 6

Code UE	Intitulé des Unités d'Enseignement	Code EC	Eléments constitutifs	Masse Horaire Semestrielle des EC											CECT UE	Fonctionnalité	
				CM	TD	TP	Sémi.	Sortie T	HE	HE	TPE	TPE	TPE	CTT			Coef
UE de Spécialité																	
CDE2116	Calcul Différentiel et EDO	CDE21161	Calcul Différentiel	18	12	0	0	0	30	30	45	45	45	75	3	4	Obligatoire
CDE2116	Calcul Différentiel et EDO	CDE21162	EDO	6	4	0	0	0	10	10	15	15	15	25	1		
GEO2116	Géométrie 3	GEO2116	Géométrie 3	18	12	0	0	0	30	30	45	45	45	75	3	3	Obligatoire
PRB2116	Probabilités Avancées	PRB2116	Probabilités Avancées	30	20	0	0	0	50	50	75	75	75	125	5	5	
OC02116	Optimisation	OC021161	Optimisation Continue	18	12	0	0	0	30	30	45	45	45	75	3	6	Optionnel
OC02116	Optimisation	OC021162	Optimisation Discrète	18	12	0	0	0	30	30	45	45	45	75	3		
AND2116	Analyse des Données	AND21161	Régression linéaire et Analyse de variance	12	12	6			30	30	45	45	45	75	3	6	Optionnel
AND2116	Analyse des Données	AND21162	Analyse factorielle et clustering	12	9	9	0	0	30	30	45	45	45	75	3		
				40%	35%	25%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	60%	60%	6		
UE de Méthodologie																	
TRE2116	Techniques de Recherche documentaire et Techniques d'expression	TRE21161	Techniques de Recherche documentaire	8	6	6	0	0	20	20	30	30	30	50	2	4	Obligatoire
TRE2116	Techniques de Recherche documentaire et Techniques d'expression	TRE21162	Techniques d'expression	8	12				20	20	30	30	30	50	2		
GPA2116	Gestion de Projets et Applications	GPA2116	Gestion de Projets et Applications	40%	45%	15%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	60%	75	3	3	Obligatoire
AEE2116	Anglais et Entrepreneuriat	AEE2116	Anglais	12	6	12	0	0	30	30	45	45	45	75	3		
				40%	20%	40%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	60%	60%	3		
UE de Culture Générale																	
AEE2116	Anglais et Entrepreneuriat	AEE2116	Anglais	30	0	0	0	0	30	30	45	45	45	75	3	5	Obligatoire
AEE2116	Anglais et Entrepreneuriat	AEE2116	Entrepreneuriat	20	0	0	0	0	20	20	30	30	30	50	2		
				0%	100%	0%	0%	0%	40%	40%	60%	60%	60%	60%	5		
Total Semestre									300	300	450	450	450	750	5	30	

NB : 1 UE à choisir parmi les 2 UE optionnelles

UNISAT

Année 2015-2016

Licence 3 - Mathématiques
 UE : Calcul Différentiel et EDO
 ECUE : Calcul Différentiel
 Première Session - Juillet 2016
 Durée : 2 heures. (Sans documents)

Exercice 1

Énoncer le théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach réels.

Exercice 2

Soit E un espace de Banach sur \mathbb{R} . Soit $f : \text{Isom}(E) \rightarrow L(E)$ l'application définie par

$$f(u) = u^2 - 2u + u^{-1}.$$

- 1) Montrer que f est différentiable et calculer $df(u) \cdot h$, $\forall u \in \text{Isom}(E)$, $\forall h \in L(E)$.
- 2) Montrer que pour v proche de 0, l'équation $u^3 - 2u^2 - uv + Id_E = 0$ admet une unique solution u dans un ouvert $U \subset \text{Isom}(E)$.
- 3) Montrer que f est deux fois différentiable et calculer $f''(u) \cdot (h_1, h_2)$, $\forall u \in \text{Isom}(E)$, $\forall h_1, h_2 \in L(E)$.

Exercice 3

Soient E et F deux espaces de Banach réels. Soit U un ouvert non vide de E .

Soit $f : U \rightarrow F$ une application. Soit $a \in U$ et $h \in E$. On pose

$$d^G f(a) \cdot h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$$

lorsque cette limite existe.

On dit que f est G -différentiable en a si $d^G f(a) \cdot h$ existe pour tout $h \in E$ et si l'application

$$\begin{aligned} d^G f(a) : E &\rightarrow F \\ h &\mapsto d^G f(a) \cdot h \end{aligned}$$

est linéaire continue.

- 1) Montrer que si f est différentiable en a alors f est G -différentiable en a et $d^G f(a) = df(a)$.

- 2) Soit $S = [a, a+h] = \{a + th / t \in [0, 1]\}$ et $\varphi : t \in [0, 1] \mapsto f(a + th) \in F$. Montrer que si f est G -différentiable en tout point du segment S et si l'application

$$\begin{aligned} d^G f : S &\rightarrow L(E, F) \\ x &\mapsto d^G f(x) \end{aligned}$$

est continue sur S , alors φ est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et on a

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 d^G f(a+th) \cdot h dt$$

- 3) Montrer que si f est G -différentiable dans un voisinage V de a et si l'application $d^G f : x \mapsto d^G f(x)$ est continue sur V , alors f est différentiable en a et $df(a) = d^G f(a)$.

Université Félix Houphouët Boigny
 UFR Mathématiques et Informatique
 Année universitaire : 2015 - 2016

LICENCE 3 - Mention : Mathématiques
 ECUE Calcul différentiel
 Examen - Session du 15 décembre 2016 - Durée : 2H30.

Exercice 1. Soit E_n , l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n . Étudier la différentiabilité des applications suivantes définies sur E_n . En tout polynôme P , on notera F (respectivement G) est différentiable, on précisera la différentielle.

$$P \mapsto F(P) = P' - P^2; \quad P \mapsto G(P) = \int_0^1 (P^2(t) - P^2(t)) dt$$

Exercice 2. On considère la fonction numérique définie sur \mathbb{R}^2 par

$$F(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y) - 1.$$

- (i) Montrer que l'équation $F(x, y) = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite $\varphi : x \mapsto y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 0$.
- (ii) Donner le développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 3. Soit f une application différentiable de \mathbb{R}^2 dans lui-même et qui est propre, c'est-à-dire qui est telle que $\|f(x)\|$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Ici, $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne issue du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de \mathbb{R}^2 . On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x)$ est injective. On veut démontrer que f est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et g l'application numérique définie par $g(x) = \|f(x) - a\|^2$.

- (i) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $g'(x)$.
- (ii) Démontrer que g atteint sa borne inférieure en un point $x_0 \in \mathbb{R}^2$, et que $g'(x_0) = 0$.
- (iii) En déduire la surjectivité de f .

Université Félix Houphouët-Boigny - UFR Mathématiques et Informatique
Année universitaire 2015-2016

L3 : Mathématiques et Applications
ECUE : Calcul différentiel
Session du 15 mars 2017 - Durée : 03H

Aucun document n'est autorisé !

Exercice 1. (05 points) Écrivez proprement :

- (i) le théorème des accroissements finis pour les fonctions numériques ;
- (ii) le théorème des accroissements finis pour les fonctions à valeurs vectorielles ;
- (iii) le théorème des fonctions implicites ;
- iv le théorème d'inversion locale pour les fonctions de classe C^1 .

Exercice 2. (15 points) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et I_E l'identité de E . On considère l'application $\Theta : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\Theta(u) = u \circ u = u^2$.

1. Montrer que Θ est de classe C^1 et calculer sa différentielle en tout point u_0 .
2. Montrer qu'il existe un réel positif ϵ qui est tel que, pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|u - v\| < \epsilon$, l'équation $u \circ u = v$ possède une solution dans $\mathcal{L}(E)$.
3. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$. On considère les éléments u et h de $\mathcal{L}(E)$ dont les matrices dans la base canonique de \mathbb{R}^2 sont :

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer $\Theta'(u)h$.
- (b) En déduire qu'il n'existe pas de fonction différentiable Ψ définie sur un voisinage \mathcal{W} de I_E et à valeurs dans un voisinage de u dans $\mathcal{L}(E)$, telle que $\Psi(I_E) = u$ et $\Psi(w) \circ \Psi(w) = w$ pour tout $w \in \mathcal{W}$.

Ecole Normale Supérieure d'Abidjan
Centre de Formation Continue
Université de Vacances

Année 2016-2017

Licence 3 - Mathématiques
UE : Calcul Différentiel et EDO
ECUE 1 : Calcul Différentiel
Première Session - Juin 2017
Durée : 2 heures. (Sans documents)

Exercice 1

Énoncer le théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach réels.

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} , $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et A un automorphisme de E (i.e. $A \in L(E)$ et est bijectif).

Soit $f : L(E) \rightarrow L(E)$ l'application définie par

$$f(X) = X - XAX$$

où le produit UV est la composée $U \circ V$.

1) Montrer que f est différentiable et calculer $df(X) \cdot H$, $\forall X \in L(E), \forall H \in L(E)$.

2) Montrer que f est de classe C^1 .

3) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $Y \in L(E)$ est tel que $\|Y\|_{L(E)} < \varepsilon$, alors l'équation

$$X - XAX - Y = 0$$

admet une solution dans $L(E)$ et déterminer dans ce cas, un ouvert de $L(E)$ sur lequel la solution est unique.

Exercice 3

1) Soit E un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} . Soient U un ouvert de E et $A : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable.

Soit $\varphi : U \rightarrow E$ l'application définie par

$$\varphi(x) = A(x)x.$$

1) Montrer que φ est différentiable et calculer $d\varphi(x) \cdot h$, $\forall x \in U, \forall h \in E$.

2) On suppose que E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et est complet pour la norme $\|\cdot\|$ associé au produit scalaire.

On pose $U = E \setminus \{0\}$. Soit $f : U \rightarrow E$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

a) Dédurre de la question précédente que f est différentiable et calculer $df(x) \cdot h$, $\forall x \in U, \forall h \in E$.

b) Montrer que f est une bijection de U sur U et que f est un difféomorphisme de classe C^∞ de U sur U .

Calculer $[df(x)]^{-1}$, $\forall x \in U$.

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Mathématiques et Informatique

Année 2016-2017

Licence 3 - Mathématiques
UE : Calcul Différentiel et EDO
ECUE : Calcul Différentiel
Première Session - Novembre 2017
Durée : 2 heures. (Sans documents)

Exercice 1

Énoncer le théorème d'inversion locale dans les espaces de Banach réels.

Exercice 2

Soit E un espace de Banach sur \mathbb{R} . Soit $f : \text{Isom}(E) \rightarrow L(E)$ l'application définie par

$$f(u) = u^2 - 2u + u^{-1}.$$

1) Montrer que f est différentiable et calculer $df(u) \cdot h$, $\forall u \in \text{Isom}(E), \forall h \in L(E)$.

2) Montrer que pour v proche de 0, l'équation $u^3 - 2u^2 - uv + Id_E = 0$ admet une unique solution u dans un ouvert $U \subset \text{Isom}(E)$.

3) Montrer que f est deux fois différentiable et calculer $f''(u) \cdot (h_1, h_2)$, $\forall u \in \text{Isom}(E), \forall h_1, h_2 \in L(E)$.

Exercice 3

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} muni de la norme définie par $\forall A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in E, \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$.

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(A) = \text{Tr}({}^tAA)$$

où Tr désigne la trace et tA la matrice transposée de A .

1) Montrer que f est différentiable et calculer $df(A) \cdot H$, $\forall A \in E, \forall H \in E$.

2) Déterminer les points critiques de f et préciser le type d'extréma en ces points.

Ecole Normale Supérieure d'Abidjan
Centre de Formation Continue
Université de Vacances

Année 2016-2017

Licence 3 - Mathématiques
UE : Calcul Différentiel et EDO
ECUE 1 : Calcul Différentiel
Deuxième Session - Juillet 2017
Durée : 2 heures. (Sans documents)

Exercice 1

Énoncer le théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach réels.

Exercice 2

1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme associée à ce produit scalaire est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Soit u un endomorphisme symétrique de E , c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

1) Montrer que l'application $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \langle u(x), x \rangle$ est différentiable sur E et calculer $d\varphi(a) \cdot h$, $\forall a \in E, \forall h \in E$.

2) Soit $\Theta : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\Theta(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}.$$

Montrer que Θ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et calculer $d\Theta(a) \cdot h$, $\forall a \in E \setminus \{0\}, \forall h \in E$.

Exercice 3

Soient X, E, F, G des espaces vectoriels normés sur \mathbb{R} . Soit U un ouvert de X .

Soient $\varphi : U \rightarrow L(E, F)$ et $\psi : U \rightarrow L(F, G)$ des applications deux fois différentiables.

Soit f l'application définie sur U par :

$$\forall u \in U, f(u) = \psi(u) \circ \varphi(u).$$

1) Montrer que f est différentiable sur U et calculer

$$df(u) \cdot h$$

pour tous $u \in U, h \in E$.

2) Montrer que f est deux fois différentiable sur U et calculer

$$f''(u) \cdot (h, k)$$

pour tous $u \in U, h, k \in E$.

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Mathématiques et Informatique

Année 2016-2017

Licence 3 - Mathématiques
UE : Calcul Différentiel et EDO
ECUE : Calcul Différentiel
Deuxième Session - Février 2018
Durée : 2 heures. (Sans documents)

Exercice 1

Énoncer le théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach réels.

Exercice 2

Soient E et F deux espaces de Banach sur \mathbb{R} , U un ouvert non vide de F , $\phi : U \rightarrow L(E)$ et $\psi : U \rightarrow \text{Isom}(E)$ des applications différentiables.

Soit f l'application définie sur U par

$$f(u) = (\psi(u))^{-1} \circ \phi(u) \circ \psi(u).$$

- 1) Montrer que f est différentiable et calculer $df(u) \cdot h$, $\forall u \in U, \forall h \in F$.
- 2) Soit $A \in \text{Isom}(E)$. On suppose que $\psi(u) = A$. Dans ce cas, calculer $df(u) \cdot h$.
- 3) On suppose que $U = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$ et

$$\psi(u) = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}$$

en identifiant un endomorphisme avec sa matrice dans la base canonique.

a) Calculer $(\psi(u))^{-1}$ et la différentielle de l'application $g : u \mapsto (\psi(u))^{-1}$.

b) On suppose que $\phi(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $f(u)$ et $df(u)$.

Exercice 3

Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans \mathbb{R} et $F = GL_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles.

1) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \det(A)$.

Sachant que f est différentiable sur E , montrer que :

a) $\forall H \in E$, $df(I) \cdot H = \text{Tr}(H)$ où I est la matrice unité et Tr désigne la trace.

b) $\forall A \in F, \forall H \in E$, $df(A) \cdot H = \det(A) \text{Tr}(A^{-1}H)$.

2) Soit $g : F \times E \rightarrow E$ définie par $g(A, B) = AB - I$.

Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites que l'application $\varphi : F \rightarrow F$ définie par $\varphi(A) = A^{-1}$ est différentiable sur F et calculer $d\varphi(A) \cdot H$, $\forall A \in F, \forall H \in E$.

Université Félix Houphouët Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année universitaire : 2017 -2018

LICENCE 3 – Mention : Mathématiques - ECUE : Calcul différentiel

Epreuve du 12 Janvier 2019 – Durée : 02H30.

Exercice 1. Soit E et F des espaces vectoriels normés sur un corps commutatif K , U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$, une application, a un élément de U

1. Montrer qu'il existe au plus une application linéaire continue $g : E \rightarrow F$ telle que pour tout h dans un voisinage de o_E de E ,

$$f(a+h) = f(a) + g(h) + |h|_E \varphi(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow o_E} \frac{\varphi(h)}{|h|_E} = o_F.$$

2. Exprimer que f est différentiable au point a
3. Démontrer que si f est différentiable au point a , elle est continue en a .
4. Démontrer que si f est linéaire et continue, elle est différentiable.
5. Soient G un autre espace vectoriel normé sur le même corps que E et F , $k : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire et continue. Démontrer que k est différentiable et, pour tout $a, u \in E$, $b, v \in F$, donner l'expression de l'image de (u, v) par la différentielle de k au point (a, b) .

Exercice 2. Soit E, F et G des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E , $f : U \rightarrow F$ et $T : E \times F \rightarrow G$ des applications.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis pour f .
2. (a) Énoncer le théorème des fonctions implicites pour T .
(b) Sous quelles conditions minimales la fonction implicite φ est différentiable. Trouver l'expression de la différentielle de φ en un point a .
(c) Énoncer le théorème d'inversion locale pour f .

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 et, $K > 0$ tels que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|f(x) - f(y)\| \geq K \|x - y\|.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans \mathbb{R}^n .
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f'(x)$ est injective.
4. En utilisant le théorème d'inversion locale, montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n . En déduire que f est C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Mathématiques et Informatique

Année 2017-2018

Licence 3 - Mathématiques
UE : Calcul Différentiel et EDO
ECUE : Calcul Différentiel
Deuxième Session - Mars 2019
Durée : 2 heures. (Sans documents)

Exercice 1

Soient E_1, E_2 et F des espaces de Banach réels. Soit

$$B : E_1 \times E_2 \rightarrow F \\ (x_1, x_2) \mapsto B(x_1, x_2)$$

une application bilinéaire continue.

Montrer que B est différentiable et calculer $B'(x_1, x_2) \cdot (h_1, h_2)$ pour tous $(x_1, x_2), (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$.

Exercice 2

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} . Soit $L(E)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans E .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'application $\varphi_n : L(E) \rightarrow L(E)$ définie par $\varphi_n(f) = f^n$.

1) Montrer que, dans chaque cas particulier où $1 \leq i \leq 3$, l'application φ_i est différentiable et calculer $\varphi_i'(f) \cdot h$ pour tous $f, h \in L(E)$.

(On pourra écrire φ_i comme composée d'applications différentiables).

2) Montrer que φ_n est différentiable pour tout $n \in \mathbb{N}$, et calculer $\varphi_n'(f) \cdot h$ pour tous $f, h \in L(E)$.

Exercice 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} . On considère l'application $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x) = \|x\|$.

1) Montrer que si N est différentiable en $x \in E$, alors $\forall h \in E$

$$N'(x) \cdot h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (N(x + th) - N(x)).$$

2) L'application N est-elle différentiable en 0 ?

3) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

a) On pose $\forall u, v \in E, g(u, v) = \langle u, v \rangle, f(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 = \frac{1}{2} \langle u, u \rangle$ et $N(u) = \|u\|$

Montrer que g est différentiable en tout point de $E \times E$.

En déduire que f est différentiable en tout point de E .

Déduire de ce dernier résultat la partie de E sur laquelle N est différentiable.

Dans chaque cas on donnera l'expression de la différentielle.

b) Soit F un espace vectoriel normé sur \mathbb{R} . Soit U un ouvert de F et $\psi : U \rightarrow E$ une application différentiable. On pose $\Phi(u) = \|\psi(u)\|$.

Etudier la différentiabilité de l'application Φ et calculer $\Phi'(u) \cdot h$ lorsqu'il existe.

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2018 - 2019

Licence 3: CALCUL DIFFERENTIEL Examen Première Session

Durée: 2 heures 15 mn

Exercice 1: (Cours)

1°) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$, et $(G, \|\cdot\|_G)$ des espaces vectoriels normés sur \mathbb{R} , $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications, et $x_0 \in E$.

On suppose que f est différentiable en x_0 , et que g est différentiable en $f(x_0)$.

Montrer que $g \circ f$ est différentiable en x_0 .

2°) Énoncer le théorème des accroissements finis dans le cas où la variable est vectorielle.

Exercice 2:

$E_0 := C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , que l'on munit de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$.

$C^1([0, 1], \mathbb{R})$ est l'espace vectoriel réel des applications de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , et E_1 désigne le sous-espace vectoriel de $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ formé des éléments f tels que $f(0) = 0$.

Pour tout $f \in E_1$, on pose

$$\|f\|_1 := \|f'\|_\infty \text{ et } \phi(f) = f' + f^2.$$

1°) Montrer que $(E_1, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.

2°) Montrer que ϕ est une application de classe C^2 de $(E_1, \|\cdot\|_1)$ dans $(E_0, \|\cdot\|_\infty)$, et calculer ses différentielles première et seconde.

3°) Montrer que ϕ est un C^2 -difféomorphisme d'un voisinage U de 0_{E_1} sur un voisinage V de 0_{E_0} .

4°) Calculer la différentielle première de $(\phi|_U)^{-1}$ sur V .

5°) Calculer la différentielle seconde de $(\phi|_U)^{-1}$ en 0_{E_0} .

Exercice 3:

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach, U un voisinage ouvert de 0_E , et $A : U \rightarrow L(E, F)$ une application de classe C^1 telle que $A(0_E) \in \text{Isom}(E, F)$. Pour tout $x \in U$ on pose

$$B(x) = A(x).x.$$

Montrer que B est un C^1 -difféomorphisme d'un voisinage V de 0_E dans E sur un voisinage W de 0_F dans F .

Université FHB - Cocody
 UFR Mathématiques -
 Informatique

Année universitaire 2018 - 2019

Licence 3: CALCUL DIFFERENTIEL
 Examen Seconde Session

Durée: 2 heures 30 mn

Exercice 1: (Cours)

1°) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés sur \mathbb{R} , $f : E \rightarrow F$ une application, et $x_0 \in E$.

Soient $\|\cdot\|_1$ une norme sur E qui est équivalente à $\|\cdot\|_E$, et $\|\cdot\|_2$ une norme sur F qui est équivalente à $\|\cdot\|_F$.

Montrer que f est différentiable en x_0 pour les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ si et seulement si f est différentiable en x_0 pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

2°) Énoncer le théorème des fonctions implicites.

Exercice 2:

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E := M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $F := GL(n, \mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles.

Soit $g : F \times E \rightarrow E$ l'application définie par: $g(A, B) = AB - I$, où I est la matrice identité.

Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites appliqué à g que l'application $\phi : F \rightarrow F$ définie par $\phi(A) = A^{-1}$ est différentiable sur F et calculer sa différentielle.

Exercice 3:

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach sur \mathbb{R} , et $f : Isom(E) \rightarrow L(E)$ l'application définie par:

$$f(u) = u^2 - 2u + u^{-1}, \forall u \in Isom(E).$$

1°) Montrer que f est différentiable et calculer $df(u).h, \forall u \in Isom(E)$ et $\forall h \in L(E)$.

2°) Montrer que pour v proche de 0_E , l'équation $u^3 - 2u^2 - uv + Id_E = 0$ admet une unique solution dans un certain ouvert U de $Isom(E)$.

3°) Montrer que f est deux fois différentiable, et calculer $f''(u).(h_1, h_2), \forall u \in Isom(E)$ et $\forall h_1, h_2 \in L(E)$.

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2014 - 2015

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.
Examen Première Session
(24/11/2015) Durée: 1 heure 30mn

Exercice 1: (10 pts)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad (1 + t^2)y''(t) + t^2y(t)y'(t) + e^{-t}y(t)^2 = 0,$$

où y est une fonction à valeurs réelles de la variable réelle t .

1°) Posons $u(t) = y(t)$ et $v(t) = y'(t)$.

Montrer que y est solution de (E) si et seulement si (u, v) est solution de

$$(E_1) \quad \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{t^2}{1+t^2}u(t)v(t) - \frac{1}{1+t^2}e^{-t}u(t)^2. \end{cases}$$

2°) Etudier l'existence théorique de solution (u, v) de (E_1) .

3°) A-t-on unicité des solutions de (E_1) ?

4°) Enoncer le théorème des solutions partout définies. Ce théorème s'applique-t-il à (E_1) ?

Exercice 2: (10 pts)

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad \begin{cases} x' = -2y + z \\ y' = x + 3y - t^2 \\ z' = -x - y + 3z \end{cases}, \text{ où } x, y \text{ et } z \text{ sont des fonctions réelles d'une variable réelle.}$$

1°) Montrer que (E) est linéaire.

2°) L'équation (E) admet-elle des solutions sur \mathbb{R} ?

3°) Jordaniser la matrice du système. En déduire la résolvante de (E).

4°) Donner la formule permettant de trouver la solution maximale $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) telle que $u(0) = (0, -1, 0)$.

N.B.: Il n'est pas demandé de calculer concrètement $u(t)$.

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2014 - 2015

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.

Examen Seconde Session

Durée: 1 heure 30mn

Exercice 1: (Cours)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, I un intervalle compact de \mathbb{R} , $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel normé des endomorphismes continus de E muni de la norme de la convergence uniforme, $A: I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et $B: I \rightarrow E$ deux applications continues, $x_0 \in E$ et $t_0 \in I$.

Soit $R(t, t_0)$ la résolvante de l'équation différentielle

$$(E) \quad \begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t) \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

1°) Montrer que, y définie par

$$y(t) = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t R(t, s)B(s)ds, \forall t \in I,$$

est une solution de (E) sur I .

2°) Montrer que (E) admet une seule solution sur I .

Exercice 2:

On considère l'équation différentielle:

$$(E_1) \quad y''(t) + ty'(t) - 2y(t) = 4, \quad y(0) = -1 \text{ et } y'(0) = 0.$$

1°) Montrer que $y_1(t) = t^2 + 1$ est une solution de

$$(E_2) \quad y''(t) + ty'(t) - 2y(t) = 0$$

sur \mathbb{R} .

2°) Soit $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Posons $u(t) = y(t)$ et $v(t) = y'(t), \forall t \in \mathbb{R}$.
Montrer que y est solution de (E_1) si et seulement (u, v) est solution de

$$(E_3) \quad \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -tv(t) + 2u(t) + 4 \end{cases}, \quad u(0) = -1 \text{ et } v(0) = 0.$$

3°) Etudier l'existence théorique et l'unicité de solutions de (E_3) sur \mathbb{R} .

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2015 - 2016

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.

Examen de la Session Unique

Durée: 1 heure

Exercice 1: (5 points)

Enoncer le théorème de Cauchy - Lipschitz - Picard.

Exercice 2: (15 points)

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y - z \\ z' = -y - z - 1 \end{cases}, \text{ où } x, y \text{ et } z \text{ sont des fonctions réelles de la variable réelle } t.$$

- 1°) Montrer que (E) est linéaire.
 - 2°) L'équation (E) admet-elle des solutions sur \mathbb{R} ?
 - 3°) Jordaniser la matrice du système. En déduire la résolvante de (E).
 - 4°) Donner la formule permettant de trouver la solution maximale $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) telle que $u(0) = (1, 0, 0)$.
- N.B.: Il n'est pas demandé de calculer concrètement $u(t)$.

Université F.H.B Cocody
 UFR Mathématiques -
 Informatique

Année universitaire 2015 - 2016

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.

Examen de la Seconde Session

Durée: 1 heure

Exercice 1: (5 points)

Énoncer le théorème de prolongement des solutions d'une équation différentielle ordinaire.

Exercice 2: (15 points)

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x^2 y'' + 3xy' + y = 0,$$

où y est une fonction à valeurs réelles de la variable réelle $x \in]0, +\infty[$.

1°) Vérifier que $y(x) = x^{-1}$ est solution de (E).

2°) Posons $u(x) = y(x)$ et $v(x) = y'(x)$.

a) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si

$$(E_1) \quad \begin{cases} u'(x) = v(x) \\ v'(x) = -\frac{3}{x}v(x) - \frac{1}{x^2}u(x) \end{cases}$$

b) Montrer que l'équation (E_1) est linéaire.

c) Étudier l'existence théorique de solutions de (E_1) sur $]0, +\infty[$.

3°) Déterminer la résolvante $R(t, t_0)$ de (E_1) pour $t_0 \in]0, +\infty[$ fixé.

UNISAT

Année 2014-2015

Licence L3 Mathématiques
UE : Calcul Différentiel et EDO
EC : EDO
Deuxième Session - Octobre 2015
Durée : 1 heure. (Sans documents)

Exercice

Soit le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x'(t) = x(t) + z(t) - 1 \\ y'(t) = x(t) + z(t) + e^t \\ z'(t) = x(t) - y(t) + 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer la résolvante $R(t) = R(t, 0)$ du système homogène associé.
- 2) En déduire la solution du système (S) telle que
$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2016 - 2017

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.
Examen Première Session

Durée: 1 heure 30mn

Exercice 1: (5 pts) (Cours)

Soient $T > 0$ et $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application continue telle que: $\exists a, k \in \mathbb{R}_+$ vérifiant:

$$\forall t \in [0, T], u(t) \leq at + k \int_0^t u(s) ds.$$

Montrer que

$$u(t) \leq \frac{a}{k}(e^{kt} - 1), \forall t \in [0, T].$$

Exercice 2: (15 pts)

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = -4x(t) + y(t) + z(t) + t \\ y'(t) = x(t) - y(t) - 2z(t) - t \\ z'(t) = -2x(t) + y(t) - z(t) \end{cases},$$

où x, y et z sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

- 1°) Montrer que (E) est linéaire.
- 2°) L'équation (E) admet-elle des solutions sur \mathbb{R} ?
- 3°) Jordaniser la matrice du système. En déduire la résolvante de (E).
- 4°) Calculer la solution maximale $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) telle que $u(0) = (1, -1, 0)$.

Ecole Normale Supérieure d'Abidjan
Centre de Formation Continue
Université de Vacances

Année 2016-2017

Licence 3 - Mathématiques
UE : Calcul Différentiel et EDO
ECUE 2 : EDO
Première Session - Juin 2017
Durée : 1 heure. (Sans documents)

Exercice

Soit le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x'(t) = -x(t) + 4y(t) - z(t) \\ y'(t) = -5x(t) + 8y(t) - z(t) + t \\ z'(t) = x(t) - 2y(t) + 3z(t) \end{cases}$$

1) Déterminer la résolvante $R(t) = R(t, 0)$ du système homogène associé.

2) En déduire la solution du système (S) telle que $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2016 - 2017

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.
Examen Seconde Session
Durée: 1 heure 30mn

Exercice 1: (4 pts) (Cours)

Énoncer le théorème sur la continuité de la solution d'une équation différentielle par rapport à la condition initiale.

Exercice 2: (16 pts)

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) + 1 \\ y'(t) = \frac{3}{4}x(t) + \frac{1}{2}y(t) + \frac{3}{4}z(t) - t \\ z'(t) = \frac{1}{2}x(t) + 2y(t) - \frac{1}{2}z(t) + t \end{cases}$$

où x , y et z sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

1°) Montrer que (E) est linéaire.

2°) L'équation (E) admet-elle des solutions sur \mathbb{R} ?

3°) Soient A la matrice du système, u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 associé, et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de Jordan J telle que $A = PJP^{-1}$.

4°) a) Déterminer les sous-espaces caractéristiques $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(u - \lambda_i Id)^{k_i}$, où k_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i .

b) Soit u_i la restriction de u à E_{λ_i} , A_i la matrice de u_i dans la base donnée dans P , et

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \sum_i X_i(t) \in \oplus_i E_{\lambda_i}.$$

Transcrire l'équation (E) en terme de $X_i(t)$ et A_i .

c) Déterminer les $X_i(t)$ en fonction de $X(t_0)$ par la méthode de la résolvante, pour un $t_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

5°) Calculer $X(t)$ en fonction de $X(t_0)$.

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2017 - 2018

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.
Examen Première Session
Durée: 1 heure 15mn

Exercice 1: (Cours)

Soit $R(t, t_0)$ la résolvante d'une équation différentielle linéaire

$$y'(t) = A(t)y(t)$$

dans un espace de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ sur un intervalle I , où $A(t) \in \text{End}(E), \forall t \in I$.

Montrer que: $\forall t, t_0 \in I$, on a $R(t, t_0) \in \text{Isom}(E)$, et que $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$.

Rappel: $\text{Isom}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes bijectifs et continus de $(E, \|\cdot\|_E)$.

Exercice 2:

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = 4x(t) - 3y(t) + 2z(t) \\ y'(t) = 3x(t) - y(t) + 3z(t) \\ z'(t) = -2x(t) + 3y(t) + t \end{cases}$$

où x, y et z sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

1°) Montrer que (E) est linéaire.

2°) Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{R}^3$.

En utilisant les théorèmes d'existence du cours, montrer qu'il existe une et une seule solution $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) sur \mathbb{R} telle que $X(t_0) = X_0$.

3°) Jordaniser la matrice A associée à (E) .

4°) Dédire de 3°) la résolvante $R(t, t_0)$ de (E) .

5°) En utilisant la résolvante, déterminer la solution $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) telle que $X(0) = (0, 0, -1)$.

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2017 - 2018

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.
Examen Seconde Session
Durée: 1 heure 15mn

Exercice 1: (Cours) (6 points)

- 1°) Donner la définition de la solution maximale d'une équation différentielle ordinaire.
2°) Énoncer et démontrer le théorème sur la solution maximale d'une équation différentielle ordinaire.

Exercice 2: (14 points)

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = -5x(t) + 3y(t) - 4z(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 2y(t) - 3z(t) \\ z'(t) = 4x(t) - 3y(t) + 3z(t) - 2t \end{cases},$$

où x , y et z sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

1°) Montrer que (E) est linéaire.

2°) Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{R}^3$.

En utilisant les théorèmes d'existence du cours, montrer qu'il existe une et une seule solution $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) sur \mathbb{R} telle que $X(t_0) = X_0$.

3°) Jordaniser la matrice A associée à (E).

4°) Dédire de 3°) la résolvante $R(t, t_0)$ de (E).

5°) En utilisant la résolvante, déterminer la solution $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) telle que $X(0) = (0, 0, -1)$.

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2018 - 2019

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.
Examen Première Session

Durée: 1 heure 15mn

Exercice 1: (Cours)

1°) Enoncer le théorème sur la différentiabilité de la solution d'une équation différentielle par rapport à la valeur initiale.

2°) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach sur \mathbb{R} , I un intervalle compact de \mathbb{R} , $t_0 \in I$, et $A: I \rightarrow L(E)$ une application continue.

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'(t) = A(t)y(t), t \in I.$$

Pour tout $x \in E$, on note $u(t, x)$ la solution de (E) telle que $u(t_0, x) = x$.

Montrer que: $\forall t \in I$, l'application $x \mapsto u(t, x)$ est \mathbb{R} -linéaire.

Exercice 2:

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 5y(t) - 7z(t) \\ y'(t) = -4x(t) + 9y(t) + 16z(t) - t \\ z'(t) = 3x(t) - 7y(t) - 12z(t) \end{cases},$$

où x , y et z sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

1°) Montrer que (E) est linéaire.

2°) Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{R}^3$.

En utilisant les théorèmes d'existence du cours, montrer qu'il existe une et une seule solution $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) sur \mathbb{R} telle que $X(t_0) = X_0$.

3°) Jordaniser la matrice A associée à (E).

4°) Dédire de 3°) la résolvante $R(t, t_0)$ de (E).

5°) En utilisant la résolvante, déterminer la solution $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) telle que $X(0) = (0, 0, -1)$.

Université FHB - Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2018 - 2019

Licence 3: EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.
Examen Seconde Session
Durée: 1 heure 30mn

Exercice 1: (Cours)

1°) Enoncer le théorème de Cauchy - Lipschitz.

2°) Soient $T > 0$ et $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une application continue telle que: $\exists \alpha, k \in \mathbb{R}_+$ vérifiant:

$$\forall t \in [0, T], u(t) \leq \alpha t + k \int_0^t u(s) ds.$$

Montrer que

$$u(t) \leq \frac{\alpha}{k}(e^{kt} - 1), \forall t \in [0, T].$$

Exercice 2:

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad \begin{cases} x'(t) = \frac{1}{8}[2x(t) + 7y(t) + 6z(t)] + t \\ y'(t) = \frac{1}{8}[11x(t) + 6y(t) + 3z(t)] \\ z'(t) = \frac{1}{8}[-x(t) - y(t) + 7z(t)] \end{cases},$$

où x , y et z sont des fonctions réelles d'une variable réelle.

1°) Montrer que (E) est linéaire.

2°) Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in \mathbb{R}^3$.

En utilisant les théorèmes d'existence du cours, montrer qu'il existe une et une seule solution $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) sur \mathbb{R} telle que $X(t_0) = X_0$.

3°) Jordaniser la matrice A associée à (E).

4°) Dédurre de 3°) la résolvante $R(t, t_0)$ de (E).

5°) En utilisant la résolvante, déterminer la solution $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) telle que $X(0) = (0, 1, 0)$.

Université F H B

Année académique 2014-2015

UFR MI

LICENCE 3Examen de GEOMETRIE 3, 1^e session, durée 03h

Tous les exercices ont pour référentiel l'espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) muni du repère cartésien

$\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe de E

Exercice 1

1^o Former une équation du cône de sommet $S = (-2; 1; 3)$ dont une directrice est paramétrée par $\gamma: t \rightarrow (t-1; t^2+1, t^3)$

2^o Former une équation du conoïde droit d'axe (O, \vec{j}) dont les génératrices sont tangentes à la sphère d'équation: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$

Exercice 2

Préciser la nature et les caractéristiques de chacune des surfaces déterminées par les équations suivantes :

$$E_1: \frac{1}{7x+3y-2z} + \frac{2}{3x-y-2z} + \frac{2}{x+y} = 9$$

$$E_2: (3x+3y-z+2)(3y+2z) + (x+y+z-1)^2 = 0$$

$$E_3: (3x+y-z)^2 + (x+y+z+1)(2x+y+2)^2 = 0$$

Exercice 3

Déterminer sur le cylindre d'équations $x^2 + y^2 = 9$, les courbes dont la tangente est tangente à la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 18$.

Exercice 4

Soit la courbe \mathcal{C} paramétrée par :

$$\gamma: t \rightarrow P = \gamma(t) = (t, t^2, t^3)$$

Le plan osculateur à \mathcal{C} en P rencontre (Oz) en $Q(t)$.

- 1- Donner une paramétrisation de la nappe Σ engendrée par les droites $(PQ(t))$
- 2- Déterminer les lignes asymptotiques de Σ .
- 3- Déterminer les lignes de courbure de Σ .
- 4- Déterminer une équation des géodésiques de Σ .

L3 MATHEMATIQUES

GEOMETRIE 3 Examen de 2^e semestre, Durée 03 h

Les trois exercices ont pour référentiel commun l'espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

EXERCICE 1

Soit la nappe paramétrée $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathbb{R}^2, \pi)$ définie par

$$\pi(t, s) = (t + s, t^2 + 2st, t^3 + 3st^2)$$

1° Montrer que la nappe est réglée et donner les lignes coordonnées.

2° Déterminer les points réguliers de Σ .

3° Obtenir une équation du plan tangent à Σ au point $P = \pi(t, s)$ où $s \neq 0$, puis une équation du plan osculateur au point $Q = \pi(t, 0)$ à la courbe Γ paramétrée par $\gamma(t) = \pi(t, 0)$.

EXERCICE 2

1° Donner une équation du cylindre \mathcal{S} de direction $\vec{d} = (1, -1, 1)$ et de directrice Γ paramétrée par

$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{t+1}, \frac{t^2}{t+1}, \frac{t^3}{t+1} \right)$$

2° Déterminer la nature et les caractéristiques de la surface \mathcal{S}_i d'équation (E_i) ci-dessous, $i = 1, 2, 3$

$$(E1) \quad (2x + 3y + z - 1)^2 - 3(x + 2y + 2z + 1)^2 + 7(4x + 5y - z - 5) + 9 = 0$$

$$(E2) \quad (x + y + 3z + 2)\cos(2y + z + 1) + 9(3x - y + 2z + 3) = 0$$

$$(E3) \quad (2x - 3y - z + 2)(y - 2z + 3) + 4(3x + y + 1)^2 = 0.$$

EXERCICE 3

Déterminer les lignes asymptotiques de la nappe paramétrée Σ définie par

$$\Sigma = (\mathcal{S}, \mathbb{R}^2, \pi) \quad \pi(u, v) = ((1+v)\cos u, (1-v)\sin u, v).$$

Année universitaire 2015 – 2016

L3 MATHÉMATIQUES

Géométrie 3, Examen 2^{ème} Session Durée : 02 h

L'espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) muni du repère (O, \mathcal{B}) où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe de E , est le référentiel commun à tous les exercices..

Exercice 1Partie A

Déterminer la nature et les caractéristiques de la surface \mathcal{S}_i d'équation (E_i) ci-dessous, $i = 1, 2, 3$.

$$(E_1): \quad (2x + 3y - 2z)^2 + 7(2x + y)^3 + 9(y - z) = 1$$

$$(E_2): \quad (2x + 3y + 2z)^2 + 9(2x + y)^2(y - z) = 0$$

$$(E_3): \quad x^2 + (2x + y)(y - z) = 0$$

Partie B

Soit l'ellipse Γ d'équations $z = 0$ et $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, et le point $S(1, -1, 2)$.

Déterminer une équation cartésienne du cône \mathcal{S} de sommet S et de directrice Γ .

Exercice 2

Soit la nappe paramétrée Σ définie par la paramétrisation :

$$\pi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$$

1° Déterminer les lignes asymptotiques, et les lignes de courbure.

2° Montrer que la ligne coordonnée $r \rightarrow \pi(r, \theta_0)$, θ_0 constant, est une géodésique.

LICENCE 3 DE MATHÉMATIQUES
GEOMETRIE 3 Examen 1^{ère} session, Durée : 03 h

L'espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) muni du repère (O, \mathcal{B}) où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée directe de E , est le référentiel commun à tous les exercices.

Exercice 1

Soit Σ la nappe paramétrée définie par $\pi(u, v) = (u - v, u^2 + v^2, u^3 - v^3)$

- 1°) Déterminer les points stationnaires de Σ
- 2°) Obtenir une équation vérifiée par le support S de Σ .
- 3°) Donner les lignes coordonnées de la nappe paramétrée Σ

Exercice 2

Déterminer la nature et les caractéristiques de la surface (S_i) d'équation (E_i) ,
 $i = 1, 2, 3$, ci-dessous :

$$(E_1) \quad (2x + 3y + 2z)^2 + (2x + y)(y - z)^2 = 0$$

$$(E_2) \quad (3x + 2y)^2 + 3(2x + y + z)(x + y - z) = 0$$

$$(E_3) \quad (x + 3z)^2 + 5(2x - y + z)^2 + 9(x + y + 2z)^2 = 0$$

Exercice 3

Soit Σ la nappe paramétrée définie par $\pi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$

- 1°) A quelle condition la nappe est-elle régulière ? Donner les lignes coordonnées.
- 2°) Montrer que la nappe est réglée ; en déduire les géodésiques rectilignes.
- 3°) Déterminer la 1^{ère} et la 2^{ème} forme quadratique fondamentale.
- 4°) Déterminer les lignes asymptotiques et les lignes de courbure.

L3 MATHÉMATIQUES

GEOMETRIE 3, Examen 2^e session Durée : 03 h

Les trois exercices ont pour référentiel commun l'espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 1

Soit la nappe $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathbb{R}^2, \pi)$ définie par

$$\pi(s, t) = (s + t, s^2 + 2st, s^3 + 3s^2t)$$

1°) Montrer que la nappe est réglée et donner les lignes coordonnées.

2°) Donner une équation vérifiée par le support \mathcal{S} .

3°) Déterminer les points réguliers de la nappe.

4°) Obtenir une équation du plan tangent à Σ au point $P = \pi(s, t)$ régulier, puis obtenir une équation du plan osculateur au point $Q = \pi(s, 0)$ à la courbe Γ , paramétrée par $Y(s) = \pi(s, 0)$

Exercice 2

Déterminer la nature et les caractéristiques de chacune des surfaces S_i d'équation E_i , $i = 1, 2, 3$ ci-dessous :

$$(E_1) \quad (2x + y - 3z + 4)^3 + 7(x + 2y - 3z + 2)^2 - 5(x - 4y + 3z + 2) = 0$$

$$(E_2) \quad (2x + 3y - 1)^2 + 9(3x + y + z + 2)(x + 4y + z + 1) = 0$$

$$(E_3) \quad (x + y + z + 1)^2 + (2x - y + 3)(3x - 2y + 2z + 2)^2 = 0$$

EXERCICE 3

On considère la nappe Σ définie par la paramétrisation π telle que :

$$\pi(u, v) = (\operatorname{ch} u \cdot \cos v, \operatorname{ch} u \cdot \sin v, u)$$

1°) La nappe est-elle régulière ?

2°) Donner les lignes coordonnées.

3°) Déterminer la 1^e et la 2^e forme quadratique fondamentale.

4°) Donner les directions principales et les lignes de courbure, puis les directions asymptotiques et les lignes asymptotiques.

5°) Vérifier que la ligne coordonnée $u \rightarrow \pi(u, v_0)$ est une géodésique.

Université FHB

UFR MI

Année 2017-2018

LICENCE 3 MATHÉMATIQUES

Géométrie 3, Examen annuel, session 1, Déc.2018, durée 03 h.

L'espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le référentiel commun aux trois exercices qui composent ce sujet, lesquels néanmoins peuvent être abordés dans un ordre arbitraire.

Exercice 1

Les deux surfaces S_1 et S_2 d'équations respectives

$$xy + yz + zx + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x^2y + y^2z + z^2x + 1 = 0$$

ont dans leur intersection le point $A(2, -1, 1)$.

1° Montrer que cette intersection est au voisinage du point A une courbe \mathcal{C} dont on donnera la tangente en A .

2° Donner une équation du plan osculateur de \mathcal{C} en A .

3° Obtenir le repère de Frenet de \mathcal{C} en A .

Exercice 2

Donner la nature et les caractéristiques de la surface S_i d'équation E_i , $i = 1, 2, 3$:

$$(E_1) \quad x + 2y + 3z + 1 + \sin(2x + 3y + z + 1) + 2(x + y - 2z)^2 = 0$$

$$(E_2) \quad 9(y + z)^3 + 7(x + z + 1)(y^2 - z^2) = 0$$

$$(E_3) \quad (x + y + 2z + 1) \tan(x + y) + 5(x^2 - y^2) = 0$$

Exercice 3

On considère la nappe $\Sigma = (\mathcal{S}, D, \Pi)$ définie par la paramétrisation Π telle que $\Pi(u, v) = (vu, vu^2, u^3)$

1° Donner une équation du support \mathcal{S} de Π dont on précisera la nature.

2° Montrer que la surface \mathcal{S} est réglée ; en déduire une famille de géodésiques rectilignes de \mathcal{S} . Donner les lignes coordonnées.

3° Montrer que Π n'est pas injective et donner l'ensemble des points réguliers de Σ . Pour la suite, on suppose que D est choisie tel que Π est injective et Σ régulière.

4° Obtenir la deuxième forme quadratique fondamentale.

5° Déterminer les directions asymptotiques et les lignes asymptotiques.

UFR/MATHS-INFO

Année Académique 2014-2015

Niveau: Licence 3

16 décembre 2015

Examen de Probabilités Avancées

Session 1

Durée 2h 30

Exercice 1 (4 points)

On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche. On joue à pile ou face indéfiniment avec une pièce parfaite. A chaque fois qu'on obtient face on ajoute une boule noire au contenu de l'urne. La première fois qu'on tombe sur pile on tire une boule de l'urne. Si on obtient jamais pile on se fait donner une boule blanche.

- (1) Déterminer la probabilité de ne jamais avoir pile.
- (2) Déterminer la probabilité d'avoir une boule blanche.

Exercice 2 (5 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ de loi uniforme sur $[0, 1]$ et indépendantes. on pose $Z = X^2 + Y^2$ si $X^2 + Y^2 \leq 1$ et $Z = 0$ si $X^2 + Y^2 > 1$.

- (1) Montrer que pour toute fonction borélienne positive on a

$$\mathbb{E}(f(Z)) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 f(r) dr + (1 - \frac{\pi}{4})f(0)$$

- (2) On note μ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et δ_0 la mesure de Dirac en 0.
 - a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(r) dr = f(0)$
 - b) Dédire la loi de Z

Exercice 3 (5 points) On lance un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On perd un point si on obtient un chiffre strictement inférieur à 3, on gagne un point si on obtient 6, sinon on a rien. Soit X la v.a. représentant le chiffre obtenu et Y la v.a. donnant le gain. On pose $\mathcal{F} = \sigma(\{2, 4, 6\})$ et $\mathcal{H} = \sigma(\{1\}, \{1, 2\})$.

Calculer $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$, $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ et $\mathbb{E}(X|Y)$.

Exercice 4 (6 points) Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien, centré de matrice de dispersion

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- 1): Trouver la loi de $U = X + 2Y - Z$.
- 2): Trouver la loi de $Y^2/2 + Z^2/3$.
- 3): Donner la densité du vecteur aléatoire $(X + Y, Y - Z)$.

UFHB-UFRMI

Année Académique

Niveau: L3

2015/2016

Examen de Probabilités avancées

Session 1

Exercice 1 (8 points)

Trois personnes A , B , et C jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée, de la façon suivante : A et B jouent en premier et le gagnant, par exemple A , rencontre C . Si A gagne également cette seconde partie, il est déclaré vainqueur. Sinon C rencontre B , s'il gagne, C est déclaré vainqueur, sinon B rencontre à nouveau A , C'est-à-dire qu'à chaque fois le gagnant d'une partie rencontre le perdant de la partie précédente, et il faut gagner deux parties consécutives pour être déclaré vainqueur. On cherche la probabilité de gain de chacun des trois joueurs.

On considère les événements ci-dessous:

$V_k(A)$ désigne l'événement: " A sort vainqueur du jeu à la $k^{\text{ème}}$ partie "

$V(A)$ est l'événement : " A sort vainqueur du jeu. "

On définit de même $V_k(B)$, $V_k(C)$, $V(B)$, $V(C)$.

- 1) Calculer $P(V_k(A))$ en fonction de k
- 2) Exprimer $V(A)$ en fonction des $V_k(A)$
- 3) Dédurre $P(V(A))$
- 4) Calculer $P(V(B))$
- 5) Calculer $P(V(C))$ en suivant la même procédure que dans les questions 1), 2) et 3).
- 6) Est-ce qu'on peut jouer indéfiniment?

Exercice 2 (6 points)

Soient X une variable aléatoire réelle (v.a.r.) de loi gaussienne centrée réduite et Z une v.a.r., indépendante de X , uniformément distribuée sur $\{-1, 1\}$.

- 1) Vérifier que ZX est gaussienne
- 2) En considérant la somme $X + ZX$, montrer que le couple (X, ZX) n'est pas gaussien.
- 3) Montrer que X et ZX ne sont pas indépendantes

Exercice 3 (6 points) Trois personnes A , B , et C arrivent à la poste en même temps pour téléphoner. Il y a deux cabines téléphoniques qu'occupent immédiatement A et B ; C remplace le premier sorti. A , B , et C quittent chacun la poste immédiatement après avoir téléphoné. On suppose que les temps d'occupation de la cabine par A , B et C sont des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre α .

On note X_A le temps d'occupation de la cabine par la personne A . On définit de même X_B et X_C .

- 1) Exprimer l'événement $D(A)$: " A sort le dernier " en fonction de X_A , X_B et X_C . Calculer la probabilité que A sorte le dernier.

- 2) Calculer la probabilité que C sorte le dernier après avoir exprimé l'événement "C sort le dernier" en fonction de X_A , X_B et X_C .
- 3) Exprimer le temps total T passé par C dans la poste en fonction de X_A , X_B et X_C . Donner la loi de probabilité T .
- 4) Donner la probabilité de l'instant du dernier départ, l'instant 0 étant l'arrivée des trois personnes à la poste.

UFHB-UFRMI

Année Académique

Niveau: L3

2015/2016

Examen de Probabilités avancées

Session 2

Exercice 1 (7 points) Soit X une variable aléatoire réelle et F sa fonction de répartition c'est à dire pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

1) Montrer que F est continue à droite.

On suppose maintenant que X est absolument continue et on considère la variable aléatoire $Y = F(X)$.

2) Que signifie cette hypothèse?

3) Montrer que F est continue sur \mathbb{R} .

4) Soit $y \in]0, 1[$. On pose $A = \{x \in \mathbb{R} / F(x) \leq y\}$.

a) Montrer que A est non vide. (Utiliser le fait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.)

b) Montrer que A est majorée. (Utiliser le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$). Dites pourquoi A admet une borne supérieure que l'on note u . Calculer $F(u)$.

c) Montrer que $\mathbb{P}(Y \leq y) = y$. En déduire la loi de Y .

Exercice 2 (8 points) On considère une urne \mathcal{U} contenant n jetons ($n \geq 2$) numérotés de 1 à n et on y prend une poignée (ensemble) aléatoire de jetons. Cette poignée peut être vide. On note N (qui est aléatoire!) le nombre de jetons de la poignée et S la somme (aussi aléatoire!!) des chiffres sur les jetons de la poignée obtenue. (S la poignée est vide, i.e. $N = 0$, on convient que S prend la valeur 0).

1) On suppose dans cette question que toutes les poignées possibles sont équiprobables.

a) Trouver la loi de N et son espérance.

b) Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le jeton numéro i appartient à la poignée obtenue et 0 sinon. Déterminer le paramètre de la variable aléatoire de Bernoulli X_i .

c) Montrer que $S = \sum_{i=1}^n i \cdot X_i$. En déduire $\mathbb{E}(S)$.

d) Montrer que les variables aléatoires X_i sont deux à deux indépendantes et en déduire la variance de S .

2) On suppose dans cette question que N suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$ (c'est à dire que, dans cette question ce sont les tailles des poignées qui sont équiprobables).

a) Quelle est l'espérance de N ?

b) Avec les notations de 1), calculer pour $k \in \{0, \dots, n\}$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X_i = 1 | N = k)$ et en déduire le paramètre de la variables aléatoire X_i .

c) Calculer l'espérance de S .

d) Les variables aléatoires X_i sont-elles encore indépendantes? Que vaut $\text{cov}(X_i, X_j)$?

3) On suppose $n = 3$, déterminer la loi de S dans le premier et dans le second cas.

UFHB

2015/2016

Exercice 3 (5 points) Déterminer sans utiliser la fonction caractéristique, la loi de $X + Y$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

Université F. H. B
UFR-MI: Licence 3

Année universitaire 2016-2017

PROBABILITES AVANCEES
Examen du 09 Décembre 2017: 3heures

Aucun documents autorisés.
Justifier et présenter clairement vos réponses.

Exercice 1 (4pts)

1) Soient Ω et Ω' , h une application de Ω sur Ω' et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements de $\mathcal{P}(\Omega')$. Montrer que $(h^{-1}(B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements de $\mathcal{P}(\Omega)$.

2 - a) Soit A un événement de probabilité 0 ou 1, montrer qu'il est indépendant de tout autre événement.

2 - b) En déduire que si deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes, aucune des deux n'est dégénérée. (rappel: Si X est une variable dégénérée alors, pour $a \in X(\Omega)$, on a soit $P(X = a) = 1$ ou $P(X = a) = 0$.)

3) Pour tout $n \geq 1$, on considère les applications définies par: pour tout réel x ,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \cos(2\pi nx) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f_n est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire X_n , et calculer sa fonction de répartition F_n .

Exercice 2(3pts)

Soit X , une variable aléatoire normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ et ε une variable aléatoire discrète de loi définie par $P(\varepsilon = 1) = P(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$ et telle que les variables ε et X sont indépendantes. On pose $Y = \varepsilon X$.

1) Calculer la loi de Y .

2) Montrer que X et Y sont non corrélées.

3) Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 (4pts)

Soit (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^2$ de densité $f(x, y) = \frac{e^{-(xy)^{1/4}}}{4\pi(y\sqrt{x} + x\sqrt{y})} \mathbb{1}_{x \geq 0, y \geq 0}$.

1) Soient $U = (XY)^{1/4}$, $V = (\frac{x}{y})^{1/4}$. Quelle est la densité de (U, V) .

14.10.2020

- 2) Les variables U et V sont-elles indépendantes.
- 3) Donner les densités de U et V .

Exercice 4(4pts)

Soit $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)^T$ un vecteur Gaussien de loi $\mathcal{N}(\mu_X, \Sigma_X)$ avec

$$\mu_X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \Sigma_X := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $Y := (Y_1, Y_2, Y_3)^T$ défini par $Y_1 = X_1 + \alpha X_2$, $Y_2 = X_2$, $Y_3 = X_4$.

- 1) Déterminer la loi de Y .
- 2) Quelle condition doit vérifier α pour que les variables Y_1, Y_2, Y_3 soient indépendantes.
- 3) Calculer $\mathbb{E}[Y_1^2 Y_2^2 Y_3^2]$ sous cette condition.

Exercice 5(6pts)

- 1) En considérant une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer à l'aide de la loi faible des grands nombres

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

où f est une application continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- 2) Soit $(Y_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$,

$\alpha > 0$. Déterminer la loi de $Z_n := \sum_{k=1}^n Y_k$.

- 3) Montrer que la suite des moyennes empiriques $(\bar{Y}_n = \frac{Z_n}{n}, n \geq 1)$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera. Calculer (en s'inspirant de la question 1),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $\alpha > 0$ et f est une application continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Université F.H.B.
UFR-MI: Licence 3

Année Académique
2016/2017

Probabilités-Avancées

Examen 2ème session

Durée : 3 h

Exercice 1

- (1) Qu'est-ce qu'une variable aléatoire réelle absolument continue ?
- (2) Donner la définition d'une fonction caractéristique, d'une fonction génératrice d'une variable aléatoire réelle X .
- (3) Quelle relation existe-t-il entre les moments de X et la fonction caractéristique ?
- (4) Qu'est-ce qu'un vecteur gaussien ? A quelles conditions admet-il une densité ?

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi. On pose

$$p = \mathbb{P}(|X_n| \leq M), \quad M \in \mathbb{R}_+^* \text{ (fixé) et } N = \inf \{n; |X_{n-1}| > M\}.$$

- (1) Quelle est la loi de N ? Calculer $\mathbb{E}(N)$ et $\text{Var}(N)$.
- (2) On désigne par $N_r = \min(N, r)$. Quelle est la loi de N_r ? Exprimer $\mathbb{E}(N_r)$.

Exercice 3

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles.

I- On suppose que X est positive et admet une densité notée f_X . Notons F_X sa fonction de répartition et $[X]$ sa partie entière.

- (1) Exprimer les probabilités élémentaires définissant la loi de $[X]$ à l'aide de F_X .
- (2) Montrer que la variable aléatoire $X - [X]$ a pour densité, la fonction :

$$u \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_X(u+k) 1_{[0,1]}(u).$$

II- On suppose que (X, Y) a pour densité conjointe :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \alpha(y-x)^2 e^{-2y}, & \text{si } 0 < x < y \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (1) Déterminer la valeur de la constante α .
- (2) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$. Calculer $\mathbb{E}(X|Y = y)$
- (3) Déterminer la densité conjointe du couple $(\frac{X}{Y}, Y)$. En déduire la loi de $\frac{X}{Y}$.
- (4) Déterminer complètement les lois de $[X]$ et $X - [X]$.
- (5) Les variable aléatoire $X - [X]$ et $[X]$ sont-elles indépendantes ?

Université F.H.B. UFR-MI

Exercice 4

Soit $\mathbf{X} = (X, Y, Z)^t$ un vecteur aléatoire de densité (a^t désignant la transposée de a) :

$$f_{\mathbf{X}}(x, y, z) = K \exp\left[-\frac{1}{2}(2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz + 2yz)\right], \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- (1) Montrer que \mathbf{X} est un vecteur gaussien dont explicitera K , l'espérance $m_{\mathbf{X}}$ et la matrice de covariance $\Sigma_{\mathbf{X}}$.
- (2) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = y, Z = z$.
- (3) En déduire la surface de régression de X sachant Y, Z .

$$S_{X|Y,Z} = \{(x, y, z) \mid x = \mathbb{E}(X|Y = y, Z = z)\}.$$

Université F. H. B
UFR-MI: Licence 3

Année universitaire 2018-2019

236

PROBABILITES AVANCEES
Examen de Mars 2020. Durée: 3 heures

Exercice 1(4pts)

On considère un point M se déplaçant sur un axe d'origine O , en partant de O et par sauts d'une unité vers la droite avec la probabilité p et vers la gauche avec la probabilité q (avec $p \in]0, 1[$ et $p + q = 1$). Les sauts sont supposés indépendants. Soit X_n la variable aléatoire réelle égale à l'abscisse du point à l'issue de $n^{\text{ème}}$ déplacement. Donner la loi de X_n , son espérance et sa variance.

Exercice 2 (3pts)

Un composant électronique a une durée de vie X qu'on mesure en nombre entier d'unités de temps. On fait l'hypothèse que, à chaque unité de temps, ce composant a une probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber en panne, de sorte que X suit une loi géométrique de paramètre p ; $\mathcal{G}(p)$. On considère un autre composant dont la durée de vie Y est indépendante de X et de même loi. On pose

$$S = \min(X, Y) \text{ et } T = |X - Y|$$

- 1) Que représentent S et T ?
- 2) Calculer $\mathbb{P}(S = s \text{ et } T = t)$ pour $s \geq 1$ et $t \geq 0$ (distinguer $t = 0$ de $t \geq 1$).
- 3 En déduire les lois de S et T puis $\mathbb{E}(T)$. Quel est le nom de la loi de S ?
- 4) Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes?

Exercice 3 (7pts)

Partie 1

Soit A_1, A_2, \dots, A_n des événements.

- 1) Montrer que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- 2) Etablir une formule analogue pour $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$
- 3) Montrer par récurrence la formule de Poincaré

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

Partie 2

Une personne écrit à n correspondants des lettres personnelles, met chaque lettre dans une enveloppe, ferme les enveloppes, puis écrit les adresses au hasard. On s'intéresse au nombre X_n de lettres qui parviennent à leur destinataire.

Pour $1 \leq i \leq n$, on note A_i l'événement : la lettre i arrive à son destinataire.

4) Préciser l'espace fini Ω choisi pour modéliser le problème ainsi que la probabilité \mathbb{P} dont il est muni.

Pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$, calculer $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$.

5) En déduire $\mathbb{P}(X_n > 0)$ puis $\mathbb{P}(X_n = 0)$. Quel est le nombre de permutations σ de $\{1, \dots, n\}$ sans point fixe i.e. telles que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \sigma(i) \neq i$

6) En déduire que pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$,

$$\mathbb{P}(\{X_n = k\} \cap \{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\}) = \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{l=0}^{n-k} \frac{(-1)^l}{l!}$$

Donner la loi de X_n .

7) Vérifier que pour $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$k\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_n = k-1) - \frac{(-1)^{n-(k-1)}}{(k-1)!(n-(k-1))!}$$

En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = 1$.

Exercice 4 (3pts)

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $X+Y$ et $X-Y$ soient indépendantes.

2) On suppose de plus que X et Y sont des gaussiennes centrées réduites.

Calculer la fonction caractéristique de $Z_1 = \frac{X^2}{2}$ puis celle de $Z_2 = \frac{X^2 - Y^2}{2}$.

3) Montrer que Z_2 peut s'écrire comme le produit de deux variables aléatoires normales indépendantes.

Exercice 5 (3pts)

On considère $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$, où $\theta > 0$. On pose pour $n \geq 1$, $X_n := \max_{1 \leq i \leq n} U_i$.

1) Montrer que $(X_n, n \geq 1)$ converge p.s. et déterminer sa limite. On pourra calculer $\mathbb{P}(|X_n - \theta| > \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.

2) Étudier la convergence en loi de la suite $(n(\theta - X_n), n > 1)$.

UFHB
Licence 3

Année Universitaire 2014-2015

Examen d'Analyse Convexe et Optimisation
Durée 3H
Documents non autorisés

Exercice 1 (5 points)

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. On définit $I_\varphi : (\mathbb{R}_+^n)^n \times (\mathbb{R}_+^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$p = (p_1, \dots, p_n), q = (q_1, \dots, q_n) \mapsto I_\varphi(p, q) := \sum_{i=1}^n q_i \varphi\left(\frac{p_i}{q_i}\right).$$

1) Vérifier que I_φ est convexe. En déduire l'inégalité suivante :

$$I_\varphi(p, q) \geq \left(\sum_{i=1}^n q_i\right) \varphi\left(\frac{\sum_{i=1}^n p_i}{\sum_{i=1}^n q_i}\right).$$

2) On définit $\varphi^\circ : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi^\circ(x) := x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) φ° est-elle convexe ?

b) Comment se comparent I_φ et I_{φ° ?

3) Donner les expressions de φ° et I_{φ° dans les cas suivants : $\varphi(t) = t \ln t$, $\varphi(t) = (1 - \sqrt{t})^2$.

Exercice 2 (8 points)

On considère la fonction f_p définie sur \mathbb{R}^3 (p étant un paramètre réel).

$$f_p(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - p(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

1) Montrer que la fonction f_p est coercive. En déduire que la proposition suivante est vraie :

$$\exists (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 : \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f_p(x_0, y_0, z_0) \leq f_p(x, y, z).$$

2) On s'intéresse aux points critiques de f_p .

Montrer qu'il existe une valeur p_0 telle que

a) Pour $p \leq p_0$, f_p admet un seul point critique

b) Pour $p > p_0$, f_p admet 27 points critiques. On précisera la valeur de p_0 ainsi que celles des 27 points critiques.

3) Trouver les minima globaux de f_p lorsque $p \leq p_0$.

4) On suppose maintenant $p > p_0$.

Calculer la matrice hessienne de f_p et étudier la nature des points critiques. En déduire que la fonction f_p admet 8 minima globaux que l'on précisera.

Exercice 3 (7 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^3 par :

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + x.$$

1) La fonction f est-elle coercive sur \mathbb{R}^3 ?

2) Déterminer les points critiques de f sur \mathbb{R}^3 . La fonction f admet-elle des extrema locaux ?

3) Soit $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}(x + y)\}$. C est-il fermé ? Borné ?

4) Déterminer les points critiques de la restriction de f à C de deux manières : en utilisant d'une part les multiplicateurs de Lagrange, et d'autre part en remplaçant z par sa valeur dans l'expression de f .

5) Calculer les points où f est minimale sur C .

14.10.2020

Année Universitaire 2014-2015

UFHB
Licence 3

Examen d'Analyse Convexe et Optimisation (Session 2)

Durée 3H

Documents non autorisés

Exercice 1 (7 points)

1) Soient I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $a \in I$ on note $\tau_a : I - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tau_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ appelée taux d'accroissement en a . Montrer que f convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, τ_a est une application croissante sur $I - \{a\}$.

2) Soit $f(x, y) = \frac{\|x\|^2}{y}$ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$. Calculer le gradient et la matrice hessienne de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$. Vérifier si f est convexe sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ en étudiant le signe de $\langle \nabla^2 f(x, y) \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} \rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (6 points)

On se place dans \mathbb{R}^2 , et on note $x = (x_1, x_2)$. On considère la fonction f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle Bx, x \rangle + \langle b, x \rangle = \frac{1}{2} (x_1^2 + \alpha x_2^2) + x_1$$

où B est une matrice symétrique carrée d'ordre 2, b un vecteur de \mathbb{R}^2 et $\alpha \in \mathbb{R}$

1) Déterminer B et b .2) Donner une condition nécessaire pour que x réalise un minimum (local) sans contraintes de f .

a) Si $\alpha = 0$, montrer que f possède un point de minimum et qu'il y a une infinité de x réalisant ce minimum.

b) Si $\alpha \neq 0$, quel est l'élément x^* pouvant éventuellement réaliser le minimum ?

i) Si $\alpha > 0$, x^* réalise-t-il le minimum de f ? Pourquoi ?

ii) Si $\alpha < 0$, montrer que f ne possède pas de minimum.

Exercice 3 (7 points)

Soit $n \geq 1$ un entier. On considère la fonction

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i$$

définie sur $\mathbb{R}_{++}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, \forall i = 1, \dots, n\}$ et le problème

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}_{++}^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1. \end{aligned}$$

1) La fonction f est-elle convexe sur \mathbb{R}_{++}^n ? Est-elle strictement convexe ?

2) Le problème est-il convexe ?

3) Soit λ un réel quelconque fixé. On définit sur \mathbb{R}_{++}^n la fonction

$$L_\lambda(x) = f(x) + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right).$$

a) Montrer que L_λ admet un et un seul minimum sur \mathbb{R}_{++}^n atteint en un point $x(\lambda)$ qu'on exprimera en fonction de λ .

b) Montrer qu'il existe une et une seule valeur λ_0 telle que $\sum_{i=1}^n x_i(\lambda_0) = 1$ (on donnera la valeur de λ_0 en fonction de n).

c) En déduire que le problème admet une solution. Donner cette solution explicitement. Est-elle unique ?

UFR-MI
LICENCE L3

Année universitaire 2014-2015

ANALYSE CONVEXE ET OPTIMISATION
Devoir du 28 octobre 2015
Durée: 3 heures

Aucun documents autorisés.
Justifier et présenter clairement vos réponses.

Exercice 1 (4pts)

- 1) Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est convexe si et seulement si $\text{Epi}(f)$ est convexe.
- 2) Une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est dite positivement homogène de degré $\alpha > 0$, lorsque $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0, f(tx) = t^\alpha f(x)$. f est dite positivement homogène si $\alpha = 1$.
Montrer qu'une fonction positivement homogène est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

Exercice 2 (6pts)

Soit O un ouvert convexe de \mathbb{R}^n et $f : O \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est logarithmiquement convexe sur O lorsque la fonction $\ln f : O \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.

- 1) a) Montrer que si $\varphi : O \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, il en est de même de la fonction e^φ .
b) En déduire qu'une fonction logarithmiquement convexe est nécessairement convexe.
- 2) On suppose ici que f est deux fois différentiable sur O .

Montrer l'équivalence des assertions suivantes:

- i) f est logarithmiquement convexe;
ii) $f(x) \nabla^2 f(x) \geq \nabla f(x) \nabla^T f(x)$ (i.e la matrice $f(x) \nabla^2 f(x) - \nabla f(x) \nabla^T f(x)$ est semi définie positive.)
iii) la fonction $x \mapsto e^{-ax} f(x)$ est convexe sur $O \forall a \in \mathbb{R}$.
- 3) En déduire que si f_1 et f_2 sont logarithmiquement convexes et deux fois différentiables sur O , il en est de même de leur somme $f_1 + f_2$.

Exercice 3 (4pts)

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2 - 2x_1x_2 + \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$

1) Etudier la différentiabilité et la différentiabilité d'ordre deux de f et écrire sa matrice hessienne. La fonction f est-elle convexe? concave?

Exercice 4 (6pts)

Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on considère le problème de minimisation suivant:

$$(\mathcal{P}_1) \quad \inf_{x \in C} \left\{ \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle \right\}$$

où $C = \{x \in \mathbb{R}^3 / x_2 + x_3 = 0\}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer l'existence et l'unicité de la solution de (\mathcal{P}_1) .
2. Justifier que la condition de KKT est une condition nécessaire et suffisante.
3. Résoudre.

Université F. H. B
UFR-MI: Licence 3

Année universitaire 2015-2016

ANALYSE CONVEXE ET OPTIMISATION
Examen de la deuxième session

Exercice 1

Soit S un ensemble non vide de \mathbb{R}^n . Pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction d'appui de l'ensemble S par $\sigma_S(d) := \sup_{s \in S} \langle s, d \rangle$.

1) Montrer que si A et B sont deux parties non vides de \mathbb{R}^n , on a

$$\sigma_{A+B} = \sigma_A + \sigma_B.$$

2) Soit S une partie non vide \mathbb{R}^n . Montrer que

$$\sigma_S = \sigma_{\overline{\text{Conv} S}}.$$

3) Montrer que si A, B et C sont des compacts non vides de \mathbb{R}^n tel que $A + B = A + C$ alors

$$\text{Conv} B = \text{Conv} C$$

Exercice 2

On considère la fonction ζ définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ par

$$\zeta(t, r) = \frac{t^2}{r}$$

Montrer que ζ est convexe.

Etant donné S convexe de \mathbb{R}^n et g une fonction concave strictement positive sur S , montrer en utilisant la définition que la fonction μ définie par sur S par

$$\mu(x) = \begin{cases} -\ln g(x) & \text{si } g(x) \leq 1 \\ 0 & \text{si } g(x) \geq 1 \end{cases}$$

est convexe sur S . En déduire que la fonction définie sur $S \times]0, +\infty[$ par

$$\theta(x, r) = \frac{1}{r} \mu^2(x)$$

est convexe.

Exercice 3

Soit C l'ensemble de \mathbb{R}^2 défini par

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = -x - 2y - 2xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$.

- 1) Justifier que f est de classe C^2 .
- 1 - a) Calculer son gradient $\nabla f(x, y)$.
- 1 - b) Calculer sa matrice hertienne $\nabla^2 f(x, y)$.
- 2) La fonction f est-elle convexe ou concave.
- 3) On considère le problème de minimisation de f sur C .
 - 3 - 1) Justifier que ce problème admet des solutions.
 - 3 - 2) Montrer que tout minimum local se trouve sur la frontière $Fr C$ de C .

UFHB
UFRMI

Année Universitaire 2016-2017

Examen d'Analyse Convexe et Optimisation (Licence 3)

Durée totale : 3h

Documents non autorisés

Partie Analyse convexe (Durée : 1h 30)

Exercice 1 (2 points)

Soit C un convexe non vide de \mathbb{R}^n . On considère pour $a \in \overline{C}$,

$$K = \{d \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda > 0 \text{ avec } a + \lambda d \in C\}$$

Montrer que K est convexe.

Exercice 2 (4 points)

1) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer les équivalences suivantes :

- i) f est convexe ;
- ii) L'épigraphe de f , $(\text{epi}(f))$, est convexe ;
- iii) L'épigraphe strict de f , $(\widetilde{\text{epi}}(f))$ est convexe.

2) Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite positivement homogène de degré $\alpha > 0$, lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, f(tx) = t^\alpha f(x).$$

La fonction f est positivement homogène si $\alpha = 1$.

Montrer qu'une fonction f positivement homogène est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, f(x+y) \leq f(x) + f(y).$$

Exercice 3 (4 points)

On considère $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 < t\}$ où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

- 1) Montrer que la fonction $h(x, t) = t - \frac{1}{2}x^T x$ est concave sur Ω .
- 2) Montrer que la fonction $g(x, t) = -\ln(t - \frac{1}{2}x^T x)$ est convexe sur Ω .

Partie Optimisation (Durée : 1h 30)

Exercice 1 (5 points)

On considère l'application f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} \left(x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{2} \right).$$

- 1) Montrer que $a^2 + ab + b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2$ pour tous réels a et b .
- 2) Montrer que l'application f est minorée et atteint sa borne inférieure. L'application est-elle majorée sur \mathbb{R}^2 ?
- 3) Montrer que f est deux fois continûment différentiable sur \mathbb{R}^2 et calculer $\nabla f(x, y)$ et $\nabla^2 f(x, y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$.
- 4) Déterminer le minimum global de f sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 2 (5 points)

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ définis par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ et le problème $(\mathcal{P}) \inf_{x \in C} f(x)$ avec :

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}.$$

- 1) Montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (\mathcal{P}) .
- 2) Justifier que la condition de KKT est une condition nécessaire et suffisante d'optimalité.
- 3) Résoudre le problème (\mathcal{P}) .

UFHB
UFRMI
Licence 3

Année Universitaire 2016-2017

Examen d'Analyse Convexe et Optimisation (Session 2)
Durée totale : 2h 30
Documents non autorisés

Partie Analyse convexe (Durée : 1h 30)

Exercice 1 (7 points)

1) Soit S un sous ensemble non vide de \mathbb{R}^n . On sait que l'enveloppe convexe de S , noté $\text{conv}(S)$ est le plus petit convexe de \mathbb{R}^n contenant S .

a) Montrer que :

$$\text{conv}(S) = \left\{ x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i : k \in \mathbb{N}^*, x^i \in S, \forall i = 1, \dots, k, \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

b) On suppose que S est un ouvert : montrer que $\text{conv}(S)$ est un ouvert.

2) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer les équivalences suivantes :

i) f est concave ;

ii) L'hypographe de f , $(\text{hyp}(f))$, est convexe ;

iii) L'hypographe strict de f , $(\text{hyp}(f))$ est convexe.

Exercice 2 (7 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$. on définit $f_a : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y$.

1) Pour quelles valeurs de a , la fonction f_a est-elle? strictement convexe? concave? strictement concave?

2) Discuter en fonction des valeurs du paramètre a de l'existence de solutions au problème d'optimisation $\inf\{f_a(x, y); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 3 (6 points)

α et β sont deux réels strictement positifs tels que $\alpha + \beta = 1$.

On pose $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$

1) Montrer que f est concave sur $O =]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

2) En remarquant que $f(1, 1) = 1$, montrer que

$$\forall (x, y) \in O, x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$$

Partie Optimisation (Durée : 1h 30)

Exercice 1 (8 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

- 1) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (et les déterminer) tels que

$$f(x, y) \geq \alpha \|(x, y)\|^2 + \beta.$$

pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 .

En déduire que le problème (P)

$$\inf_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$$

possède au moins une solution.

- 2) La fonction f est-elle convexe sur \mathbb{R}^2 ?
 3) Déterminer les points critiques de f , et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...). Résoudre alors le problème (P).

Exercice 2 (6 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f la fonction définie sur \mathbb{R}^n par $f(x) = e^{\|Ax\|^2}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n .

- 1) a) Montrer f est deux fois différentiable : déterminer son gradient et sa matrice hessienne.
 b) La fonction f est-elle convexe ?
 c) Montrer que le problème (P) qui consiste à minimiser f sur \mathbb{R}^n admet au moins une solution.
 2) On suppose que la matrice A est inversible, montrer que la solution de (P) est unique.

Exercice 3 (6 points)

Soit la fonction f définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$ à valeurs dans \mathbb{R} par $f(x, y, z) = x \ln x + y \ln y + z \ln z$.

On considère le problème (P) :

$$\inf \{f(x, y, z) : x + y + z - 3a = 0\}$$

où a est un paramètre réel.

- 1) Montrer que (P) peut se ramener à un problème d'optimisation sans contraintes que l'on déterminera.
 2) Résoudre le problème obtenu dans la question 1). En déduire une solution du problème (P).

UFHB
L3 Maths

Année 2017-2018

Examen d'Analyse Convexe et Optimisation
Durée 3H
Documents non autorisés

Exercice 1 (5 points)

1) Soit la fonction f définie par

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

où α et β sont des réels non nuls. Soit

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

- a) Montrer que C est convexe.
b) Etudier la convexité (ou la concavité) de f sur C en discutant selon les valeurs de α et β .

2) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}^n$.

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(t) = f(a + tb)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que :

- a) si f est convexe alors g est convexe ;
b) si f est strictement convexe et $b \neq 0$ alors g est strictement convexe ;
c) si f est fortement convexe et $b \neq 0$ alors g est fortement convexe.

Exercice 2 (5 points)

1) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Montrer les équivalences suivantes :

- i) f est strictement convexe sur \mathbb{R}^n ;
ii) $f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$;
iii) $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \neq y$.

2) Soit $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique et $x \in \mathbb{R}^n$, une fonctionnelle quadratique de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Démontrer que f est strictement convexe si et seulement si A est définie positive.

Exercice 3 (5 points)

1) Déterminer les points critiques de la fonction réelle suivante et préciser leur nature.

$$g(x, y, z) = x^2 y^2 + (x^2 - y^2)z - 4z.$$

2) On considère l'application définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - xy + y^2.$$

- a) Montrer que f est coercive. En déduire l'existence d'un minimum global.
b) Calculer le gradient de f en tout point. Déterminer les points critiques.
c) En déduire le minimum global de f .

Exercice 4 (5 points)

On considère le programme mathématique (P) ci-dessous :

$$(P) \begin{cases} \min f(x, y, z) = 2x + z \\ x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1 \\ x + y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

- 1) Montrer que (P) admet une solution optimale.
- 2) Ecrire les conditions nécessaires d'optimalité. Sont-elles suffisantes ?
- 2) Résoudre le problème (P) .

UFHB
Licence 3

Année universitaire 2017-2018

ANALYSE CONVEXE ET OPTIMISATION
Examen de la deuxième session
Durée: 3 heures

Aucun documents autorisés.
Justifier et présenter clairement vos réponses.

Exercice 1 (3pts)

1) Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante. On définit sur $[a, b]$ la fonction

$$\Psi(x) = \int_a^x \varphi(u) du$$

Montrer que Ψ est convexe.

Exercice 2 (6pts)

On dit qu'une fonction f définie sur un sous-ensemble convexe U de \mathbb{R}^n et à valeurs dans \mathbb{R} est quasi-concave si pour tout réel k l'ensemble

$$E_k = \{x \in U; f(x) \geq k\}$$

est convexe.

- 1) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto -x^2 - y^2$ est quasi-concave mais que $-f$ ne l'est pas.
- 2) Montrer qu'une fonction concave sur un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^2 est quasi-concave.
- 3) Montrer qu'une fonction f définie sur un sous-ensemble convexe U de \mathbb{R}^n est quasi-concave si et seulement si

$$f(tx + (1-t)y) \geq \min(f(x), f(y))$$

pour tous $x, y \in U$, $t \in [0, 1]$.

- 4) Soit f une fonction quasi-concave sur un sous-ensemble convexe U de \mathbb{R}^n et g une fonction croissante sur un intervalle I de \mathbb{R} , avec $f(U) \subset I$.
Dédurre de la question (3) que $g \circ f$ est quasi-concave sur U .
- 5) Montrer que la fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto e^{-x^2 - y^2}$ est quasi-concave mais pas concave.

Exercice 3 (4pts)

Sur \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel et $\|\cdot\|$ désigne la norme associée.

Etant donné $a \neq 0$ fixé dans \mathbb{R}^n , on considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \langle a, x \rangle e^{-\|x\|^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

- 1) Montrer que f est différentiable sur \mathbb{R}^n et calculer le gradient $\nabla f(x)$ de f en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.
- 2) Déterminer les points critiques de f .
- 3) Démontrer que f est deux fois différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et calculer $\nabla^2 f(x)$.
- 4) Déterminer la nature des points critiques de f trouvés à la deuxième question.

Exercice 4 (4pts)

- 1) Déterminer les points critiques de la fonction réelle suivante et préciser leur nature.

$$g(x, y, z) = x^2 y^2 + (x^2 - y^2)z - 4z$$

- 2) On considère l'application définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - xy + y^2$$

- a) Montrer que f est coercive. En déduire l'existence d'un minimum global.
- b) Calculer le gradient de f en tout point. Déterminer les points critiques.
- c) En déduire le minimum global de f .

Exercice 5 (3pts)

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par : $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ et la sphère $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$
On considère le problème de minimisation

$$(\mathcal{P}) \quad \inf_{(x, y) \in S} f(x, y).$$

- 1) Montrer que le problème admet une solution optimale.
- 2) Déterminer la solution en utilisant les conditions du KKT.

UFHB
L3 Maths

Année 2018-2019

Examen d'Optimisation
Durée 3H
Documents non autorisés

Exercice 1 (7 points)

1) Soit la fonction f définie par

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

où α et β sont des réels non nuls. Soit

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}.$$

a) Montrer que C est convexe.

b) Etudier la convexité (ou la concavité) de f sur C en discutant selon les valeurs de α et β .

2) Soit $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy + 2xz + yz$ et $E = \mathbb{R}^3$. Vérifier la différentiabilité d'ordre deux de f sur E et déterminer le gradient et la matrice hessienne de f en $x \in E$. En utilisant la nature de la matrice hessienne étudier la convexité de f sur E .

Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par : $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ et le problème :

$$\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y). \quad (P)$$

1) Déterminer $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x, y) \geq \alpha \|(x, y)\|^2 + \beta$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, où la notation $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 .

En déduire que le problème (P) est coercive

2) Déterminer les points critiques de f , et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...). La fonction f est-elle convexe sur \mathbb{R}^2 ? Résoudre le problème (P).

Exercice 3 (7 points)

La société Fourivoire fabrique deux types de fours F1 et F2 à partir de trois facteurs de production :

M (heures machines) ; O (heures ouvriers) ; T (heures techniciens).

Les combinaisons de facteurs de production pour chaque type de fours, le prix de vente de chaque four ; V,

le coût unitaire en francs : C de chaque facteur de production et les capacités hebdomadaires : K de chaque atelier sont donnés dans le tableau suivant :

	M	O	T	V
F ₁	5	7	4	2010
F ₂	3	8	6	2400
C	20	30	50	
K	270	800	360	

1) On se propose de déterminer combien de fours de chaque type la société Fourivoire doit fabriquer chaque semaine pour maximiser sa marge sur coût de production. Donner le programme linéaire (P) correspondant.

2) Déterminer le dual du programme linéaire obtenu dans la question 1). Résoudre (D) et en déduire une solution optimale de (P). Donner une interprétation économique de ce programme dual.

14.10.2020

Université Félix Houphouët-Boigny
 UFR Mathématiques et Informatique
 Année 2015-2016

Examen d'Analyse de Variance (2h)

Exercice 1

On dispose de k n -échantillons (X_{i1}, \dots, X_{in}) , $i = 1, \dots, k$, les n -échantillons étant indépendants les uns des autres. Pour l'échantillon $i = 1, \dots, k$, les variables $X_{i1}, \dots, X_{in} \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma^2)$.
 On veut tester l'homogénéité des moyennes :

$$H_0 : m_1 = \dots = m_k \quad \text{contre} \quad H_1 : \exists i, j, m_i \neq m_j.$$

On utilise les notations suivantes :

- pour la moyenne empirique : $\bar{X} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}$.

- dans l'échantillon $i = 1, \dots, k$, la moyenne empirique des variables est notée $\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}$.

- pour la variabilité totale de l'échantillon : $(nk - 1)S^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X})^2$.

La variabilité intra-groupe est $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$ et la variabilité inter-groupe est $n \sum_{i=1}^k (\bar{X}_i - \bar{X})^2$.

Question 1. Montrer que la variabilité de l'échantillon s'écrit comme la somme des variabilités intra et inter-groupes.

Question 2. Considérons les vecteurs

$$\begin{aligned} X &= (X_{11}, \dots, X_{1n}, \dots, X_{k1}, \dots, X_{kn}), \\ Y &= (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k, \dots, \bar{X}_k). \end{aligned}$$

Montrer que Y est la projection orthogonale de X sur le sous espace vectoriel E (de \mathbb{R}^{nk}) de dimension k engendré par les vecteurs

$$V_1 = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0),$$

...

$$V_k = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1).$$

Question 3. Soit la statistique $Z = \frac{n \sum_{i=1}^k (\bar{X}_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}$.

Démontrer que sous l'hypothèse H_0 , la v.a. $\frac{nk - k}{k - 1} Z$ suit une loi de Fisher $F(k - 1, nk - k)$.

On pensera à utiliser le théorème des 3 perpendiculaires et à conclure avec Cochran.

Question 4. Application numérique. On a relevé les scores des étudiants de 4 écoles un concours. Comparer les performances des écoles.

Est-ce que les différences observées sont significatives au risque 5 % ? Comparer deux-à-deux les échantillons.

E_1	E_2	E_3	E_4
73	84	69	65
57	95	80	58
95	96	73	82
78	62	62	86
86	80	50	35
61	87	71	52
80	100	84	70
98	74	66	79
64	85	52	43
78	77	73	60

$$\bar{X}_1 = 77, \bar{X}_2 = 84, \bar{X}_3 = 68, \bar{X}_4 = 63.$$

Exercice 2

Le problème qui se pose fréquemment en agronomie est l'utilisation de certains engrais suivant la nature du terrain. Par exemple 5 engrais A, B, C, D, E peuvent être utilisés sur 4 natures de sols 1, 2, 3, 4. On dispose de 4 champs correspondant à ces 4 compositions respectives. Chaque champs a été subdivisé en 5 parcelles égales sur lesquelles on a affecté les engrais A, B, C, D, E (par tirage au sort pour diminuer les erreurs systématiques). Les rendements en blé dépendent alors de deux facteurs : nature du sol et type d'engrais. On a observé les résultats suivants

	A	B	C	D	E
1	310	353	366	299	367
2	284	293	335	264	314
3	307	306	339	311	377
4	267	308	312	266	342

On veut pouvoir étudier si les résultats obtenus sont équivalents (i.e. si les différences observées sont dues au hasard) ou si l'influence d'un engrais ou d'une nature de sol est prépondérante. On peut formaliser le problème de la manière suivante.

Soit X_{ij} le rendement du sol i muni de l'engrais j . On suppose que X_{ij} suit la loi $\mathcal{N}(m_{ij}, \sigma^2)$ avec m_{ij} de la forme

$$m_{ij} = m + \alpha_i + \beta_j.$$

avec $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$ et $\sum_{j=1}^n \beta_j = 0$. Ceci revient à dire que $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k m_{ij} = m + \beta_j$ et $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m_{ij} = m + \alpha_i$.

Concrètement, α_i et β_j traduisent les effets respectifs des deux facteurs i et j sur la moyenne m_{ij} de la v.a. X_{ij} .

Problèmes. Si on veut tester si la nature des sols n'a pas d'influence sur le rendement, on testera l'hypothèse $H_0 =$ "tous les α_i sont nuls" contre $H_1 =$ "les α_i ne sont pas tous nuls", c'est le premier test.

Pour tester l'influence des engrais, on prendra l'hypothèse $H_0' =$ "tous les β_j sont nuls" contre $H_1' =$ "les β_j ne sont pas tous nuls".

Modélisation. On note $X = (X_{11}, X_{12}, X_{13}, \dots, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{k1}, \dots, X_{kn})' \in \mathbb{R}^{kn}$ et $M = (m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1n}, m_{21}, m_{22}, \dots, m_{k1}, \dots, m_{kn})'$.

Question 3-a. Expliciter le vecteur des moyennes M , donner la dimension du sous-espace vectoriel défini par ce vecteur. Définir H et donner sa dimension lorsqu'on teste H_0 contre H_1 .

on rappelle que $H_0: M \in H$ vs $H_1: M \notin H$. On suppose que $M \in E$
 Pour appliquer le test de l'analyse de la variance pour tester H_0 contre H_1 il faut donc calculer

$$\|X - X_E\|^2 \text{ et } \|X_E - X_H\|^2.$$

i.e. déterminer X_E et X_H . Pour cela, on posera, pour $i = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, n$:

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij}, \quad \bar{X}_j = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_{ij}, \quad \bar{X} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}.$$

Question 3-b. Démontrer les égalités suivantes, pour $i = 1, \dots, k$ et $j = 1, \dots, n$:

$$(X_E)_{ij} = \bar{X} + (\bar{X}_i - \bar{X}) + (\bar{X}_j - \bar{X}),$$

$$\text{et } (X_H)_{ij} = \bar{X} + (\bar{X}_j - \bar{X}).$$

Question 3-c. Démontrer que

$$Z = \frac{\frac{\|X_E - X_H\|^2}{d(\mathbb{R}^n - d(\mathbb{R}^n))}}{\frac{\|X - X_H\|^2}{d(\mathbb{R}^{kn} - d(\mathbb{R}^n))}} = \frac{n(n-1) \sum_{i=1}^k (\bar{X}_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i - \bar{X}_j + \bar{X})^2}$$

Question 3-d. Application numérique.

Question 3-e. Faire la même chose pour tester H_0' contre H_1' .

N.B.: $E = \left\{ M = (m_{11}, \dots, m_{kn}), m_{ij} = m + \alpha_i + \beta_j, \right.$
 $\left. \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0 \text{ et } \sum_{j=1}^n \beta_j = 0 \right\}$

Analyse de variance: un facteur

RAPPORT DÉTAILLÉ

Groupes	Nombre d'échantil	Somme	Moyenne	Variance
E1	10	770	77	188,666667
E2	10	840	84	131,111111
E3	10	680	68	120
E4	10	630	63	282

Analyse de variance: deux facteurs sans répétition d'expérience

GROUPES	Nombre d'échantil	Somme	Moyenne	Variance
1	5	1695	339	1037,5
2	5	1490	298	750,5
3	5	1640	328	934
4	5	1495	299	1053
A	4	1168	292	412,666667
B	4	1260	315	686
C	4	1352	338	490
D	4	1140	285	558
E	4	1400	350	792,666667

on donne les quantiles suivants

$$F_{0,95}(3,36) = 2,866$$

$$F_{0,95}(3,12) = 3,49$$

$$F_{0,95}(4,12) = 3,259$$

$$T_{0,975}(18) = 2,10$$

Année universitaire 2015-2016

UFRMI : Licence 3

Examen : Régression linéaire

Durée : ~~3 heures~~ 1h30

Exercice 1. On considère le modèle de régression linéaire passant par l'origine

$$Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

avec $E[\varepsilon_t] = 0$ et $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer l'estimateur des moindres carrés $\hat{\beta}$ du paramètre β .
2. Démontrer que l'estimateur $\hat{\beta}$ est sans biais.
3. Calculer la variance de l'estimateur $\hat{\beta}$.
4. Soit X_{n+1} une nouvelle valeur de la variable explicative, Y_{n+1} la vraie valeur de la variable à expliquer correspondant à X_{n+1} et \hat{Y}_{n+1} la prévision de Y_{n+1} .
En supposant que
 - (a) ε_t suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
 - (b) $Cov(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_t) = 0$ pour tout $t = 1, \dots, n$
 - (c) $Var[\varepsilon_t] = \sigma^2$ est estimée par

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_n)^2 \quad \text{où } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$$

Construire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour Y_{n+1} .

Exercice 2. Dans le cadre de travaux de recherche sur la durée de la saison de végétation en montagne, des stations météorologiques sont installées à différentes altitudes. La température moyenne ainsi que l'altitude (en mètres) de chaque saison sont relevées et données dans le tableau ci-dessous :

Altitude	1040	1230	1500	1600	1740	1950	2200	2530	2800	3100
Température	7.4	6	4.5	3.8	2.9	1.9	1	-1.2	-1.5	-4.5

A partir de l'altitude d'un lieu, on cherche à évaluer sa température moyenne sans avoir planter une nouvelle station.

1. Expliquer en quoi la méthode de régression linéaire est adaptée à cette problématique. Préciser le modèle approprié.
2. Formuler les hypothèses nécessaires à cette analyse.
3. Calculer les estimations des paramètres du modèle.
4. Faire le test de pertinence permettant de vérifier que la pente de la droite de régression est non nulle au risque de 5%.
5. On suppose que les hypothèses du modèle sont toutes vérifiées. Sachant qu'une certaine plante ne survit qu'à une température moyenne supérieure à -6°C , est-il raisonnable de penser que l'on ne trouvera pas cette plante à une altitude de 3500 mètres ?

Indications : $\sum_{i=1}^n x_i = 19690$, $\sum_{i=1}^n y_i = 20.3$, $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 42925500$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 17671$,
 $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 162.41$

Université Félix Houphouët-Boigny
UFR Mathématiques et Informatique
Année 2015-2016
UE Statistique Appliquée
EC Analyse de variance
Examen de la deuxième session (2h00)

Exercice 1 : On considère le tableau d'analyse de variance à un facteur suivant :

Sources de variations	Somme des carrés des écarts	Nombre de d.d.l.	Carrés moyens	Statistique de Fisher
Traitements	18,4			
Résiduelle				
Totale	46,2			

On suppose que pour niveau (traitement) du facteur, il y a 7 observations

- 1) Compléter le tableau.
- 2) Donner le modèle d'analyse de variance correspondant au tableau en précisant les hypothèses.
- 3) Quel problème de test peut-on considérer dans ce modèle ? Donner le résultat de ce test. (le quantile d'ordre 0,95 d'une loi de Fisher à 6 et 35 ddl est 2,38).
- 4) Donner une estimation de la variance.
- 5) Les moyennes observées pour les traitements 1 et 2 sont respectivement 3,7 et 4,3. Tester l'hypothèse selon laquelle les moyennes des traitements 1 et 2 sont égales.
- 6) Donner un intervalle de confiance pour la différence des traitements 1 et 2.

Exercice 2 : Trois équipes (matin, midi, soir) se relaient sur une chaîne de montage. Elles occupent quatre postes de travail A, B, C et D. Sur la production d'un mois, on note le nombre total de pièces défectueuses ventilées par équipe et par poste de travail :

postes	A	B	C	D	moyenne
équipe du matin	26	13	35	6	20
équipe du soir	18	17	31	2	17
équipe de nuit	31	24	33	4	23
moyenne	25	18	33	4	20

On souhaite interpréter ce tableau à l'aide d'une ANOVA.

1. Dans un premier temps, on analyse les deux facteurs équipe et poste séparément.
 - (a) Peut-on affirmer l'existence d'une différence entre les performances globales des équipes?
 - (b) Peut-on conclure que les postes présentent des difficultés de montage inégales?
2. On désire maintenant tenir compte simultanément des deux facteurs. On modélise le tableau par un modèle additif d'analyse de la variance à deux facteurs :

$$Y_{ij} = \mu + a_i + b_j + \epsilon_{ij}$$

où les variables aléatoires ϵ_{ij} sont indépendantes, normales centrées de même variance σ^2 .

- (a) Serait-il pertinent de modéliser le tableau par un modèle complet à deux facteurs? Comment valider le modèle additif (modèle ci-dessus)?
- (b) On admet que le modèle additif est valide. Estimer $E\{Y_{ij}\}$ dans ce modèle.
- (c) Calculer la statistique de test de l'hypothèse « il n'y a pas d'effet poste ».
- (d) Calculer la statistique de test de l'hypothèse « il n'y a pas d'effet équipe ».
3. On regroupe le nombre de pièces défectueuses, encore ventilées par équipe et par poste, pour la première et troisième semaine d'une part et la deuxième et quatrième d'autre part.

postes	A	B	C	D
équipe du matin	12;14	5;8	17;18	4;2
équipe du soir	8;10	10;7	14;31	2;0
équipe de nuit	17;14	12;12	18;15	1;3

On donne le tableau d'analyse de variance pour un modèle croisé à deux facteurs (voir ci-dessous).

- (a) Peut-on accepter l'hypothèse d'un modèle additif?
- (b) Décrire le listing du test correspondant à l'effet équipe.
- (c) Que penser de l'effet "équipe"?

Source des variations	Somme des carrés	Degré de liberté	Moyenne des carrés	F	Probabilité	Valeur critique pour F pour un risque de 0,05
Équipe	10,3333333	2	5,16666667	0,3583815	0,70603789	3,885293835
Poste	887,5	3	295,833333	20,5202312	5,1254E-05	3,490294819
Interaction	109	6	18,1666667	1,26011561	0,34417906	2,996120378
A l'intérieur du groupe	173	12	14,4166667			
Total	1179,83333	23				

Examen: Régression linéaire

Durée:

1h45

1 Données

On dispose de données concernant l'âge, le kilométrage en milliers de kms, et le prix en milliers d'euros pour un échantillon de voitures d'occasion d'un même type :

```
> donnees
  age kms prix
1    5  92  7.8
2    4  64  9.5
3    6 124  6.4
4    5  97  7.5
5    5  79  8.1
6    5  76  9.0
7    6  93  6.1
8    6  63  8.7
9    2  13 15.4
10   7 111  6.4
11   7 143  4.4
```

2 Régression linéaire simple

On cherche à modéliser la relation entre l'âge et le prix.

1. Qu'est-ce qui peut renseigner sur la forme de la liaison statistique qui peut exister entre le prix et l'âge ?
2. On suppose que la relation entre le prix et l'âge est linéaire. Proposer un modèle de régression linéaire simple du prix sur l'âge. Quelles sont les hypothèses du modèle. Quels sont les objectifs visés ?

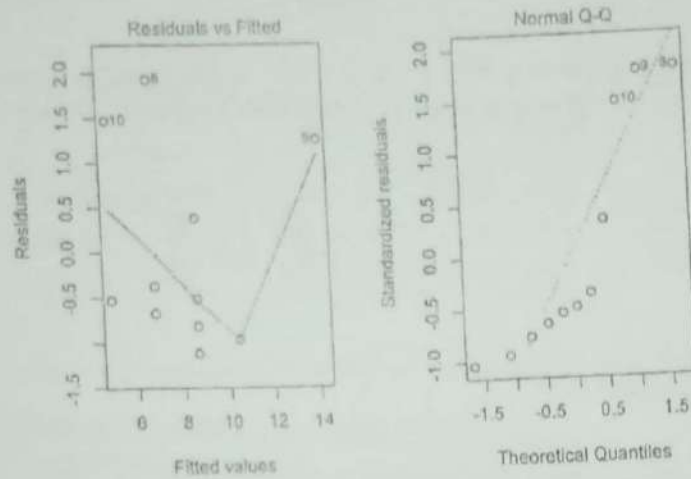


FIGURE 1 -

3. Déterminer la droite de régression.
4. La pente de cette droite est-elle significative au niveau $\alpha = 0.05$?
5. Vérifier l'équation de la variance puis en déduire le coefficient de détermination R^2 . Interpréter le résultat obtenu.
6. Analyser les graphiques de la FIGURE 1.

```

> sum(age)
[1] 58
> sum(prix)
[1] 89.3
> sum(age*prix)
[1] 433.6
> sum(age^2)
[1] 326
> sum(prix^2)
[1] 805.29
>
residuals(lm(prix~age))
1      2      3      4      5      6      7

```

```

-0.8216216 -0.9675676 -0.3756757 -1.1216216 -0.5216216 0.3783734 -0.6756757
      8           9           10          11
1.9243243 1.2405405 1.4702703 -0.5297297

```

3 Régression linéaire multiple

On considère maintenant la régression linéaire du prix sur les variables âge et kilométrage. À l'aide du logiciel R, nous avons obtenu les résultats suivants :

Call:

```
lm(formula = prix ~ age + kms)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-1.1005	-0.4992	0.1016	0.5195	1.0088

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	16.72839	1.00600	16.629	1.73e-07 ***
age	-0.86571	0.34364	-2.519	0.0359 *
kms	-0.04660	0.01409	-3.308	0.0107 *

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.7815 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9392, Adjusted R-squared: 0.924
F-statistic: 61.78 on 2 and 8 DF, p-value: 1.368e-05

1. Écrire le modèle sous la forme matricielle en précisant les hypothèses.
2. Donner la droite de régression.
3. Donner une estimation de l'écart-type résiduel.
4. Combien vaut le coefficient de détermination ajusté. Commenter.
5. Tester au niveau 5%, l'hypothèse nulle "le kilométrage n'a pas d'effet sur le prix" contre "le kilométrage a un effet sur le prix".
6. Analyser les résidus (vérifier l'hypothèse de normalité des erreurs, l'homoscedasticité et la linéarité). Utiliser la FIGURE 2.

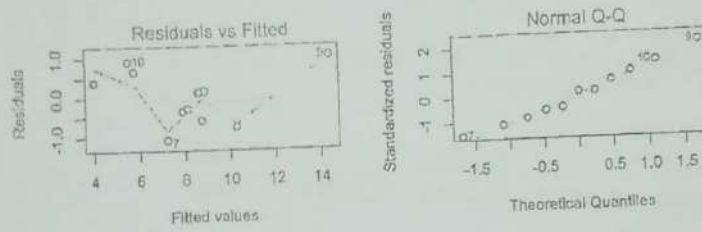


FIGURE 2

Table de la loi de Student

La table donne les valeurs des fonctions d'une loi de Fisher ou fonction de variable de degré de liberté (dfr) relevant de pour différentes probabilités (à la ligne).

Ce sont les valeurs x telles que $P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \alpha$ où X suit une loi de Fisher à n degrés de liberté, dans un échantillon de n données.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+1}{2})} (1 + \frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{2} \delta(x)$$

La table donne aussi les valeurs $F_{\alpha}^{-1}(x)$ et $F_{1-\alpha}^{-1}(x)$ ou la fonction réciproque de la fonction de répartition d'une loi de Fisher à n degrés de liberté. Par exemple, on peut lire dans la table : $F_{0.95}^{-1}(0.95) = 1.647$. Ceci est un indice la fonction INVERSE INVERSE(1- α), n) pour obtenir $F_{\alpha}^{-1}(n)$ dans la fonction $\alpha(x, n)$ dans la valeur inverse. Exemple : $\alpha(0.45, 21) = 0.289$.

	0.1	0.2	0.5	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.325	0.375	1.000	3.078	5.024	12.706	63.682	318.249
2	0.688	0.717	1.000	1.886	3.000	6.965	31.599	129.288
3	0.816	0.845	1.000	1.433	2.353	4.182	19.164	77.654
4	0.881	0.909	1.000	1.250	2.015	3.747	17.131	69.443
5	0.909	0.937	1.000	1.156	1.821	3.464	15.985	64.486
6	0.925	0.952	1.000	1.104	1.717	3.267	15.151	60.646
7	0.938	0.960	1.000	1.067	1.639	3.123	14.454	57.658
8	0.949	0.967	1.000	1.039	1.579	3.014	13.858	55.212
9	0.958	0.974	1.000	1.018	1.531	2.926	13.338	53.143
10	0.966	0.980	1.000	1.001	1.491	2.853	12.881	51.426
11	0.973	0.985	1.000	0.987	1.457	2.792	12.474	49.951
12	0.979	0.990	1.000	0.976	1.428	2.741	12.115	48.661
13	0.984	0.993	1.000	0.967	1.403	2.698	11.794	47.504
14	0.988	0.995	1.000	0.959	1.381	2.662	11.501	46.458
15	0.991	0.997	1.000	0.953	1.361	2.631	11.234	45.514
16	0.993	0.998	1.000	0.948	1.343	2.605	11.000	44.664
17	0.995	0.999	1.000	0.944	1.328	2.582	10.794	43.893
18	0.996	0.999	1.000	0.940	1.314	2.562	10.612	43.188
19	0.997	0.999	1.000	0.937	1.301	2.544	10.451	42.538
20	0.998	0.999	1.000	0.934	1.289	2.528	10.308	41.933
21	0.998	0.999	1.000	0.932	1.278	2.514	10.180	41.364
22	0.999	0.999	1.000	0.930	1.268	2.501	10.065	40.828
23	0.999	0.999	1.000	0.928	1.259	2.489	9.961	40.322
24	0.999	0.999	1.000	0.927	1.251	2.478	9.868	39.844
25	0.999	0.999	1.000	0.926	1.244	2.468	9.784	39.391
26	0.999	0.999	1.000	0.925	1.237	2.459	9.708	38.961
27	0.999	0.999	1.000	0.924	1.231	2.451	9.639	38.552
28	0.999	0.999	1.000	0.923	1.225	2.443	9.575	38.163
29	0.999	0.999	1.000	0.923	1.219	2.436	9.515	37.792
30	0.999	0.999	1.000	0.922	1.214	2.429	9.458	37.438
31	0.999	0.999	1.000	0.922	1.209	2.423	9.404	37.099
32	0.999	0.999	1.000	0.921	1.204	2.417	9.352	36.774
33	0.999	0.999	1.000	0.921	1.200	2.411	9.302	36.462
34	0.999	0.999	1.000	0.921	1.195	2.406	9.254	36.162
35	0.999	0.999	1.000	0.920	1.191	2.401	9.208	35.874
36	0.999	0.999	1.000	0.920	1.187	2.396	9.164	35.597
37	0.999	0.999	1.000	0.920	1.183	2.391	9.121	35.331
38	0.999	0.999	1.000	0.920	1.180	2.387	9.080	35.075
39	0.999	0.999	1.000	0.920	1.176	2.383	9.040	34.828
40	0.999	0.999	1.000	0.920	1.173	2.379	9.001	34.590
42	0.999	0.999	1.000	0.920	1.168	2.374	8.963	34.361
44	0.999	0.999	1.000	0.920	1.164	2.369	8.926	34.140
46	0.999	0.999	1.000	0.920	1.160	2.365	8.890	33.926
48	0.999	0.999	1.000	0.920	1.156	2.361	8.855	33.719
50	0.999	0.999	1.000	0.920	1.153	2.357	8.821	33.518
55	0.999	0.999	1.000	0.920	1.147	2.351	8.777	33.223
60	0.999	0.999	1.000	0.920	1.141	2.345	8.733	32.936
65	0.999	0.999	1.000	0.920	1.136	2.339	8.689	32.656
70	0.999	0.999	1.000	0.920	1.131	2.333	8.645	32.382
75	0.999	0.999	1.000	0.920	1.126	2.327	8.601	32.114
80	0.999	0.999	1.000	0.920	1.121	2.321	8.557	31.851
85	0.999	0.999	1.000	0.920	1.116	2.315	8.513	31.593
90	0.999	0.999	1.000	0.920	1.111	2.309	8.469	31.340
95	0.999	0.999	1.000	0.920	1.106	2.303	8.425	31.092
100	0.999	0.999	1.000	0.920	1.101	2.297	8.381	30.849
120	0.999	0.999	1.000	0.920	1.096	2.291	8.337	30.611
140	0.999	0.999	1.000	0.920	1.091	2.285	8.293	30.377
160	0.999	0.999	1.000	0.920	1.086	2.279	8.249	30.147
180	0.999	0.999	1.000	0.920	1.081	2.273	8.205	29.920
200	0.999	0.999	1.000	0.920	1.076	2.267	8.161	29.696
250	0.999	0.999	1.000	0.920	1.070	2.261	8.117	29.474
300	0.999	0.999	1.000	0.920	1.065	2.255	8.073	29.254
350	0.999	0.999	1.000	0.920	1.060	2.249	8.029	29.036
400	0.999	0.999	1.000	0.920	1.055	2.243	7.985	28.820
450	0.999	0.999	1.000	0.920	1.050	2.237	7.941	28.606
500	0.999	0.999	1.000	0.920	1.045	2.231	7.897	28.394
550	0.999	0.999	1.000	0.920	1.040	2.225	7.853	28.184
600	0.999	0.999	1.000	0.920	1.035	2.219	7.809	27.976
650	0.999	0.999	1.000	0.920	1.030	2.213	7.765	27.770
700	0.999	0.999	1.000	0.920	1.025	2.207	7.721	27.566
750	0.999	0.999	1.000	0.920	1.020	2.201	7.677	27.364
800	0.999	0.999	1.000	0.920	1.015	2.195	7.633	27.164
850	0.999	0.999	1.000	0.920	1.010	2.189	7.589	26.966
900	0.999	0.999	1.000	0.920	1.005	2.183	7.545	26.770
950	0.999	0.999	1.000	0.920	1.000	2.177	7.501	26.576
1000	0.999	0.999	1.000	0.920	1.000	2.171	7.457	26.384

Examen: Régression linéaire

Durée: 1 heure 00

1 Données

On dispose de données concernant l'âge, le kilométrage en milliers de kms, et le prix en milliers d'euros pour un échantillon de voitures d'occasion d'un même type :

```
> donnees
  age kms prix
1   5  92  7.8
2   4  64  9.5
3   6 124  6.4
4   5  97  7.5
5   5  79  8.1
6   5  76  9.0
7   6  93  6.1
8   6  63  8.7
9   2  13 15.4
10  7 111  6.4
11  7 143  4.4
```

2 Régression linéaire simple

On cherche à modéliser la relation entre l'âge et le prix.

1. Qu'est-ce qui peut renseigner sur la forme de la liaison statistique qui peut exister entre le prix et l'âge?
2. On suppose que la relation entre le prix et l'âge est linéaire. Proposer un modèle de régression linéaire simple du prix sur l'âge. Quelles sont les hypothèses du modèle. Quels sont les objectifs visés?

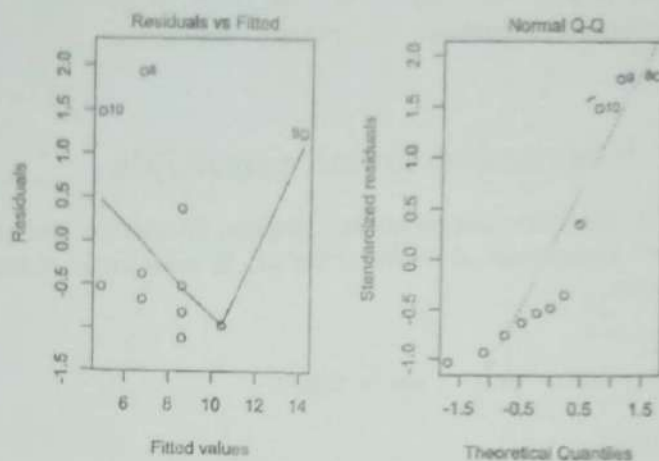


FIGURE 1

3. Déterminer la droite de régression.
4. La pente de cette droite est-elle significative au niveau $\alpha = 0.05$?
5. Vérifier l'équation de la variance puis en déduire le coefficient de détermination R^2 . Interpréter le résultat obtenu.
6. Analyser les graphiques de la FIGURE 1.

```
> sum(age)
[1] 58
> sum(prix)
[1] 89.3
> sum(age*prix)
[1] 433.6
> sum(age^2)
[1] 326
> sum(prix^2)
[1] 805.29
>
residuals(lm(prix~age))
```

1

2

3

4

5

6

7

2

```

-0.8216216 -0.9675676 -0.3756757 -1.1216216 -0.5216216 0.3783784 -0.6756757
  *      8          9          10          11
1.9243243 1.2405405 1.4702703 -0.5297297

```

3 Régression linéaire multiple

On considère maintenant la régression linéaire du prix sur les variables âge et kilométrage. A l'aide du logiciel R, nous avons obtenu les résultats suivants :

Call:

```
lm(formula = prix ~ age + kms)
```

Residuals:

```

      Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.1005 -0.4992  0.1016  0.5195  1.0088

```

Coefficients:

```

              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 16.72839    1.00600  16.629 1.73e-07 ***
age          -0.86571    0.34364  -2.519 0.0359 *
kms          -0.04660    0.01409  -3.308 0.0107 *
---

```

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

Residual standard error: 0.7815 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9392, Adjusted R-squared: 0.924
F-statistic: 61.78 on 2 and 8 DF, p-value: 1.368e-05

```

1. Écrire le modèle sous la forme matricielle en précisant les hypothèses.
2. Donner la droite de régression.
3. Donner une estimation de l'écart-type résiduel.
4. Combien vaut le coefficient de détermination ajusté. Commenter.
5. Tester au niveau 5%, l'hypothèse nulle "le kilométrage n'a pas d'effet sur le prix" contre "le kilométrage a un effet sur le prix".
6. Analyser les résidus (vérifier l'hypothèse de normalité des erreurs, l'homoscédasticité et la linéarité). Utiliser la FIGURE 2.

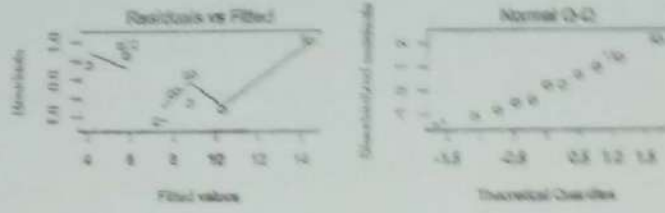


FIGURE 2 -

Table de la loi de Student

La table donne les valeurs des fonctions $F(x)$ de la loi de Fisher ou fonctions de répartition de degrés de liberté k (dans colonne) et pour différentes probabilités α (dans lignes).

Ces sont les valeurs x telles que $P(X \leq x) = \int_0^x f(t) dt = 1 - \alpha$ où f est une loi de Fisher à k degrés de liberté, avec un caractère de l'asymptotique de la densité

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{k}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})} (1 + \frac{x^2}{k})^{-\frac{k+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

La table donne avec les valeurs $F_0^{-1}(\alpha)$ ou $F_0^{-1}(1-\alpha)$ est la fonction d'inverse de la fonction de répartition d'une loi de Fisher à k degrés de liberté. Par exemple, on peut lire dans la table $F_0^{-1}(0.95) = 1.645$.

Avec α est, on utilise la fonction $F_0^{-1}(1-\alpha)$ ou $F_0^{-1}(1-\alpha)$ pour donner $F_0^{-1}(\alpha)$.
Avec α , la fonction $f(x, \alpha)$ donne les valeurs exactes. Consultez les pages 20-21, 22-23, 24-25.

α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	0.393	0.638	1.000	1.638	2.202	3.078	3.851
2	0.683	0.978	1.385	2.000	2.576	3.500	4.102
3	0.959	1.286	1.700	2.353	2.917	3.747	4.352
4	1.250	1.601	1.960	2.576	3.183	4.013	4.608
5	1.533	1.891	2.157	2.797	3.362	4.200	4.775
6	1.799	2.154	2.333	2.965	3.510	4.363	4.921
7	2.045	2.398	2.490	3.103	3.635	4.500	5.045
8	2.271	2.618	2.629	3.219	3.743	4.617	5.156
9	2.479	2.819	2.746	3.319	3.837	4.717	5.256
10	2.668	2.999	2.851	3.413	3.920	4.803	5.347
11	2.841	3.159	2.938	3.495	3.994	4.877	5.430
12	2.999	3.301	3.011	3.568	4.060	4.943	5.506
13	3.146	3.428	3.071	3.633	4.118	5.002	5.576
14	3.284	3.544	3.121	3.691	4.170	5.055	5.641
15	3.414	3.651	3.163	3.743	4.217	5.103	5.701
16	3.537	3.750	3.200	3.791	4.260	5.147	5.756
17	3.654	3.842	3.233	3.835	4.300	5.187	5.807
18	3.766	3.928	3.263	3.876	4.337	5.224	5.854
19	3.873	4.009	3.291	3.914	4.371	5.258	5.898
20	3.976	4.085	3.317	3.949	4.402	5.289	5.939
21	4.075	4.157	3.341	3.982	4.431	5.318	5.977
22	4.171	4.225	3.363	4.013	4.458	5.345	6.013
23	4.264	4.289	3.383	4.043	4.483	5.370	6.047
24	4.355	4.350	3.402	4.071	4.507	5.393	6.079
25	4.444	4.408	3.419	4.098	4.529	5.414	6.110
26	4.531	4.463	3.435	4.124	4.549	5.434	6.139
27	4.616	4.516	3.450	4.149	4.568	5.452	6.167
28	4.700	4.567	3.464	4.173	4.586	5.469	6.193
29	4.782	4.616	3.477	4.196	4.603	5.485	6.218
30	4.863	4.663	3.489	4.218	4.619	5.500	6.242
31	4.943	4.708	3.500	4.239	4.634	5.514	6.264
32	5.022	4.751	3.511	4.259	4.648	5.527	6.285
33	5.100	4.792	3.521	4.278	4.661	5.539	6.305
34	5.177	4.832	3.530	4.296	4.674	5.550	6.324
35	5.254	4.870	3.539	4.314	4.686	5.561	6.342
36	5.330	4.907	3.547	4.331	4.698	5.571	6.359
37	5.405	4.943	3.555	4.348	4.709	5.581	6.375
38	5.480	4.978	3.562	4.364	4.720	5.590	6.390
39	5.554	5.012	3.569	4.380	4.730	5.599	6.404
40	5.628	5.045	3.576	4.395	4.740	5.607	6.417
41	5.701	5.077	3.582	4.410	4.749	5.615	6.430
42	5.774	5.108	3.588	4.425	4.758	5.623	6.442
43	5.846	5.138	3.594	4.439	4.766	5.630	6.453
44	5.918	5.167	3.599	4.453	4.774	5.637	6.464
45	5.989	5.195	3.604	4.467	4.782	5.644	6.474
46	6.060	5.222	3.609	4.480	4.789	5.650	6.483
47	6.130	5.249	3.613	4.493	4.796	5.656	6.492
48	6.200	5.275	3.617	4.506	4.803	5.662	6.500
49	6.269	5.300	3.621	4.518	4.809	5.667	6.508
50	6.338	5.324	3.625	4.530	4.815	5.672	6.515
51	6.406	5.347	3.628	4.542	4.821	5.677	6.522
52	6.474	5.370	3.631	4.553	4.826	5.681	6.528
53	6.541	5.392	3.634	4.564	4.831	5.685	6.534
54	6.608	5.414	3.637	4.575	4.836	5.689	6.539
55	6.675	5.435	3.640	4.585	4.840	5.692	6.544
56	6.741	5.456	3.642	4.595	4.844	5.695	6.548
57	6.807	5.476	3.645	4.605	4.848	5.698	6.552
58	6.873	5.495	3.647	4.615	4.851	5.701	6.556
59	6.938	5.514	3.649	4.624	4.854	5.704	6.559
60	7.003	5.532	3.651	4.633	4.857	5.707	6.562
61	7.067	5.550	3.653	4.642	4.860	5.709	6.565
62	7.131	5.567	3.655	4.650	4.862	5.711	6.567
63	7.194	5.584	3.656	4.658	4.864	5.713	6.569
64	7.257	5.600	3.657	4.666	4.866	5.715	6.571
65	7.320	5.616	3.658	4.673	4.868	5.716	6.572
66	7.382	5.631	3.659	4.680	4.869	5.717	6.573
67	7.444	5.646	3.660	4.687	4.870	5.718	6.574
68	7.506	5.660	3.661	4.693	4.871	5.719	6.575
69	7.567	5.674	3.661	4.699	4.872	5.720	6.575
70	7.628	5.687	3.662	4.705	4.873	5.720	6.576
71	7.688	5.700	3.662	4.710	4.873	5.721	6.576
72	7.748	5.712	3.662	4.715	4.874	5.721	6.576
73	7.807	5.724	3.662	4.720	4.874	5.721	6.576
74	7.866	5.735	3.662	4.724	4.874	5.721	6.576
75	7.924	5.746	3.662	4.728	4.874	5.721	6.576
76	7.982	5.756	3.662	4.732	4.874	5.721	6.576
77	8.040	5.766	3.662	4.735	4.874	5.721	6.576
78	8.097	5.775	3.662	4.738	4.874	5.721	6.576
79	8.154	5.784	3.662	4.741	4.874	5.721	6.576
80	8.211	5.792	3.662	4.744	4.874	5.721	6.576
81	8.267	5.800	3.662	4.746	4.874	5.721	6.576
82	8.323	5.808	3.662	4.748	4.874	5.721	6.576
83	8.378	5.815	3.662	4.750	4.874	5.721	6.576
84	8.433	5.822	3.662	4.752	4.874	5.721	6.576
85	8.487	5.829	3.662	4.754	4.874	5.721	6.576
86	8.541	5.835	3.662	4.755	4.874	5.721	6.576
87	8.595	5.841	3.662	4.756	4.874	5.721	6.576
88	8.648	5.847	3.662	4.757	4.874	5.721	6.576
89	8.701	5.852	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576
90	8.754	5.857	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576
91	8.807	5.861	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576
92	8.859	5.865	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576
93	8.911	5.868	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576
94	8.962	5.871	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576
95	9.013	5.874	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576
96	9.064	5.876	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576
97	9.114	5.878	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576
98	9.164	5.880	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576
99	9.214	5.881	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576
100	9.263	5.882	3.662	4.758	4.874	5.721	6.576

UFR Mathématiques et Informatique
Année 2017-2018
Examen d'Analyse de variance (1h45)

Questions de cours :

Citer les différents modèles d'analyse de variance (modèles, hypothèses).

Exercice : Pour tester la possible différence entre divers laborantins dans un examen de microscopie en laboratoire, on dispose de 4 préparations différentes. Chaque laborantin compte le nombre d'un certain type de cellules dans chaque préparation. On obtient le tableau suivant:

		Laborantins				
		1	2	3	4	5
Préparations	A	48	51	44	75	63
	B	62	58	57	96	75
	C	57	54	55	41	78
	D	39	50	44	70	66

1. Donner la formule d'analyse de variance à un facteur (laborantin).
2. Donner la formule d'analyse de variance à deux facteurs (laborantin et préparation).
3. On veut tester l'influence des laborantins sur le nombre de cellules. Quelle méthode d'analyse de variance faut-il choisir ?
4. Y a-t-il une différence significative entre les laborantins ?
5. On refait d'autres mesures

		Laborantins				
		1	2	3	4	5
Préparations	A	49	50	45	74	65
	B	61	56	58	94	76
	C	55	52	56	82	77
	D	40	52	42	72	65

Y a-t-il un effet d'interaction ?

QUANTILES D'ORDRE 0.95 DE LA LOI DE FISHER
 Degrés de liberté du numérateur sur la première ligne
 Degrés de liberté du dénominateur sur la colonne de gauche

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.440	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927
150	3.904	3.056	2.665	2.432	2.274	2.160	2.071	2.001	1.943	1.894
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878
400	3.865	3.018	2.627	2.394	2.237	2.121	2.032	1.962	1.903	1.854

UFR Mathématiques et Informatique
Année 2017-2018
Examen d'Analyse de variance (Deuxième session)
(1h20)

Le sujet sera rendu avec la copie sinon la copie ne sera pas corrigée.

Pour tester la possible différence entre des laborantins dans un examen de microcopie en laboratoire, on dispose de 4 préparations différentes. Chaque laborantin compte le nombre d'un certain type de cellules dans chaque préparation. On obtient le tableau suivant :

		Laborantins				
		1	2	3	4	5
Préparations	A	48	51	44	75	63
	B	62	58	57	94	75
	C	57	54	55	83	74
	D	35	50	42	70	66

- Donner le tableau de l'analyse de variance à un facteur (laborantin).
- Donner le tableau de l'analyse de variance à deux facteurs (laborantin et préparation).
- On veut tester l'influence des laborantins sur le nombre de cellules. Quelle méthode d'analyse de variance faut-il choisir ? Justifiez.
- Y a-t-il une différence significative entre les laborantins ? On posera clairement le problème de test, on donnera la région critique et le résultat du test.
- On complète les mesures précédentes par les mesures suivantes :

		Laborantins				
		1	2	3	4	5
Préparations	A	49	50	45	74	65
	B	61	56	58	94	76
	C	55	52	56	82	77
	D	45	49	46	65	69

Y a-t-il un effet d'interaction ? On posera clairement le problème de test, on donnera la région critique et le résultat du test.

NB : Les résultats seront donnés avec 2 chiffres après la virgule. Tout résultat erroné donne la note de 0.

QUANTILES D'ORDRE 0.95 DE LA LOI DE FISHER
 Degrés de liberté du numérateur sur la première ligne
 Degrés de liberté du dénominateur sur la colonne de gauche

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.811	8.786
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.050	4.950	4.876	4.818	4.772	4.735
6	5.957	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.060
7	5.591	4.737	4.347	4.120	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.500	3.438	3.388	3.347
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.230	3.179	3.137
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.020	2.978
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854
12	4.747	3.885	3.490	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671
14	4.600	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.790	2.707	2.641	2.588	2.544
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.810	2.699	2.614	2.548	2.494	2.450
18	4.414	3.555	3.160	2.928	2.773	2.661	2.577	2.510	2.456	2.412
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.740	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348
21	4.325	3.467	3.072	2.840	2.685	2.573	2.488	2.420	2.366	2.321
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.640	2.528	2.442	2.375	2.320	2.275
24	4.260	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.300	2.255
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.490	2.405	2.337	2.282	2.236
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.220
27	4.210	3.354	2.960	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.250	2.204
28	4.196	3.340	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.190
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177
30	4.171	3.316	2.922	2.690	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.180	2.124	2.077
50	4.034	3.183	2.790	2.557	2.400	2.286	2.199	2.130	2.073	2.026
60	4.001	3.150	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.040	1.993
70	3.978	3.128	2.736	2.503	2.346	2.231	2.143	2.074	2.017	1.969
80	3.960	3.111	2.719	2.486	2.329	2.214	2.126	2.056	1.999	1.951
90	3.947	3.098	2.706	2.473	2.316	2.201	2.113	2.043	1.986	1.938
100	3.936	3.087	2.696	2.463	2.305	2.191	2.103	2.032	1.975	1.927
150	3.904	3.056	2.665	2.432	2.274	2.160	2.071	2.001	1.943	1.894
200	3.888	3.041	2.650	2.417	2.259	2.144	2.056	1.985	1.927	1.878
400	3.855	3.018	2.627	2.394	2.237	2.121	2.032	1.962	1.903	1.854

UE: Statistique appliquée
ECUE: Régression linéaire

UFHB, UFRMI, Licence 1
Année Universitaire
2017/2018

Examen: Session 1

Durée: 1h30

Exercice 1

(1) On considère le modèle linéaire suivant

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

où

• $Y = (Y_1, \dots, Y_n)'$ est le vecteur des observations de la variable réponse Y

• $X = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & \dots & X_{1p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \dots & X_{np} \end{pmatrix}$ est la matrice des observations des variables explicatives.

On suppose que $\text{rang}(X) = p + 1$.

• $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_p)'$ est le vecteur des paramètres inconnus

• $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$ est le vecteur aléatoire des erreurs qui suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$
où I_n est la matrice identité d'ordre n et σ^2 le paramètre variance inconnu.

(a) Déterminer l'estimateur des moindres carrés $\hat{\beta}$. Quelle est la loi de $\hat{\beta}$? Justifier.

(b) Montrer que

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}\hat{\beta}') = \beta'\beta + \sigma^2 \text{trace}[(X'X)^{-1}]$$

(c) En déduire que

$$\mathbb{E}((\hat{\beta} - \beta)'(\hat{\beta} - \beta)) = \sigma^2 \text{trace}[(X'X)^{-1}]$$

(d) Pourquoi la matrice $X'X$ est-elle diagonalisable? Si on note $\lambda_0, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de la matrice $X'X$, calculer $\mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^p \hat{\beta}_j^2\right)$ en fonction de $\sum_{j=0}^p \beta_j^2$, des valeurs propres $\lambda_0, \dots, \lambda_p$ et de σ^2

On rappelle que si Z est un vecteur aléatoire dans \mathbb{R}^p et A et B sont deux matrices carrées d'ordre p alors $\mathbb{E}(Z'AZ) = \mathbb{E}(Z'Z) \times \text{trace}(A)$.

(2) On étudie l'influence des heures de travail (en heures) et du capital (en machines/heures) utilisé sur la production industrielle. Pour cela, on dispose des observations de 9 entreprises résumées dans le tableau ci-dessous :

	Travail	Capital	Production
1	1100	300	60
2	1200	400	120
3	1430	420	190
4	1500	400	250
5	1520	510	300

1

UFHB/UFRMI

2017/2018

6	1620	590	360
7	1800	600	380
8	1820	630	430
9	1800	610	440

On suppose que la production est expliquée par un modèle de régression linéaire multiple avec deux variables explicatives, le capital et le travail.

- (a) Ecrire le modèle sous forme matricielle.
 (b) Estimer β . On donne

$$(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 6.304777 & -0.007800 & 0.011620 \\ -0.007800 & 0.000015 & -0.000031 \\ 0.011620 & -0.000031 & 0.000072 \end{pmatrix}$$

- (c) Calculer les estimations de σ^2 et $\text{Var}(\hat{\beta})$.

UFHB,UFRMI, Licence 3
UE : Statistique appliquée

Année Universitaire
2018/2019

ECUE : Regression linéaire

Durée : 1 h 15 mn

Exercice 1 Les données proposées dans cet exercice présentent le taux de décès par attaque cardiaque chez les hommes de 55 à 59 ans dans différents pays. Les variables sont les suivantes :

- Y : $100 [\log(\text{nombre de décès par crise cardiaque pour 100000 hommes de 55 à 59 ans}) - 2]$;
- X_1 : téléphones par millier d'habitants;
- X_2 : calories grasses en pourcentage du total des calories;
- X_3 : calories provenant de protéines animales en pourcentage du total des calories.

On veut étudier l'impact des variables X_1 , X_2 et X_3 sur la variable Y . A l'aide du logiciel R, nous obtenons les résultats suivants :

Call:

```
lm(formula = Y ~ X1 + X2 + X3, data = Donnees)
```

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-23.636	-10.553	-1.559	9.261	23.601

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	22.353115	15.328270	1.458	0.162
X1	-0.005842	0.077988	-0.075	0.941
X2	-0.423988	0.726211	-0.584	0.567
X3	8.413437	3.689602	2.280	0.035 *

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 15.48 on 18 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.4309, Adjusted R-squared: 0.3361

F-statistic: 4.544 on 3 and 18 DF, p-value: 0.01538

- (1) Ecrire le modèle de régression linéaire multiple avec les hypothèses appropriées.
- (2) Donner la droite de régression.
- (3) Quelles sont les commandes R permettant d'effectuer la régression linéaire ?
- (4) Qu'est ce que le test de validité globale de Fisher? Effectuer le test de validité globale de Fisher au seuil $\alpha = 0.05$.
- (5) Au seuil $\alpha = 0.05$, quels sont les coefficients significatifs ?

(6) La régression linéaire est-elle appropriée?

Exercice 2 (QCM) Dans cet exercice, une bonne réponse est notée 1 point, une mauvaise réponse enlève 0.5 point.

On considère un modèle général de régression linéaire multiple s'écrivant sous la forme matricielle. On reprend les notations usuelles du cours. $Y = X\beta + \varepsilon$, où

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_i \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1j} & \cdots & X_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{i1} & \cdots & X_{ij} & \cdots & X_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{nj} & \cdots & X_{np} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

On suppose que les conditions standards des modèles de régression linéaire et l'hypothèse gaussienne sont vérifiées.

- (1) Dans l'estimation des moindres carrés, la matrice $X'X$
 - A est de rang $p + 1$
 - B est non inversible
 - C est rectangulaire
 - D est nulle.
- (2) Parmi les variables suivantes, lesquelles sont de valeur observée ou calculable sur les observations :
 - A Y
 - B ε
 - C $\hat{\varepsilon}$
 - D \hat{Y}
 - E $Y - X\beta$
- (3) Quelle(s) propriété(s) l'estimateur des moindres carrés ordinaires $\hat{\beta}$ vérifie-t-il ?
 - A Il est linéaire en Y , sans biais.
 - B Il est optimal au sens du risque quadratique parmi les estimateurs sans biais.
 - C Il est égal à l'estimateur du maximum de vraisemblance
 - D C'est un vecteur gaussien dont la matrice de variance-covariance est diagonale.
- (4) Lors d'une régression simple, si le R^2 vaut 1, les points sont-ils alignés ?
 - A Non
 - B Oui

2018/2019

- C Pas obligatoirement
- (5) Lors d'une régression simple, le R^2 est égal
- A au coefficient de corrélation linéaire
 - B au carré du coefficient de corrélation linéaire
 - C obligatoirement à 1
- (6) La droite de régression linéaire minimise
- A la somme des erreurs
 - B la somme des carrés des erreurs
 - C le carré de la somme des erreurs.
- (7) La droite des moindres carrés ordinaires d'une régression simple passe par le point (\bar{X}, \bar{Y})
- A Toujours
 - B Jamais
 - C Parfois
- (8) Un estimateur de la variance de $\hat{\beta}$ de l'estimateur des moindres carrés de β vaut
- A $\sigma^2(X'X)^{-1}$
 - B $\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}$
 - C $\hat{\sigma}^2(XX')^{-1}$

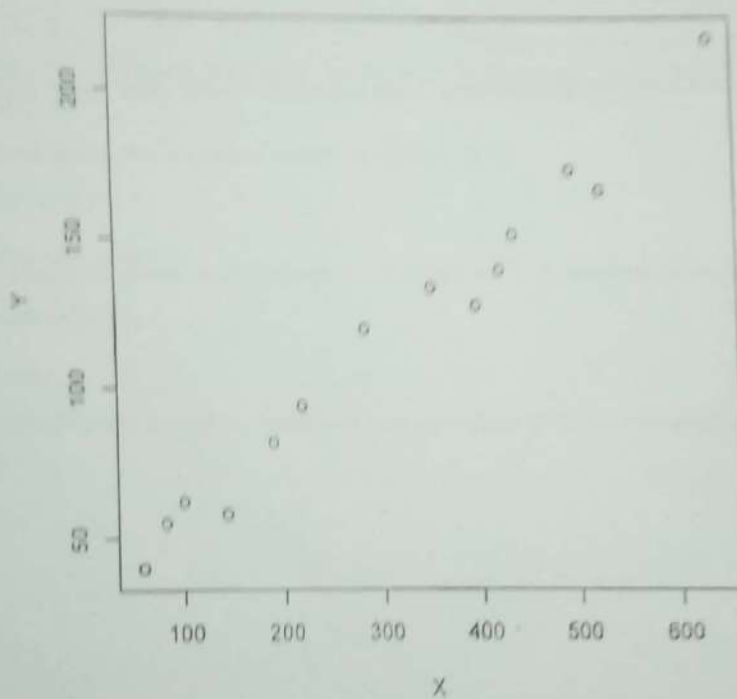
UPHB, UFRHM, Licence 3

Faculté Universitaire

ECUE : Régression linéaire et Analyse de la variance

2018/2019

Durée : 1 h 30 mn

Exercice 1 Considérons les variables X et Y ci-dessous :
 $X = (80, 82, 100, 142, 190, 220, 295, 354, 400, 425, 440, 500, 530, 640)$
 $Y = (40, 55, 62, 58, 82, 94, 120, 134, 128, 140, 152, 174, 167, 210)$
(1) La représentation graphique de Y en fonction de X donne :Existe-t-il une relation linéaire entre Y et X ? Pourquoi ?

- (2) Calculer le coefficient de Corrélation linéaire entre Y et X . Interpréter.
- (3) Ecrire le modèle de régression linéaire de Y sur X tout en précisant les hypothèses.
- (4) Ecrire le modèle sous sa forme matricielle.
- (5) Donner les commandes R permettant d'obtenir les résultats ci-dessous

Call:

lm(formula = Y ~ X)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-----	----	--------	----	-----

UFHB, UFRMI

2018/2019

-12.839 -7.139 2.177 5.613 11.621

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	27.93545	4.44100	6.29	4.00e-05 ***
X	0.28226	0.01236	22.83	2.96e-11 ***

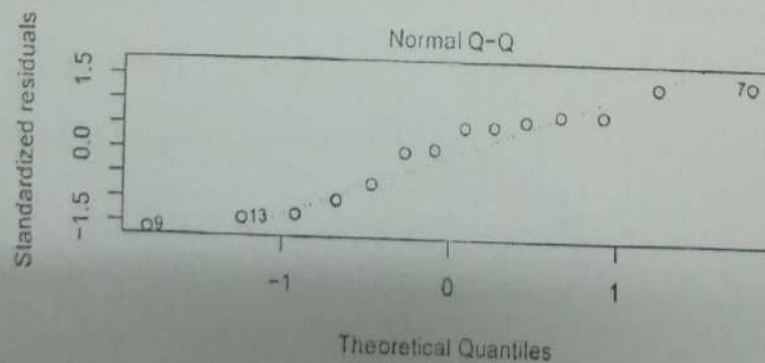
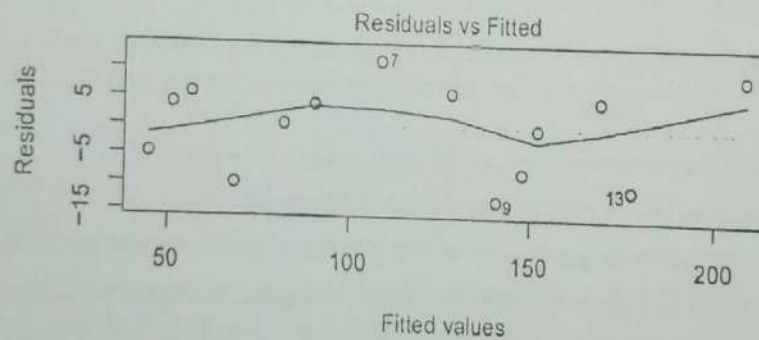
 Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 8.233 on 12 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.9775, Adjusted R-squared: 0.9756

F-statistic: 521.2 on 1 and 12 DF, p-value: 2.961e-11

- (6) Ecrire la droite de regression.
 (7) Qu'appelle-t-on test de validité marginale de Student?
 (8) La pente est-elle significative? Pourquoi?
 (9) Interpréter les graphique ci-dessous



Exercice 2 Dans cet exercice, nous étudions le lien entre la force de retrait Y (variable quantitative) et le type de clous X (variable qualitative).

- (1) Pourquoi faut-il faire une analyse de la variance ?
 (2) Ecrire le modèle d'analyse de la variance à un facteur à effets fixes.
 (3) Quelles sont les conditions d'utilisation du modèle ?

(4) Interpréter les commandes ci-dessous

```
> Y=c(36.57,29.67,43.38,29.94,10.03,21.55,41.79,31.05,
+ 35.84,40.80,14.88,24.22,23.85,21.8,27.20,38.25,29.45,36.35,
+ 23.89,28.44,12.61,25.71,17.69,24.69,28.48,19.35,28.6,40.17,39.21,19.88)
> F=as.factor(c(rep("annulaire",10),rep("helicoïdal",10),rep("Dixax",10)))
> Tableau=data.frame(Y,F)
> Resultat=aov(Y ~ F,data=Tableau)
> summary(Resultat)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
X	2	320.7	160.37	2.352	0.118
Residuals	27	1873.1	69.37		

(5) Compléter le tableau suivant

Source de la variance	Sommes des carrés des écarts	Degrés de liberté	Carrés moyens	F
X	?	?	?	?
Résiduelle	1873.1	?	?	
Total	2193.8	?	?	

- (6) Au niveau 5%, le type de clous a-t-il un effet sur la force de retrait ?
 (7) Peut-on faire ici un test de comparaisons multiples ? Pourquoi ?
 (8) Quelle est la commande qui permet de faire le test de comparaisons multiples de Tukey ?
 Le quantile d'ordre 0.95 de la loi de Fisher à 2 et 13 degrés de liberté est 3.882

UFR de Mathématiques et Informatique
 Année 2018-2019
 Licence Mathématiques et Applications
 Examen d'Analyse des données (3h)
 (Fascicules autorisés)

Question de cours :

1. Donner les différents types de classification automatique et leur principe.
2. Quelles sont les éléments d'entrée d'une analyse en composantes principales ?

Exercice 1 : On observe $p=2$ variables sur $n=5$ individus uniformément pondérés.

x_1	x_2
3	-2
3	2
0	-1
4	-3
0	-1

1. Calculez la matrice S de covariance.
2. Diagonalisez la matrice S .
3. Calculez la matrice C des composantes principales.

Exercice 2 : On donne la répartition des étudiants de la licence de mathématiques de l'Université de Gondouana City selon leur sexe et leur niveau d'études.

	L1	L2	L3
Masculin	500	300	200
Féminin	100	50	25

1. Calculer les matrices profils-lignes et profils-colonnes.
2. Donner le Khi-deux d'écart à l'indépendance.

Exercice 3 : On fait une analyse en composantes principales d'un tableau de 9 individus, mesurés sur 4 variables v_1, v_2, v_3 et v_4 . On suppose que tous les individus ont le même poids. On a

$$\text{Var}(v_1) = 12,8125 \quad \text{Var}(v_2) = 10,0625 \quad \text{Var}(v_3) = 13,5694 \quad \text{et} \quad \text{Var}(v_4) = 8,9028 ;$$

les valeurs propres de la matrice de covariance:

$$15,9410 ; 10,4055 ; 0,5493 ; \dots$$

Les vecteurs propres

	[vp1]	[vp2]	[vp3]	[vp4]
[1.]	0.3151694	0.5686517	-0.1852853	-0.6139259
[2.]	0.5076129	0.3712665	0.4499844	0.6340381
[3.]	0.4922789	-0.6581534	0.4603842	-0.3354728
[4.]	0.4843461	-0.3250085	-0.7424485	0.3294671

On donne les composantes principales

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]
jean	-8.612059	1.4093727	-0.06752404	0.07158969
alai	-3.878793	0.5022279	-0.01309446	-0.07093634
anni	-3.213388	-3.4683149	0.17497150	0.01065973
moni	9.851807	-0.5995132	-0.03680819	-0.14998275
didi	6.406574	2.0465857	0.07561885	0.19044801
andr	-3.033102	4.9211080	-0.07749344	-0.13542301
pier	-1.025444	-6.3771179	0.16386970	-0.02986136
brig	1.953971	4.1995965	0.26192835	0.03907002
evel	1.550436	-2.6339447	-0.42146828	0.07443601

1. Calculer l'inertie totale
2. Donner les matrices M et D
3. Donner la matrice à diagonaliser
4. Donner la qualité de représentation de Alai sur le plan (1,2)
5. Donner la qualité globale de représentation des individus sur le plan (1,2)
6. Représenter les individus sur le plan (1,2)
7. Représenter les variables
8. Indiquer les variances des deux premières composantes
9. Calculer la contribution de jean à l'inertie du nuage projeté (plan (1,2)).
10. Donner la valeur des variables v_1 et v_3 pour Pier.

UFR de Mathématiques et Informatique
Année 2015-2016
Licence Mathématiques et Applications
Examen d'Analyse des données (2h30)
(Fascicules autorisés)

Question de cours :

1. Donner les différents types de classification automatique et leur principe.
2. Quelles sont les éléments d'entrée d'une analyse en composantes principales ?

Exercice 1 : On observe $p=2$ variables sur $n=5$ individus uniformément pondérés.

x_1	x_2
3	-2
3	2
0	-1
4	-3
0	-1

1. Calculez la matrice S de covariance.
2. Diagonalisez la matrice S .
3. Calculez la matrice C des composantes principales.
4. Donner les corrélations entre les composantes principales et les anciennes variables.
5. Donner la qualité de représentation de l'individu n°1 sur le premier axe.
6. Donner la contribution de l'individu n°2 à la formation du deuxième axe.
7. Donner la qualité globale du premier axe.

Exercice 2 : On donne la répartition des étudiants de la licence de mathématiques de l'Université de Gondwana City selon leur sexe et leur niveau d'études.

	L1	L2	L3
Masculin	500	300	200
Féminin	100	50	25

1. Calculer les matrices profils-lignes et profils-colonnes.
2. Donner le Khi-deux d'écart à l'indépendance.

Exercice 3 : On fait une analyse en composantes principales d'un tableau de 9 individus, mesurés sur 4 variables v_1, v_2, v_3 et v_4 . On suppose que tous les individus ont le même poids. On a

$$\text{Var}(v_1) = 12,8125 \quad \text{Var}(v_2) = 10,0625 \quad \text{Var}(v_3) = 13,5694 \quad \text{et} \quad \text{Var}(v_4) = 8,9028 ;$$

les valeurs propres de la matrice de covariance:

$$15,9410 ; 10,4055 ; 0,5493 ; \dots$$

Les vecteurs propres

	[vp1]	[vp2]	[vp3]	[vp4]
[1,]	0.5151694	0.5686517	-0.1852853	-0.6139259
[2,]	0.5076129	0.3712665	0.4499844	0.6340381
[3,]	0.4922789	-0.6581534	0.4603842	-0.3354728
[4,]	0.4843461	-0.3250085	-0.7424485	0.3264871

On donne les composantes principales

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]
jean	-8.612059	1.4093727	-0.06752404	0.07158969
alai	-3.878793	0.5022279	-0.01309446	-0.07093634
anni	-3.213388	-3.4683149	0.17497150	0.01065973
moni	9.851807	-0.5995132	-0.03680819	-0.14998275
didi	6.406574	2.0465857	0.07561885	0.19044801
andr	-3.033102	4.9211080	-0.07749344	-0.13542301
pier	-1.025444	-6.3771179	0.16386970	-0.02986136
brig	1.953971	4.1995965	0.20192835	0.03907002
evel	1.550436	-2.6339447	-0.42146828	0.07443601

1. Calculer l'inertie totale
2. Donner les matrices M et D
3. Donner la matrice à diagonaliser
4. Donner la qualité de représentation de Alai sur le plan (1,2)
5. Donner la qualité globale de représentation des individus sur le plan (1,2)
6. Représenter les individus sur le plan (1,2)
7. Représenter les variables

Université FHB-UFRMI, Licence 3
Licence: Mathématiques
UE: Analyse des données

Année Académique
2016/2017

Examen d'Analyse des Données

Durée: 2h00

Analyse des données

Exercice 1

- (1) Donner les différents types de classification automatique et leur principe.
- (2) Quels sont les éléments d'entrée d'une analyse en composantes principales ?

Exercice 2 On observe $p = 2$ variables sur $n = 5$ individus uniformément pondérés. Les

	X_1	X_2
w_1	3	-2
w_2	3	2
w_3	0	-1
w_4	4	-3
w_5	0	-1

TABLE 1. Le tableau des données recueillies que l'on désignera par X .

résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

- (1) Calculez la matrice S de covariance.
- (2) Diagonalisez la matrice S .
- (3) Calculez la matrice C des composantes principales.
- (4) Donnez les corrélations entre les composantes principales et les variables initiales.
- (5) Donnez la qualité de représentation de l'individu w_1 sur le premier axe.
- (6) Donnez la contribution de l'individu w_2 à la formation du deuxième axe.
- (7) Donnez la qualité globale du premier axe.

Exercice 3 On a observé les résultats de 15 enfants de 10 ans à 6 subtest du WISC¹ (scores de 0 à 5). Les variables observées sont : CUB (Cubes de Kohs), PUZ (Assemblage d'objets), CAL (Calcul mental), MEM (Mémoire immédiate des chiffres), COM (Compréhension de phrases), VOC (Vocabulaire). Le protocole observé est le suivant (Table 2):

On traite ces données par une analyse en composantes principales (ACP). Les principaux résultats de cette ACP sont indiqués ci-dessous (Cf. Table 3, Table 4, Table 5 et Table 6) et (Cf. Figure 1 et Figure 2) :

- (1) Etude du tableau des valeurs propres
 - a. A quoi correspond la somme des valeurs propres ?
 - b. On choisit de n'étudier que les deux premiers facteurs principaux. Justifier ce choix en analysant le tableau des valeurs propres.
- (2) Etude du tableau des corrélations

¹Wechsler Intelligence Scale for Children.

	WISC	CUB	PUZ	CAL	MEM	COM	VOC
e1	5	5	4	0	1	1	
e2	4	3	3	2	2	1	
e3	2	1	2	3	2	2	
e4	5	3	5	3	4	3	
e5	4	4	3	2	3	2	
e6	2	0	1	3	1	1	
e7	3	3	4	2	4	4	
e8	1	2	1	4	3	3	
e9	0	1	0	3	1	0	
e10	2	0	1	3	1	0	
e11	1	2	1	1	0	1	
e12	4	2	4	2	1	2	
e13	3	2	3	3	2	3	
e14	1	0	0	3	2	2	
e15	2	1	1	2	3	2	

TABLE 2. Tableau des données observées.

- a. Quels sont les subtests les plus fortement corrélés entre eux ?
 - b. Comment s'organisent les signes '+' et les signes '-' dans le tableau des coefficients de corrélation. Commenter
- (3) Etude des qualités de représentation dans le premier plan principal
- a. Quel est l'individu le moins bien représenté par le premier plan principal ?
 - b. Quel est l'individu le mieux représenté ?
- (4) Etude du nuage des individus
- a. Quels sont les individus dont la contribution à la formation du premier facteur principal est supérieure à la moyenne ? Pour chacun d'eux préciser le signe de la coordonnée correspondante ;
 - b. Même question pour le deuxième facteur principal.
- (5) Etude du nuage des variables
- a. La représentation graphique des variables montre qu'elles sont toutes très bien représentées dans le plan (1,2). Justifier cette affirmation
 - b. Quelles sont les variables qui sont corrélées positivement avec le premier facteur principal ? Quelles sont celles qui sont corrélées négativement ? Comment peut-on caractériser cet axe par rapport aux variables initiales ?
 - c. Quelles sont les variables qui ont joué un rôle dominant dans la formation du deuxième axe ?

	CUB	PUZ	CAL	MEM	COM	VOC
CUB	1.0000	0.7320	0.9207	-0.4491	0.3086	0.2735
PUZ	0.7320	1.0000	0.7510	-0.6143	0.2814	0.2850
CAL	0.9207	0.7510	1.0000	-0.3685	0.4077	0.4869
MEM	-0.4491	-0.6143	-0.3685	1.0000	0.3032	0.2023
COM	0.3086	0.2814	0.4077	0.3032	1.0000	0.7819
VOC	0.2735	0.2850	0.4869	0.2023	0.7819	1.0000

TABLE 3. Les corrélations entre les variables

	Val. propre	% Total variance	Cumul %
1	3.2681	54.3020	54.3020
2	1.8372	30.0194	84.3214
3	0.4430	7.3831	91.7044
4	0.2538	4.2292	95.9337
5	0.1679	2.7990	98.7327
6	0.0400	0.6673	100.0000

TABLE 4. Les valeurs propres et statistiques associées

	coords Fact.1	coords Fact.2	Contribution Fact.1	Contribution Fact.2	Cos ² Fact.1	Cos ² Fact.2
e1	2.5616	-3.0568	13.43	33.91	0.4078	0.5807
e2	0.9661	-0.9370	1.91	3.19	0.3907	0.3676
e3	-0.6765	0.6624	0.94	1.59	0.4446	0.4263
e4	2.7969	1.4636	16.01	7.77	0.7160	0.1961
e5	1.8423	-0.1211	6.95	0.05	0.8142	0.0035
e6	-1.8891	-0.1350	7.30	0.07	0.8426	0.0043
e7	2.3396	1.5487	11.20	8.70	0.6028	0.2641
e8	-0.7275	2.2054	1.08	17.65	0.0816	0.7499
e9	-2.8400	-0.5423	16.50	1.07	0.8745	0.0319
e10	-2.1733	-0.6117	9.60	1.36	0.7433	0.0589
e11	-1.2940	-2.0373	3.43	15.06	0.2256	0.5592
e12	0.9947	-0.8181	2.02	2.43	0.3120	0.2110
e13	0.6099	0.8730	0.76	2.77	0.1949	0.3994
e14	-2.0150	0.9470	8.31	3.25	0.7548	0.1667
e15	-0.4957	0.5591	0.50	1.13	0.1151	0.1464

TABLE 5. Coordonnées, contributions et qualités de représentation des individus

	coords Fact.1	coords Fact.2	Contribution Fact.1	Contribution Fact.2	cos ² Fact.1	cos ² Fact.1&2
CUB	0.8970	-0.2018	24.69	2.22	0.8046	0.8453
PUZ	0.8652	-0.2883	22.97	4.52	0.7485	0.8316
CAL	0.9458	-0.0390	27.45	0.08	0.8945	0.8960
MEM	-0.4449	0.7861	6.08	33.64	0.1980	0.8160
COM	0.5382	0.7627	8.89	31.67	0.2897	0.8714
VOC	0.5683	0.7156	9.91	27.87	0.3229	0.8350

TABLE 6. Coordonnées, contributions et qualités de représentation des variables

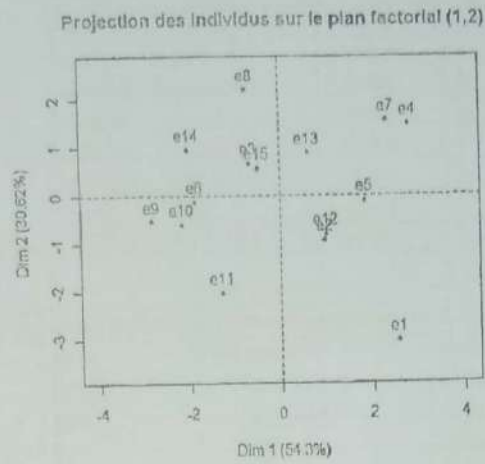


FIGURE 1. Représentation graphique des unités statistiques dans le plan factoriel (1,2).

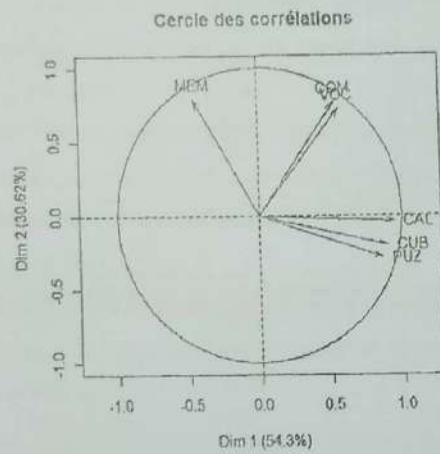


FIGURE 2. Cercle des corrélations.

Université FHB-UFRMI, Licence 3
 Licence: Mathématiques
 UE: Analyse des données

Année Académique
 2017/2018

Examen d'Analyse des Données

Durée: 1h45mn

Analyse des données

Exercice 1

- (1) Donner les différents types de classification automatique et leur principe.
- (2) Quels sont les éléments d'entrée d'une analyse en composantes principales ?

Exercice 2 On observe $p = 3$ variables sur $n = 4$ individus uniformément pondérés.

	X_1	X_2	X_3
w_1	2	3	5
w_2	4	5	3
w_3	6	1	3
w_4	4	3	1

TABLE 1. Le tableau des données recueillies que l'on désignera par X .

Les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

- (1) Donnez le tableau des données centrées-réduites ;
- (2) Déterminer la matrice variance-covariance Γ ;
- (3) Déterminez la matrice des corrélations W ;
- (4) Diagonalisez la matrice W . On note λ_1 , λ_2 et λ_3 ses valeurs propres avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ et $\lambda_2 = 1$;
- (5) Déterminez les axes factoriels F_i . Donnez le vecteur unitaire u_i de chaque axe F_i .
- (6) Vérifiez l'orthogonalité des axes factoriels.

Exercice 3 Trois tableaux de maîtres (désignés par les chiffres romains I, II, III) ont été notés par 6 spectateurs désignés par A, B, C, D, E, F. Les résultats ont été consignés dans le tableau de données R de terme général r_{ij} dont l'analyse fait l'objet des deux premières questions. Trois nouveaux spectateurs communiquent leurs notes une fois l'analyse faite ; elles sont indiquées dans le tableau de données T .

	I	II	III
A	8	1	0
B	4	6	5
C	6	8	7
D	10	4	7
E	8	2	5
F	0	3	6

TABLE 2. Tableau de données R

	I	II	III
G	8	1	3
H	1	2	1
I	4	0	0

TABLE 3. Tableau de données T

- (1) Calculer les moyennes \bar{r}_j des notes relatives à chaque tableau. En déduire la matrice X des variables centrées. Montrer que les vecteurs :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sont vecteurs propres de } S = {}^t X X \text{ relativement à deux valeurs}$$

propres λ_1 et λ_2 que l'on déterminera. En déduire la 3^{ème} valeur propre λ_3 , calculer le 3^{ème} vecteur propre u_3 .

- (2) Après avoir normé u_1 et u_2 , représenter le nuage des points individus dans le plan des deux premiers axes factoriels. Représenter les trois points tableaux.
 (3) Situer les spectateurs G, H, I , parmi les spectateurs A, \dots, F sur le graphique précédent.

- (4) On considère la famille des matrices de la forme suivante : $S(a, b, c) = \begin{pmatrix} a+b-c & c & c \\ c & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$

Montrer que $S(a, b, c)$ admet les mêmes directions propres que la matrice S précédente relativement à des valeurs propres que l'on exprimera en fonction des paramètres a, b, c . Quelles conditions doivent vérifier a, b, c pour que la matrice $S(a, b, c)$ soit définie positive ?

- (5) Reconstituer de façon approchée le tableau de notes à partir du premier facteur, puis à partir des deux premiers, puis des trois.
 (6) Montrer que l'on ne change pas les axes factoriels si l'on rajoute au tableau des notes centrées X un tableau de la forme : $Y = dM^t N$ avec ${}^t M = (-1, 0, 1, 1, 0, -1)$, ${}^t N = (1, 1, 1)$ et $d \in \mathbb{R}$. Pourquoi ? Généraliser éventuellement.

Année universitaire 2017-2018
LICENCE 3 : Examen Regression lineaire
 Session 2
 Durée : 1 heure

L'entreprise INFORMATEX se spécialise dans l'analyse de systèmes et la programmation sur ordinateur de problèmes techniques et de gestion. Elle veut utiliser la régression dans une étude sur le temps requis, par ses analystes-programmeurs, pour programmer des projets complexes. Cette étude pourrait permettre à la firme d'établir des normes quant au temps requis pour programmer certains projets et d'assurer éventuellement une meilleure planification des ressources humaines. Les données du tableau suivant représentent le temps total en heures (Y) requis pour programmer différents projets en fonction du nombre d'instructions dans chaque programme (X).

Temps total en heures	40	55	62	58	82	94	120
Nombre d'instructions	60	82	100	142	190	220	285
Temps total en heures	134	128	140	152	174	167	218
Nombre d'instructions	354	400	425	440	500	530	640

$$\sum_{i=1}^{14} X_i = 4368, \sum_{i=1}^{14} Y_i = 1624, \sum_{i=1}^{14} X_i Y_i = 631852, \sum_{i=1}^{14} X_i^2 = 1806254, \sum_{i=1}^{14} Y_i^2 = 224526.$$

1. Si nous voulons expliquer les fluctuations dans le temps requis pour programmer les projets quelle variable devons-nous identifier comme variable dépendante ? Comme variable explicative ?
2. Calculer puis interpréter le coefficient de corrélation linéaire entre le temps totale en heures et le nombre d'instructions.
3. Ecrire le modèle de régression linéaire. Préciser les hypothèses.
4. Quelle méthode d'ajustement linéaire devons-nous utiliser pour obtenir les estimateurs des coefficients de la droite de régression ?
5. Compléter. puis interpréter

Call:

`lm(formula = y ~ x)`

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-12.839	-7.139	2.177	5.613	11.621

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
(Intercept)	?	4.44100	6.29	4.00e-05	***
x	?	0.01236	22.83	2.96e-11	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 8.233 on 12 degrees of freedom
 Multiple R-squared: ?? , Adjusted R-squared: 0.9756
 F-statistic: 521.2 on 1 and 12 DF, p-value: 2.961e-11

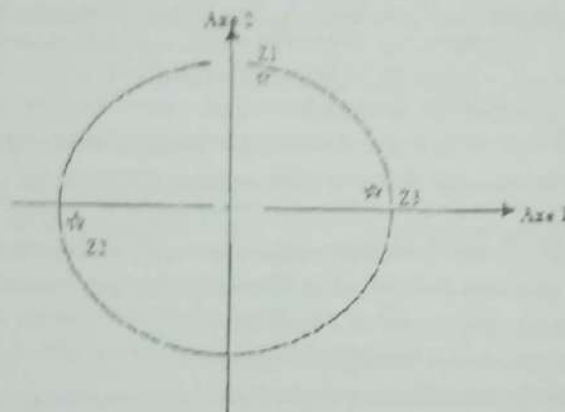
6. Quelle est l'équation de la droite des moindres carrés ?
7. Donner une interprétation des graphes des résidus ci-dessous

UFHB - UFRM1
Année 2018-2019
Analyse factorielle et clustering (2H)

Exercice 1 (QCM): Bonne réponse = + 0.4 pt, Pas de réponse = 0 pt, Mauvaise réponse = - 0.2 pt

Répondre par Vrai ou Faux - Chaque affirmation peut être Vraie ou Fausse. Elle est considérée comme vraie si elle est TOUJOURS vraie. Par contre si l'affirmation est absurde ou si elle n'a pas de sens, elle est considérée comme fausse. Il peut y avoir plusieurs affirmations vraies ainsi que plusieurs affirmations fausses dans chaque groupe d'affirmations.

1. A l'aide de la représentation graphique suivante :



Quelles sont les affirmations justes ?

- A- Les variables Z1 et Z3 contribuent dans des proportions équivalentes à l'apparition de l'axe 1.
- B- Les variables Z2 et Z3 contribuent dans des proportions équivalentes à l'apparition de l'axe 1
- C- La variable Z1 contribue quasi-exclusivement à l'apparition de l'axe 2
- D- Les variables Z1 et Z3 sont très corrélées négativement entre elles
- E- Les variables Z2 et Z3 sont très corrélées négativement entre elles
- F- Toutes les variables sont correctement représentées dans le repère
- G- La variable Z1 n'est pas correctement représentée sur l'axe 1

2. L'AFC est une méthode que l'on peut utiliser :

- A- Tout le temps, que les variables soient quantitatives ou qualitatives
- B- Uniquement lorsque les variables sont qualitatives
- C- Seulement lorsque les variables sont quantitatives
- D- Uniquement lorsque les variables sont qualitatives et au nombre 2

3. L'ACP est une méthode que l'on peut utiliser :

- A- tout le temps, que les variables soient quantitatives ou qualitatives
- B- uniquement lorsque les variables sont qualitatives
- C- seulement lorsque les variables sont quantitatives

4. La classification hiérarchique a pour objet de regrouper :

- A- Les observations en k groupes simultanément
- B- Les observations les plus semblables séquentiellement
- C- Les observations les plus proches des centres de gravités des groupes

5) *Analyse en Composantes Principales (ACP) normée d'un tableau de données X à n individus et p variables :*

- a) la représentation graphique des variables est un cercle de corrélation.
- b) la somme des valeurs propres (l'information à résumer) est égale à p.
- c) les coordonnées des points variables sur le plan factoriel sont différents des corrélations (variables / facteurs).
- d) les variables à synthétiser ont des unités différentes ou des variances très différentes.

6) *Analyse Factorielle des Correspondances (AFC) - Test d'indépendance du chi-deux sur une table de contingence croisant deux variables qualitatives respectivement à p et à q modalités :*

- a) l'AFC consiste à localiser les éventuelles liaisons entre les modalités des deux variables.
- b) le nombre de composantes principales de l'AFC est égal à $\min(p; q)$.
- c) l'hypothèse nulle du test est H_0 : les deux variables sont indépendantes.
- d) plus la p-value est petite plus les variables sont indépendantes.

7) *Analyse des correspondances Multiples (ACM) de p variables qualitatives totalisant q modalités :*

- a) les axes factoriels significatifs ont des valeurs propres supérieures à 1.
- b) la représentation graphique des variables est un cercle de corrélation.
- c) le tableau de Burt est la juxtaposition de $p(p + 1) / 2$ tables de contingences différentes.
- d) les facteurs ou composantes principales de l'ACM sont des variables continues.

UFHB - UFRMI
Année 2018-2019
Analyse factorielle et clustering (2H)

Exercice 1: (20 questions - 8 points : Bonne réponse = + 0.4 pt, Pas de réponse = 0 pt, Mauvaise réponse = - 0.2 pt)

Répondre par Vrai ou Faux - Chaque affirmation peut être Vraie ou Fausse. Elle est considérée comme vraie si elle est TOUJOURS vraie. Par contre si l'affirmation est absurde ou si elle n'a pas de sens, elle est considérée comme fausse. Il peut y avoir plusieurs affirmations vraies ainsi que plusieurs affirmations fausses dans chaque groupe d'affirmations.

1) Analyse en Composantes Principales (ACP) normée d'un tableau de données X à n individus et p variables :

- la représentation graphique des variables est un cercle de corrélation.
- la somme des valeurs propres (l'information à résumer) est égale à p .
- les coordonnées des points variables sur le plan factoriel sont différents des corrélations (variables / facteurs).
- les variables à synthétiser ont des unités différentes ou des variances très différentes.

2) Analyse Factorielle des Correspondances (AFC) - Test d'indépendance du chi-deux sur une table de contingence croisant deux variables qualitatives respectivement à p et à q modalités :

- l'AFC consiste à localiser les éventuelles liaisons entre les modalités des deux variables.
- le nombre de composantes principales de l'AFC est égal à $\min(p; q)$.
- l'hypothèse nulle du test est H_0 : les deux variables sont indépendantes.
- plus la p -value est petite plus les variables sont indépendantes.

3) Analyse des correspondances Multiples (ACM) de p variables qualitatives totalisant q modalités :

- les axes factoriels significatifs ont des valeurs propres supérieures à 1.
- la représentation graphique des variables est un cercle de corrélation.
- le tableau de Burt est la juxtaposition de $p(p+1)/2$ tables de contingences différentes.
- les facteurs ou composantes principales de l'ACM sont des variables continues.

4) Analyse Factorielle Discriminante (AFD) à p variables explicatives et une variable à expliquer à q modalités ($p > q$)

- l'AFD consiste à maximiser l'inertie ou l'information Intra-classes.
- le nombre maximum de facteurs discriminants est égal à $q - 1$.
- l'AFD est une technique de classification non supervisée.
- cette méthode permet d'identifier les variables qui expliquent le mieux l'appartenance d'un individu à une classe.

5) Classifications : Nuées dynamiques et Classification Hiérarchique Ascendante (CHA)

- dans le cas d'une CHA, le nombre de classes doit être fixé par l'utilisateur.
- deux classes d'individus d'une même classification peuvent avoir la même caractérisation (profil & anti-profil).
- ces techniques sont des classifications dites supervisées.
- elles consistent à faire des regroupements d'individus qui se ressemblent selon leurs variables de description.

Exercice 2 (12pt)

X	1	2	9	12	20
---	---	---	---	----	----

1. (7 points) K-Means

(a) Appliquez l'algorithme des K-means avec les valeurs de k et les points de départ suivants :

i. $k = 2, \mu_1 = 1, \mu_2 = 20$.

ii. $k = 3, \mu_1 = 1, \mu_2 = 12, \mu_3 = 20$. iii. $k = 4, \mu_1 = 1, \mu_2 = 9, \mu_3 = 12, \mu_4 = 20$.

(b) On aimerait maintenant comparer la qualité de ces regroupements. Pour cela, on recommence par regarder l'inertie intra-cluster.

i. Calculer cette valeur pour les 3 regroupements précédents.

ii. En utilisant ce critère, quel serait le meilleur regroupement possible? est-ce que cela vous paraît réaliste?

(c) S'inspirant du critère BIC, quelqu'un propose de rajouter le terme suivant au critère précédent : $+2kH \log H$ (où N est le nombre de données).

i. Expliquer l'utilité de ce terme

ii. Calculer la valeur du nouveau critère pour vos 3 regroupements. Qu'en concluez-vous

2. (6 points) Classification Hiérarchique

(a) Classification Hiérarchique Ascendante

i. Appliquer l'algorithme de classification hiérarchique ascendante en utilisant le saut minimal et tracer le dendrogramme correspondant.

ii. Idem avec le saut maximal.

(b) Classification Hiérarchique Descendante

Soit un algorithme de classification hiérarchique descendante qui recherche à chaque itération la meilleure façon de couper un ensemble de points en deux parties

i. Détailler la première itération de cet algorithme (en utilisant un saut minimal)

ii. Expliquer l'utilité de cet algorithme.

UFR MI

Année 2014 - 2015

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

COMPOSITION - Novembre 2015 Durée : 2 heures

Exercice 1 : Questions de cours

- Quel est l'objectif de la planification et quels sont ses éléments de base ?
- Définissez les notions de Marge Totale et Marge Libre.
- Quelles sont les principales phases du processus de gestion de projet ?
- Quels sont les différents éléments qui permettent d'effectuer l'analyse du contour d'un projet ?
- Comment peut-on définir la notion de « Gestion de projet » ?

Exercice 2 : Planification et PERT

Enoncé : Le BNETD (Bureau National d'Etudes Techniques et de Développement) a reçu la maîtrise d'œuvre de la construction d'une piscine olympique sur un campus universitaire. Le tableau des antériorités des tâches est le suivant :

Codes	Tâches	Antériorités	Durée (en jours)
A	Excavation	-	5
B	Fondation	A	2
C	Pose de canalisations	B	4
D	Essais en pression	C, G	8
E	Etanchéité	D	9
F	Mise en place de la station d'épuration	A	6
G	Mise en place du chauffage	F	5
H	Raccordement électrique	G	4
I	Sonorisation sous-marine	H	5
J	Dallage	E, I	6
K	Construction des vestiaires	J	8
L	Construction du solarium	J	2
M	Mise en eau	K, L	3

NB : $T_0 = 1$

- 1- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

- 2- Quelles sont les tâches critiques du projet ?
- 3- Les travaux débutent le 1^{er} avril. Chaque mois comporte 20 jours ouvrables. Déterminer si l'inauguration peut avoir lieu comme prévu le 15 juin.
- 4- Lors de la pose des canalisations, on apprend que, suite à un incident technique, cette opération durera 6 jours de plus que prévu. Cela aura-t-il une influence sur le délai prévu ?
- 5- La direction s'inquiète quant au respect des délais. Elle propose de se passer de la sonorisation sous-marine. Cela vous semble-t-il judicieux ? Justifiez votre réponse.
- 6- Affectation des ressources. On considère que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne.
- A- Combien de personnes minimum il faut pour le réaliser ?
- B- Justifier cela à travers le tableau joint en annexe. (le tableau doit être rendu avec votre copie)

Bonne Chance à tous

UFR MI

Année 2015 - 2016

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

COMPOSITION - Novembre 2016 Durée : 2 heures

Exercice 1 : Questions de cours

1. Comment peut-on définir la notion de « Gestion de projet »
2. Quels sont les différents éléments qui permettent d'effectuer l'analyse du contour d'un projet ?
3. Selon combien de critères peut-on découper un projet ? citez les et donner 2 avantages par critères.
4. Quelles sont les critères ou paramètres qui permettent de déterminer la durée d'une tâche ?
5. Quel est l'objectif de la planification et quels sont ses éléments de base

Exercice 2 : Planification et PERT

Enoncé : Vous êtes responsable de production de l'entreprise SANIA-CI dans l'industrie Agro-alimentaire.

Vous êtes chargé de mettre en place le planning de réalisation d'un nouveau produit et de gérer le suivi de ce projet.

Le tableau ci-dessous résume les différentes tâches à réaliser pour parvenir à la fin du projet. Les lettres représentent les différentes tâches du projet.

Tâche	Prédécesseur	Durée
A	-	4
B	A	6
C	-	10
D	-	19
E	C	17
F	C	5
G	D, F	6
H	B, G	8
I	H	6
J	E, H	2

NB : a- $T_0 = 1$

- b- Il existe une contrainte de type Fin Début de 4 jours entre B et H,
c- Il existe une contrainte de type Fin Début de 5 jours entre E et J

- 1- Quelles sont les tâches n'ayant pas d'antériorité et qu'est ce que cela implique ?
- 2- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

- 3- Quelles sont les tâches critiques du projet ?
- 4- Si la valeur de la contrainte entre E et J avait été négative ($FD = - 5$), qu'est ce que cela aurait signifié ?
- 5- En choisissant une tâche ayant une marge libre différente de la marge totale :
 - A- Expliquer précisément les implications sur le projet d'un retard supérieur à la marge libre survenant sur la tâche choisie.
 - B- Expliquer précisément les implications sur le projet d'un retard supérieur à la marge totale survenant sur la tâche choisie
- 6- Affectation des ressources. On considère que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne.
 - A- Quelle est la durée du projet ?
 - B- Combien de personne minimum il faut pour le réaliser ? Justifier cela à travers le tableau joint en annexe. (le tableau doit être rendu avec votre copie)

Bonne Chance à tous

UFR MI

263 COMMO

Année 2015 - 2016

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

COMPOSITION - Décembre 2016 Durée : 2 heures

Exercice 1 : (10 pts)

Enoncé : Dans le cadre de la réforme hospitalière, les conseils d'administration de 3 centres hospitaliers voisins ont élaboré en commun un plan de rationalisation de leurs activités. Tout en maintenant les 3 sites existants, ils ont décidé de fusionner en une seule entité appelée HOPITAL ABIDJAN. La réorganisation des unités de soins et de leur gestion implique l'interconnexion des réseaux informatiques des 3 sites. Deux des 3 hôpitaux, désignés H1 et H2, sont déjà interconnectés ; vous participez à l'étude et à la mise en place de la connexion du troisième hôpital, désigné H3.

L'évolution du réseau local du site H3 a été planifiée. Les tâches nécessaires à la réalisation de ce projet, leurs durées ainsi que les conditions d'antériorité qui les relient figurent dans le tableau ci-dessous :

Code de la tâche	Désignation de la tâche	Durée en jours	Tâches antérieures
A	Définition des contraintes du réseau	2	B, E
B	Mise en place du projet	6	-
C	Mise à jour des droits d'accès	2	F
D	Achat des composants matériels	8	J
E	Définition du budget	3	-
F	Mise à jour des groupes utilisateurs	2	K
G	Formation de l'administrateur réseau	5	J
H	Câblage	10	J
I	Commande de Novell Netware 5	4	D
J	Choix des fournisseurs et des intervenants	5	A
K	Mise à jour logicielle des postes clients	1	M
L	Mise à jour matérielle des postes	2	D
M	Installation Novell Netware 5	2	L, I, H, G

NB : $T_0 = 1$

- 1- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

- 2- Quelles sont les tâches critiques du projet ?
- 3- Indiquer la durée minimale de réalisation du projet. Rappelons que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne
- 4- Combien de personne minimum il faut pour le réaliser (1 tâche étant réalisée par 1 seule personne) ? Justifiez votre réponse. (annexe 1)
- 5- Le responsable redoute maintenant des difficultés techniques sur la mise à jour matérielle des postes, difficultés qui porteraient de 2 à 8 jours la durée de la tâche L.
- a) Indiquer l'incidence sur la durée globale du projet (nombre de jours en plus éventuellement) d'allongement de la durée de la tâche L.
- b) Dans ces conditions, le nombre total de personne minimum pour réaliser le projet changera-t-il ? Justifiez votre réponse.

Exercice 2 : (10 pts)

Énoncé : Dans ce projet, volontairement simplifié, nous analyserons l'ensemble des tâches d'industrialisation d'un article, nécessitant une étude de gamme et la conception d'un montage.

Pour étudier le dossier et établir la gamme de fabrication, le technicien en méthodes (Alain) a besoin de deux jours. Ensuite, il fournira au dessinateur (Bernard) le schéma de principe du montage, afin que celui-ci le dessine (durée sept jours). Une fois défini, le montage sera transmis à l'atelier d'outillage (Cédric) pour la réalisation (durée huit jours).

En parallèle avec le dessinateur, le secrétariat du service achats (Delphine) doit passer la commande pour l'outillage (une journée). Le délai de livraison de l'outillage est de trois jours.

Eric, du service Magasin, s'occupera de la réception et du contrôle de la livraison (une journée).

A- (sans tenir compte de la disponibilité des ressources)

A1 - Compléter le tableau :

Nom de la tâche	Durée (en jour)	Prédécesseurs
A-Etudier le dossier		
B-Concevoir le montage		
C-Réaliser le montage		
D-Commander l'outillage		
E-Recevoir l'outillage		

A2 - Etablir le tableau des marges :

Nom de la tâche	Marge totale (jours)	Marge libre (jours)	Tâche critique (oui/non) ?
A Etudier le dossier			
B Concevoir le montage			
C Réaliser le montage			
D Commander l'outillage			
E Recevoir l'outillage			

B- On tient compte maintenant de la disponibilité des ressources

B1- Compléter le tableau suivant :

Nom de la tâche	Ressources	Durée (en jour)
A Etudier le dossier	Alain [100 %]	
B Concevoir le montage	Bernard [100 %]	
C Réaliser le montage	Cédric [50 %]	
D Commander l'outillage	Delphine [50 %]	
E Recevoir l'outillage	Eric [100 %]	

B2 - Etablir le tableau des marges :

Nom de la tâche	Marge totale (jours)	Marge libre (jours)	Tâche critique (oui/non)?
A Etudier le dossier			
B Concevoir le montage			
C Réaliser le montage			
D Commander l'outillage			
E Recevoir l'outillage			

Bonne Chance à tous

UFR MI

265 Corro

Année 2016 - 2017

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

Devoir - Durée : 2 h 00 min

Exercice 1 : Enoncé : Montage d'un film : Un producteur de cinéma est confronté au problème du planning de son prochain film et vous soumet les tâches qui doivent être effectuées :

Code tâche	Désignation de la tâche	Durée (jours)	Tâches antérieures
A	Ecriture du scénario	30	
B	Choix et recrutement des comédiens	12	ne peut commencer que 15 jours après le début de A
C	Choix du lieu du tournage	8	ne peut commencer que 20 jours après le début de A
D	Découpage technique	4	après A et C
E	Préparation des décors	7	après C et D
F	Tournage des extérieurs	10	après A, B, C et D
G	Tournage des intérieurs	12	après D, E et F
H	Synchronisation	3	après F et G
I	Montage	14	après H
J	Accompagnement sonore	7	ne peut commencer que 3 jours après le début de I
K	Mixage	6	après I et J
L	Tirage de la copie zéro	1	Après K

NB : $T_0 = 1$

- 1- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

- 2- Quelles sont les tâches critiques du projet ?
- 3- Indiquer la durée minimale de réalisation du projet. Rappelons que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne
- 4- Combien de personne minimum il faut pour le réaliser (1 tâche étant réalisée par 1 seule personne) ?

Exercice 2 : Planification et PERT

Enoncé : Le BNETD (Bureau National d'Etudes Techniques et de Développement) a reçu la maîtrise d'œuvre de la construction d'une piscine olympique sur un campus universitaire. Le tableau des antériorités des tâches est le suivant :

Codes	Tâches	Antériorités	Durée (en jours)
A	Excavation	-	5
B	Fondation	A	2
C	Pose de canalisations	B	4
D	Essais en pression	C, G	8
E	Etanchéité	D	9
F	Mise en place de la station d'épuration	A	6
G	Mise en place du chauffage	F	5
H	Raccordement électrique	G	4
I	Sonorisation sous- marine	H	5
J	Dallage	E, I	6
K	Construction des vestiaires	J	8
L	Construction du solarium	J	2
M	Mise en eau	K, L	3

NB : $T_0 = 1$

- 1- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

- 2- Quelles sont les tâches critiques du projet ?
- 3- Les travaux débutent le 1^{er} avril. Chaque mois comporte 20 jours ouvrables. Déterminer si l'inauguration peut avoir lieu comme prévu le 15 juin.
- 4- Lors de la pose des canalisations, on apprend que, suite à un incident technique, cette opération durera 6 jours de plus que prévu. Cela aura-t-il une influence sur le délai prévu ?
- 5- La direction s'inquiète quant au respect des délais. Elle propose de se passer de la sonorisation sous-marine. Cela vous semble-t-il judicieux ? Justifiez votre réponse.

Bonne Chance à tous

UFR MI

Année 2016 - 2017

269 Corro

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

Devoir - 2^{ème} session - Durée : 1 h 45 min

Exercice 1 : Questions de cours (5 pts)

- Quels sont les différents éléments qui permettent d'effectuer l'analyse du contour d'un projet ?
- Définissez les notions de Marge Totale et Marge Libre
- Le processus de planification est généralement basé sur combien d'étapes ? Citez les dans l'ordre.
- Quelles sont les critères ou paramètres qui permettent de déterminer la durée d'une tâche ?
- Quel est l'objectif de la planification et quels sont ses éléments de base

Exercice 2 : Énoncé : Dans le cadre de la réforme hospitalière, les conseils d'administration de 3 centres hospitaliers voisins ont élaboré en commun un plan de rationalisation de leurs activités. Tout en maintenant les 3 sites existants, ils ont décidé de fusionner en une seule entité appelée HOPITAL ABIDJAN. La réorganisation des unités de soins et de leur gestion implique l'interconnexion des réseaux informatiques des 3 sites. Deux des 3 hôpitaux, désignés H1 et H2, sont déjà interconnectés ; vous participez à l'étude et à la mise en place de la connexion du troisième hôpital, désigné H3.

L'évolution du réseau local du site H3 a été planifiée. Les tâches nécessaires à la réalisation de ce projet, leurs durées ainsi que les conditions d'antériorité qui les relient figurent dans le tableau ci-dessous :

Code de la tâche	Désignation de la tâche	Durée en jours	Tâches antérieures
A	Définition des contraintes du réseau	2	B, E
B	Mise en place du projet	6	-
C	Mise à jour des droits d'accès	2	F
D	Achat des composants matériels	8	J
E	Définition du budget	3	-

F	Mise à jour des groupes utilisateurs	2	K
G	Formation de l'administrateur réseau	5	J
H	Câblage	10	J
I	Commande de Novell Netware 5	4	D
J	Choix des fournisseurs et des intervenants	5	A
K	Mise à jour logicielle des postes clients	1	M
L	Mise à jour matérielle des postes	2	D
M	Installation Novell Netware 5	2	L, I, H, G

NB : $T_0 = 1$

- 1- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

- 2- Quelles sont les tâches critiques du projet ?
- 3- Indiquer la durée minimale de réalisation du projet. Rappelons que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne
- 4- Combien de personne minimum il faut pour le réaliser (1 tâche étant réalisée par 1 seule personne) ? Justifiez votre réponse.
- 5- Le responsable redoute maintenant des difficultés techniques sur la mise à jour matérielle des postes, difficultés qui porteraient de 2 à 8 jours la durée de la tâche L.
- a) Indiquer l'incidence sur la durée globale du projet (nombre de jours en plus éventuellement) d'allongement de la durée de la tâche L.
- b) Dans ces conditions, le nombre total de personne minimum pour réaliser le projet changera-t-il ? Justifiez votre réponse.

UFR MI

Année 2017 - 2018

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

COMPOSITION - Janvier 2019 Durée : 2 heures

Exercice 1 : Questions de cours

1. Comment peut-on définir la notion de « Gestion de projet »
2. Quels sont les différents éléments qui permettent d'effectuer l'analyse du contour d'un projet ?
3. Selon combien de critères peut-on découper un projet ? citez les et donner 2 avantages par critères.
4. Quelles sont les critères ou paramètres qui permettent de déterminer la durée d'une tâche ?
5. Quel est l'objectif de la planification et quels sont ses éléments de base

Exercice 2 : Planification et PERT

Énoncé : Vous êtes responsable de production de l'entreprise SANIA-CI dans l'industrie Agro-alimentaire.

Vous êtes chargé de mettre en place le planning de réalisation d'un nouveau produit et de gérer le suivi de ce projet.

Le tableau ci-dessous résume les différentes tâches à réaliser pour parvenir à la fin du projet. Les lettres représentent les différentes tâches du projet.

Tâche	Prédécesseur	Durée
A	-	4
B	A	6
C	-	10
D	-	19
E	C	17
F	C	5
G	D, F	6
H	B, G	8
I	H	6
J	E, H	2

NB : a- $T_0 = 1$

b- Il existe une contrainte de type Fin Début de 4 jours entre B et H.

c- Il existe une contrainte de type Fin Début de 5 jours entre E et J

- 1- Quelles sont les tâches n'ayant pas d'antériorité et qu'est ce que cela implique ?
- 2- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

- 3- Quelles sont les tâches critiques du projet ?
- 4- Si la valeur de la contrainte entre E et J avait été négative ($FD = -5$), qu'est ce que cela aurait signifié ?
- 5- En choisissant une tâche ayant une marge libre différente de la marge totale
 - A- Expliquer précisément les implications sur le projet d'un retard supérieur à la marge libre survenant sur la tâche choisie
 - B- Expliquer précisément les implications sur le projet d'un retard supérieur à la marge totale survenant sur la tâche choisie
- 6- Affectation des ressources: On considère que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne
 - A- Quelle est la durée du projet ?
 - B- Combien de personne minimum il faut pour le réaliser ? Justifier cela à travers le tableau joint en annexe. (le tableau doit être rendu avec votre copie)

Exercice 3 : QCM MS PROJECT

Donner la ou les réponses justes par question

(0.5 Point par réponse juste et - 0.5 point par réponse fausse)

<p>Q1 : Ordonner des tâches consiste à</p> <ol style="list-style-type: none"> a) Sélectionner et supprimer les tâches b) Trier et réaliser des tâches c) Lister et classer des tâches 	<p>Q2 : Microsoft Project est 1 application de</p> <ol style="list-style-type: none"> a) Gestion de groupes b) Gestion de Projets c) Gestion de tâches
<p>Q3 : Project visualise les données sous forme</p> <ol style="list-style-type: none"> a) D'1 diagramme de PARETO b) D'1 diagramme de GANTT c) D'1 diagramme de BODE 	<p>Q4 : MS Projet permet de</p> <ol style="list-style-type: none"> a) Déterminer si les objectifs sont atteints b) Suivre et communiquer l'avancement du projet c) Affecter les ressources aux tâches
<p>Q5 : Le réseau PERT est 1 autre possibilité de visualiser l'organisation des tâches</p> <ol style="list-style-type: none"> a) Vrai b) Faux c) Je ne sais pas 	<p>Q6 : Le chemin critique peut être défini comme le chemin</p> <ol style="list-style-type: none"> a) Le plus court qui permet d'aboutir au résultat b) Le plus long qui permet d'aboutir au résultat c) Moyen qui permet d'aboutir au résultat

UFR MI

Année 2017 - 2018

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

COMPOSITION - Mars 2019 Durée : 2 heures

Exercice 1 : Questions de cours

- Quel est l'objectif de la planification et quels sont ses éléments de base ?
- Définissez les notions de Marge Totale et Marge Libre.
- Quelles sont les principales phases du processus de gestion de projet ?
- Quels sont les différents éléments qui permettent d'effectuer l'analyse du contour d'un projet ?
- Comment peut-on définir la notion de « Gestion de projet »

Exercice 2 : Planification et PERT

Enoncé : Le BNETD (Bureau National d'Etudes Techniques et de Développement) a reçu la maîtrise d'œuvre de la construction d'une piscine olympique sur un campus universitaire. Le tableau des antériorités des tâches est le suivant :

Codes	Tâches	Antériorités	Durée (en jours)
A	Excavation	-	5
B	Fondation	A	2
C	Pose de canalisations	B	4
D	Essais en pression	C, G	8
E	Etanchéité	D	9
F	Mise en place de la station d'épuration	A	6
G	Mise en place du chauffage	F	5
H	Raccordement électrique	G	4
I	Sonorisation sous-marine	H	5
J	Dallage	E, I	6
K	Construction des vestiaires	J	8
L	Construction du solarium	J	2
M	Mise en eau	K, L	3

NB : $T_0 = 1$

- 1- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

- 2- Quelles sont les tâches critiques du projet ?
- 3- Les travaux débutent le 1^{er} avril. Chaque mois comporte 20 jours ouvrables. Déterminer si l'inauguration peut avoir lieu comme prévu le 15 juin.
- 4- Lors de la pose des canalisations, on apprend que, suite à un incident technique, cette opération durera 6 jours de plus que prévu. Cela aura-t-il une influence sur le délai prévu ? Justifiez votre réponse.
- 5- La direction s'inquiète quant au respect des délais. Elle propose de se passer de la sonorisation sous-marine. Cela vous semble-t-il judicieux ? Justifiez votre réponse.
- 6- Affectation des ressources. On considère que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne.
- A- Combien de personnes minimum il faut pour le réaliser ?
- B- Justifier cela à travers le tableau joint en annexe. (le tableau doit être rendu avec votre copie)

Exercice 3 : QCM MS PROJECT

Donner la ou les réponses justes par question

(0.5 Point par réponse juste et - 0.5 point par réponse fausse)

<p>Q1 : Microsoft Project gère</p> <p>a) Des tâches</p> <p>b) Des Evénements</p> <p>c) Des opérations</p>	<p>Q2 : Date au plus tôt</p> <p>a) La tâche ne peut être réalisée avant cette date</p> <p>b) La tâche peut être réalisée avant cette date</p> <p>c) La date de fin de la tâche n'a pas d'importance</p>
<p>Q3 : Microsoft Project gère</p> <p>a) Les dates</p> <p>b) Les entreprises</p> <p>c) Les antériorités</p>	<p>Q4 : Les 2 grandes phases d'un projet sont</p> <p>a) Stratégie - Planification</p> <p>b) Démarrage - Livraison</p> <p>c) Prévision - Pilotage</p>
<p>Q5 : Une tâche qui doit être réalisée avant une autre tâche est appelée</p> <p>a) Une postérité</p> <p>b) Une ancienneté</p> <p>c) Une antériorité</p>	<p>Q6 : Sous quelle forme se présente le diagramme de PERT</p> <p>a) Diagramme de flux</p> <p>b) Diagramme statistique</p> <p>c) Diagramme en barres</p>

Année 2018 - 2019 273 Corro

GESTION DE PROJET - L3 Math/Info

COMPOSITION - Janvier 2020 Durée : 2 heures

Exercice 1 : Questions de cours

- Quels sont les différents éléments qui permettent d'effectuer l'analyse du contour d'un projet ?
- Définissez les notions de Marge Totale et Marge Libre
- Le processus de planification est généralement basé sur combien d'étapes ? Citez les dans l'ordre.
- Quelles sont les critères ou paramètres qui permettent de déterminer la durée d'une tâche ?
- Quel est l'objectif de la planification et quels sont ses éléments de base

Exercice 2 : Énoncé : Considérons les différentes tâches à effectuer pour construire un bâtiment. Elles sont reprises ci-dessous :

Code de la tâche	Désignation de la tâche	Durée en jours	Tâches antérieures
A	Fondations	6	
B	Murs	10	A
C	plomberie intérieure	5	B
D	Electricité	7	B
E	Toit	6	B
F	plomberie extérieure	4	E
G	Menuiserie	8	C, D
H	Sols	4	G
I	peinture intérieure	5	G
J	finitions intérieures	6	H, I
K	peinture extérieure	9	F
L	finitions extérieures	2	K

NB : $T_0 = 1$

- 1- Tracez le diagramme de PERT. Mettez en évidence les dates au plus tôt et au plus tard ainsi que les marges libre et totale de chaque tâche. Chaque tâche sera représentée sur le diagramme selon le format ci-dessous

Tâche	
Début + tôt	Fin + tôt
Début + tard	Fin + tard
Marge libre	Marge totale

- 2- Quelles sont les tâches critiques du projet ?
- 3- Indiquer la durée minimale de réalisation du projet. Rappelons que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne.
- 4- Combien de personnes minimum il faut pour le réaliser (1 tâche étant réalisée par 1 seule personne) ? Justifiez cela à travers le tableau joint en annexe. (le tableau doit être rendu avec votre copie).
- 5- Le responsable du projet indique que les tâches I (peinture intérieure) et X (peinture extérieure) doivent être réalisées par le même ouvrier.
- Comment allez-vous résoudre cela ?
 - La date de fin des travaux est-elle affectée ? Justifiez votre réponse.
 - Dans ces conditions, le nombre total de personnes minimum pour réaliser le projet changera-t-il ? Justifiez votre réponse.

Bonne Chance

NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen de Techniques de Recherche Documentaire (1 h 15 mn)
(Deuxième Session)

Exercice 1

- 1) Qu'est ce qu'un *Thésaurus*?
- 2) Définir les termes documentaires suivants:
 - a) *Bibliographie critique*,
 - b) *Biobibliographie commerciale*.

Exercice 2

L'index d'un livre est

- a) une liste alphabétique de termes qui permet de retrouver une information.
- b) une liste de termes employés dans l'ouvrage en question
- c) une conclusion
- d) une liste d'abréviations

Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

Exercice 3

Dans un site web un lien hypertexte permet

- a) de circuler d'une page web à l'autre
- b) d'ouvrir une page web autre que la page d'accueil
- c) de visualiser une image
- e) de se diriger vers un autre site

Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

Exercice 4

- 1) Décrire le principe et le fonctionnement de la classification Dewey.
- 2) Quel est l'indice correspondant au domaine Sciences dans la division Dewey? Donner la couleur correspondante.
- 3) On considère les cotes suivantes (relatives à la classification Dewey):

a=555.22 GEP
b=555.22 GAP
c=555.01 GAP
d= 555.008 GEP

Classer ces cotes de la plus petite à la plus grande (ordre croissant).

NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen de Techniques de Recherche Documentaire (1 heure)
(Deuxième Session)

Exercice 1

- 1) Quelles sont les différences essentielles entre un livre et un périodique ?
- 2) Définir les termes documentaires suivants: *Lexique*, *Troncature*.

Exercice 2

- 1) L'index d'un livre est
 - a) une liste alphabétique de termes qui permet de retrouver une information.
 - b) une liste de termes employés dans l'ouvrage en question
 - c) une conclusion
 - d) une liste d'abréviations

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

- 2) Pour repérer les informations utiles dans un ouvrage, je me sers
 - a) De l'éditeur
 - b) De la table des matières
 - c) De la date d'édition
 - d) De l'index

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

- 3) Vrai ou Faux. (Justifier les réponses!)

- a) Si on cherche dans une base de données, les références trouvées sont souvent plus précises que celles retrouvées dans un index imprimé.
- b) Un index est l'entité qui décrit une source d'information spécifique telle qu'un livre.

Exercice 3

- 1) Pour vérifier la pertinence de l'information trouvée dans un livre, par rapport au sujet traité
 - a) Je lis les résumés d'ouvrage sur la 4ème de couverture
 - b) Je lis la préface
 - c) Je vérifie si le livre est en magasin

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

- 2) Une bibliographie
 - a) Retrace la vie d'un auteur
 - b) Sélectionne les extraits les plus importants de la Bible
 - c) Liste des références de documents

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

- 3) Quel est, en général, l'opérateur booléen par défaut dans les moteurs de recherche (recherche simple). Ecrire une requête permettant de rechercher simplement, dans le moteur GOOGLE, seulement les fichiers de type Word contenant exactement la phrase suivante: Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique.

Université Félix Houphouët Boigny de Cote d'Ivoire - UFR-MI - Licence 3 - 2016-2017

NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen de Techniques de Recherche Documentaire (1 h 10 mn)
(1-ère Session)

Exercice 1

- 1) Qu'est ce qu'un *document secondaire*?
- 2) Quelles sont les différences essentielles entre un livre et un périodique ?
- 3) Définir les termes documentaires suivants: *Littérature grise*, *le bruit (documentaire)*, *la cote (d'un livre)*, *Troncature*.

Exercice 2

- 1) L'index d'un livre est
 - a) une liste alphabétique de termes qui permet de retrouver une information.
 - b) une liste de termes employés dans l'ouvrage en question
 - c) une conclusion
 - d) une liste d'abréviations

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

- 2) Pour repérer les informations utiles dans un ouvrage, je me sers
 - a) De l'éditeur
 - b) De la table des matières
 - c) De la date d'édition
 - d) De l'index

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

- 3) Vrai ou Faux. (Justifier les réponses!)
 - a) Si on cherche dans une base de données, les références trouvées sont souvent plus précises que celles retrouvées dans un index imprimé.
 - b) Un index est l'entité qui décrit une source d'information spécifique telle qu'un livre.

Exercice 3

- 1) Pour vérifier la pertinence de l'information trouvée dans un livre, par rapport au sujet traité
 - a) Je lis les résumés d'ouvrage sur la 4ème de couverture
 - b) Je lis la préface
 - c) Je vérifie si le livre est en magasin

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

- 2) Une bibliographie
 - a) Retracer la vie d'un auteur
 - b) Sélectionner les extraits les plus importants de la Bible
 - c) Liste des références de documents

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

- 3) Quel est, en général, l'opérateur booléen par défaut dans les moteurs de recherche (recherche simple). Ecrire une requête permettant de rechercher simplement, dans le moteur GOOGLE, seulement les fichiers de type Word contenant exactement la phrase suivante: *Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique*.

Université Félix Houphouët Boigny d'Abidjan - Ecole normale Supérieure. Licence 3 - UNIVAC -
2016-2017

NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen de Techniques de Recherche Documentaire (1 h 15 mn)
(première Session)

Exercice 1

- 1) Quelles sont les différences essentielles entre un livre et un périodique ?
- 2) Définir les termes documentaires suivants: *Lexique, Troncature, ISBN*.
- 3) Ecrire une requête permettant de rechercher simplement, dans le moteur GOOGLE, seulement les fichiers de type pdf contenant exactement la phrase suivante: Tout anneau principal est factoriel.

Exercice 2

- 1) L'index d'un livre est
 - a) une liste alphabétique de termes qui permet de retrouver une information.
 - b) une liste de termes employés dans l'ouvrage en question
 - c) une conclusion
 - d) une liste d'abréviations

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

- 2) Pour repérer les informations utiles dans un ouvrage, je me sers

- a) De l'éditeur
- b) De la table des matières
- c) De la date d'édition
- d) De l'index

- 3) L'opérateur booléen par défaut dans les moteurs de recherche (recherche simple!) est l'opérateur OU.

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

- 3) Vrai ou Faux. (Justifier les réponses!)

- a) Si on cherche dans une base de données, les références trouvées sont souvent plus précises que celles retrouvées dans un index imprimé.
- b) Un index est l'entité qui décrit une source d'information spécifique telle qu'un livre.

Exercice 3

- 1) Pour vérifier la pertinence de l'information trouvée dans un livre, par rapport au sujet traité
 - a) Je lis les résumés d'ouvrage sur la 4ème de couverture
 - b) Je lis la préface
 - c) Je vérifie si le livre est en magasin

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

- 2) Une bibliographie

- a) Retracer la vie d'un auteur
- b) Sélectionner les extraits les plus importants de la Bible
- c) Liste des références de documents

Choisir la ou les bonne(s) réponses.

Université Félix Houphouët Boigny de Cocody - UFR-MI - Licence 3 -
2016-2017

NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen de Techniques de Recherche Documentaire (1 h 15 mn)
(2ème Session)

Exercice 1

- 1) Qu'est ce qu'un *Thésaurus*?
- 2) Définir les termes documentaires suivants: *Bibliographie analytique*, *Biobibliographie*, *la cote* (d'un livre).

Exercice 2

L'index d'un livre est

- a) une liste alphabétique de termes qui permet de retrouver une information.
- b) une liste de termes employés dans l'ouvrage en question
- c) une conclusion
- d) une liste d'abréviations

Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

Exercice 3

Dans un site web un lien hypertexte permet

- a) de circuler d'une page web à l'autre
- b) d'ouvrir une page web autre que la page d'accueil
- c) de visualiser une image
- e) de se diriger vers un autre site

Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

Exercice 4

- 1) Décrire le principe et le fonctionnement de la classification Dewey.
- 2) Quel est l'indice correspondant au domaine Sciences dans la division Dewey?
Donner la couleur correspondante.
- 3) On considère les cotes suivantes (relatives à la classification Dewey):

a=555.22 GEP
b=555.22 GAP
c=555.01 GAP
d= 555.008 GEP

Classer ces cotes de la plus petite à la plus grande (ordre croissant).

Université Félix Houphouët Boigny d'Abidjan - UFR - MI. Licence 3 - 2017-2018

NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen de Techniques de Recherche Documentaire (1 h 20 mn)
(première Session)

Exercice 1

On considère les cotes (de documents) suivantes (relatives à la classification Dewey):

$a = 555.22 \text{ GEP}$, $b = 556.43 \text{ GGE}$
 $c = 555.22 \text{ GAP}$, $d = 352.22 \text{ AAA}$
 $e = 555.01 \text{ GAP}$, $f = 331.34 \text{ AAA}$
 $g = 555.008 \text{ GEP}$

Classer ces cotes de la plus petite à la plus grande (ordre croissant).

Exercice 2

i) Définir les termes documentaires suivants:

- a) Éditeur
- b) Édition

ii) Écrire une requête permettant de rechercher simplement, dans le moteur GOOGLE, seulement des fichiers de type pdf contenant exactement la phrase suivante: Tout anneau principal est factoriel.

Exercice 3

Choisir la bonne réponse (a ou b ou c).

i) Qui suis-je ? Je suis le meilleur outil pour retrouver de l'information sur un sujet général (par exemple la liste des curiosités touristiques au Yucatan, la critique d'un film récent, etc.).

- a) Un moteur de recherche tel Google
- b) Un répertoire tel que La toile du Québec ou Yahoo!

ii) Qui suis-je ? Je classe les ressources disponibles sur Internet et hiérarchise l'information en la classant en catégorie et sous-catégorie.

- a) Un moteur de recherche tel Google
- b) Un répertoire tel que Yahoo!

iii) Pour vérifier la pertinence de l'information trouvée dans un livre, par rapport au sujet traité,

- a) je lis les résumés d'ouvrage sur la 4ème de couverture
- b) je lis la préface
- c) je vérifie si le livre est en magasin.

Exercice 4

Parmi les 9 documents suivants, préciser les livres, les articles de journaux.

- [1] N. A'Campo, Le nombre de Lefschetz d'une monodromie, *Indag. Math.*, 35:113- 118, 1973.
- [2] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Advances in Math.*, 21:293-329, 1976.
- [3] Anderson, F., and Fuller, K., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [4] M. Bilski, A. Parusinski, G. Rond, Local topological algebraicity of analytic function germs. To appear in *J. Algebraic Geom.* arXiv:1401.5771.
- [5] Cartan, H., and Eilenberg, S., *Homological Algebra*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1956.
- [6] D.T. Lê, Le concept de singularité isolée de fonction analytique, *Adv. Stud. Pure Math.*, 8:215-227, 1986.
- [7] S. Gusein-Zade, I. Luengo, A. Melle-Hernandez, On the topology of germs of meromorphic functions and its applications, *St. Petersburg Math. J.* 11 (2000), no. 5, 775780.
- [8] B. Wang, Cohomology jump loci of compact Kähler manifolds. arXiv:1303.6937.
- [9] N. Budur, Bernstein-Sato ideals and local systems. To appear in *Ann. Inst. Fourier* 64 (2015).

Université Félix Houphouët Boigny de Cote d'Ivoire - UFR-MI - Licence 3 -
2018-2019

NB: la clarté de la rédaction sera notée!

Examen de Techniques de Recherche Documentaire (1 h 15 mn)
(Première Session)

Exercice 1

- 1) Qu'est ce qu'un numéro ISBN? A quelle(s) type(s) de document(s) est - il attribué?
- 2) De combien de chiffres est composé un numéro ISBN?
- 3) Qu'est ce qu'un *Thésaurus*?
- 4) Définir les termes documentaires suivants: *Bibliographie analytique*, *Biobibliographie*, *la cote* (d'un livre).

Exercice 2

- 1) Décrire le principe et le fonctionnement de la classification Dewey.
- 2) Quel est l'indice correspondant au domaine Sciences dans la division Dewey? Donner la couleur correspondante.
- 3) On considère les cotes suivantes (relatives à la classification Dewey):

a=555.22 GEP
b=555.01 GAP
c= 555.008 GEP
d=235.543 AAB
e=555.22 GAP
f=755.543.AAA

Classer ces cotes (de documents) de la plus petite à la plus grande (ordre croissant).

(Tournez la page SVP!)

Exercice 3

L'index d'un livre est

- a) une liste alphabétique de termes qui permet de retrouver une information.
- b) une liste de termes employés dans l'ouvrage en question
- c) une conclusion
- d) une liste d'abréviations

Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

Exercice 4

Dans un site web un lien hypertexte permet

- a) de circuler d'une page web à l'autre
- b) d'ouvrir une page web autre que la page d'accueil
- c) de visualiser une image
- d) de se diriger vers un autre site

Choisir la ou les bonne(s) réponse(s).

EXAMEN « ENTREPREUNARIAT » MATH INFO L3 (Décembre 2016)

Durée : 01 H 30 mn

1°/ Parmi les caractères suivants, citez (sans justification) ceux qui sont utiles à un Entrepreneur : (3 pts)

Etre aimable - Etre dégourdi - Etre manipulateur - Etre talentueux - Etre créatif - Etre solidaire - Etre éloquent - Etre sensible - Etre volontaire - Etre savant - Etre travailleur - Etre solidaire

2°/ Dites (sans justification) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- a) Tout chef d'entreprise est nécessairement un Entrepreneur. (1 pt)
- b) On parle d'entrepreneuriat lorsqu'un salarié s'associe avec son patron pour créer une nouvelle entreprise. (1 pt)
- c) La création d'une ONG à but humanitaire est un projet entrepreneurial. (1 pt)
- d) Le « business model » d'un projet est son « business plan » (1 pt)
- e) Si vous êtes issu d'une famille d'entrepreneurs, vous êtes certain de réussir dans les affaires. (1 pt)

3°/ Que désigne le terme « essaimage » dans le cadre de l'entrepreneuriat? Quels sont les avantages pour l'Essaimeur et pour l'Essaimé ? (5 pts)

4°/ Parmi les éléments ci-dessous, citez dans l'ordre les trois (3) qui constituent les étapes d'un projet entrepreneurial : (3 pts)

La mise en œuvre - la création - le financement - la rédaction - la réflexion - la prospection - l'élaboration

5°/ Ci-dessous un entretien entre M. TRAORE et son fils MAMADOU :

TRAORE : Mon fils, tu me dis que tu veux être un entrepreneur mais sais tu au moins ce que c'est ?

MAMADOU : Oui Papa, un entrepreneur c'est quelqu'un qui construit des maisons;

TRAORE : Que te faut-il pour réaliser ton rêve ?

MAMADOU : J'ai surtout besoin de beaucoup d'argent

TRAORE : Et qu'est ce qui te fait dire que tu vas réussir ?

MAMADOU : Ah Papa, comment tu peux en douter, j'ai fait des études de gestion et en plus je suis « un petit Dioula » donc j'ai les affaires dans le sang »

Décèler les erreurs (en les justifiant) dans les réponses de MAMADOU aux questions de son père. (4 pts)

EXAMEN « ENTREPREUNARIAT » M2 MATH-INFO (Novembre 2016)

Durée : 01 H 30 mn

1^o/ Dites en justifiant votre réponse si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- a) La « débrouillardise » est un défaut chez un entrepreneur. (2 pts)
- b) Tout chef d'entreprise est nécessairement un Entrepreneur. (2 pts)
- c) Si vous n'êtes pas issu d'une famille d'entrepreneurs ce n'est pas la peine de penser à se lancer en affaires. (2 pts)
- d) On parle d'intrapreneuriat lorsqu'un salarié s'associe avec son patron pour créer une nouvelle entreprise. (2 pts)
- e) On ne peut parler d'entrepreneuriat que pour un projet à but lucratif. (2 pts)

2^o/ Qu'est qu'un business plan ? (2 pts)

3^o/ Que désigne le terme « essaimage » dans le cadre de l'entrepreneuriat? Quels sont les avantages pour le salarié et pour l'entreprise source ? (4 pts)

4^o/ Un de vos amis, M. KOUADIO qui finit ses études l'année prochaine, vous parle de ses projets en ces termes :

- « Moi KOUADIO, je ne crains pas pour mon avenir pour les raisons suivantes :
- Mon père va me donner une importante somme d'argent dès que je finis mes études pour créer ma propre entreprise
 - Etant issue d'une famille de commerçants donc j'ai le sens des affaires.
 - Je ne sais pas encore dans quel secteur je vais me lancer mais ce n'est pas un problème car j'ai fait des études de gestion »

Donner des conseils à M. KOUADIO en atténuant son optimisme. (4 pts)

EXAMEN « ENTREPREUNARIAT » MATH INFO L3 (Décembre 2017)

Durée : 01 H 30 mn

1°/ Dites (sans justification) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- a) A priori, il est meilleur de créer son entreprise seul qu'avoir des associés. (1 pt)
- b) On parle d'intrapreneuriat lorsqu'un salarié crée sa propre entreprise. (1 pt)
- c) La création d'une ONG à but humanitaire est un projet entrepreneurial. (1 pt)
- d) L'élément le plus important du « business plan » est le plan financier (1 pt)
- e) Si vous êtes issu d'une famille d'entrepreneurs, vous êtes certain de réussir dans les affaires. (1 pt)
- f) On parle d'Essaimage lorsqu'une entreprise aide une autre entreprise (1 pt)
- g) Etre « débrouillard » est une qualité chez un entrepreneur (1 pt)

2°/ Que désigne le terme «franchise» dans le cadre de l'entrepreneuriat? Quels sont les avantages et les inconvénients pour le « franchisé » ? (4 pts)

3°/ Parmi les éléments ci-dessous, citez dans l'ordre les trois (3) qui constituent les étapes d'un projet entrepreneurial : (3 pts)

La mise en œuvre – la création – le financement – la rédaction – la réflexion – la prospection – l'élaboration

4°/ Expliquez en quoi une entreprise est une unité de répartition de richesse ? (3 pts)

5°/ Parmi les caractères suivants, citez (sans justification) ceux qui sont utiles à un Entrepreneur : (3 pts)

Etre capable d'influencer positivement les autres – Vouloir plaire à tout le monde – Avoir envie de relever des défis – Etre capable de manipuler son entourage – Savoir parler en public – Avoir la volonté de travailler fort

**EXAMEN « ENTREPREUNARIAT » MATH INFO L3 2^{ème} session
(Janvier 2018)**

Durée : 01 H 30 mn

1°/ Que désigne le terme «essaimage» dans le cadre de l'entrepreneuriat? Citez deux avantages pour chacune des parties (Essaimeur et Essaimé)? (4 pts)

2°/ Dites (sans justification) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- a) On parle d'intrapreneuriat lorsqu'un salarié s'associe avec son patron pour créer une nouvelle entreprise. (1 pt)
- b) A priori, il est meilleur de créer son entreprise à plusieurs que seul. (1 pt)
- c) On parle de 'franchise' lorsqu'une entreprise existante a une franche collaboration avec une nouvelle entreprise. (1 pt)
- d) Si vous êtes issu d'une famille d'entrepreneurs, vous êtes certain de réussir dans les affaires. (1 pt)
- e) La création d'une ONG à but humanitaire est un projet entrepreneurial. (1 pt)
- f) L'élément le plus important du « business plan » est le plan financier (1 pt)
- g) Il faut avoir beaucoup d'argent pour entreprendre. (1 pt)
- h) Il suffit d'avoir une bonne idée pour lancer une entreprise (1 pt)
- i) Une entreprise est une unité de création et de distribution de richesses (1 pt)
- j) Le PCA d'une entreprise n'est pas nécessairement un Entrepreneur. (1 pt)

3°/ Parmi les éléments ci-dessous, citez dans l'ordre les trois (3) qui constituent les étapes d'un projet entrepreneurial : (3 pts)

La mise en œuvre – la création – le financement – la rédaction – la réflexion – la prospection – l'élaboration

4°/ Parmi les caractères suivants, citez (sans justification) ceux qui sont utiles à un Entrepreneur : (3 pts)

Etre persévérant – Etre gentil – Etre déterminé – Etre talentueux – Etre éloquent – Etre solidaire – Etre motivé – Etre sensible – Etre débrouillard – Etre savant – Etre fêché – Etre responsable

EXAMEN « ENTREPREUNARIAT » MATH INFO L3 (Janvier 2019)

Durée : 01 H 30 mn

1°/ Parmi les caractères suivants, citez (sans justification) ceux qui sont utiles à un Entrepreneur : (3 pts)

Etre persévérant - Etre gentil - Etre déterminé - Etre talentueux - Etre éloquent - Etre solidaire - Etre motivé - Etre sensible - Etre débrouillard - Etre savant - Etre riche - Etre responsable

2°/ Que désigne le terme «essaimage» dans le cadre de l'entrepreneuriat? Citez deux avantages pour chacune des parties (Essaimeur et Essaimé) ? (4 pts)

3°/ Dites (sans justification) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- a) Un Directeur Général d'entreprise est nécessairement un Entrepreneur. (1 pt)
- b) A priori, il est meilleur de créer son entreprise à plusieurs que seul. (1 pt)
- c) La création d'une ONG à but humanitaire est un projet entrepreneurial. (1 pt)
- d) On parle d'intrapreneuriat lorsqu'un salarié s'associe avec son patron pour créer une nouvelle entreprise. (1 pt)
- e) L'élément le plus important du « business plan » est le plan financier (1 pt)
- f) Si vous êtes issu d'une famille d'entrepreneurs, vous êtes certain de réussir dans les affaires. (1 pt)
- g) Pour faire de l'argent, il faut dépenser de l'argent (1 pt)
- h) On parle d'Essaimage lorsqu'une entreprise aide une autre entreprise (1 pt)
- i) L'objet essentiel du plan d'affaires est de permettre la levée de capitaux (1 pt)
- j) On parle de 'franchise' lorsqu'une entreprise existante a une franche collaboration avec une nouvelle entreprise (1 pt)

4°/ Parmi les éléments ci-dessous, citez dans l'ordre les trois (3) qui constituent les étapes d'un projet entrepreneurial : (3 pts)

la prospection - La mise en œuvre - la création - le financement - la rédaction - la réflexion - l'élaboration

EXAMEN « ENTREPREUNARIAT » MATH INFO L3 (Janvier 2020)

Durée : 01 H 30 mn

1°/(10 pts) Dites (sans justification) si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

- a) L'élément le plus important du « business plan » est le plan financier (1 pt)
- b) Un Entrepreneur est quelqu'un qui dirige une entreprise. (1 pt)
- c) A priori, il est meilleur de s'associer avec des partenaires pour créer son entreprise que de le faire seul. (1 pt)
- d) La création d'une ONG à but humanitaire est un projet entrepreneurial. (1 pt)
- e) Un entrepreneur est quelqu'un qui crée son entreprise et y développe des pratiques et comportements entrepreneuriaux. (1 pt)
- f) Le Désir d'indépendance est la meilleure motivation pour entreprendre. (1 pt)
- g) On parle de 'franchise' lorsqu'une entreprise existante a une franche collaboration avec une nouvelle entreprise (1 pt)
- h) On peut être entrepreneur même si on n'a pas assez d'argent. (1 pt)
- i) Il suffit d'avoir une bonne idée pour lancer une entreprise (1 pt)
- j) Un individu qui rachète une entreprise est un entrepreneur. (1 pt)

2°/ Que désigne le terme « essaimage » dans le cadre de l'entrepreneuriat ? Citez deux avantages pour chacune des parties (Essaimeur et Essaimé) ? (4 pts)

3°/ Parmi les caractères suivants, citez (sans justification) ceux qui sont utiles à un Entrepreneur : (3 pts)

Etre capable de faire plaisir à tout le monde - Etre débrouillard - Respecter ses engagements - Etre capable de manipuler son entourage - Etre capable d'influencer positivement les autres - Savoir parler en public

4°/ Parmi les éléments ci-dessous, citez dans l'ordre ceux qui constituent les étapes d'un projet entrepreneurial : (3 pts)

La prospection - La mise en œuvre - la création - le financement - la rédaction - la réflexion - l'élaboration

UFR MATHS/INFO L3-SESSION /2016/ 2 HOURS

ENGLISH EXAMINATION

code

Family name.....

Surnamestudent card number.....

Level of study.....Session.....Date.....

Cut here.....

ENGLISH EXAMINATION

code

DateSession.....

Level of study.....Major.....

Mark

I- Find the right verb and write the right tense and form

- 1- Mathematics difficult to understand.
- 2- Quantum physics.....also a science
- 3- Kinematics..... taught in our school
- 4- Physics..... an applied science.
- 5- Datainput in the computer
- 6- Thermodynamicsmy favourite subject last year

II- Put the sentences in the interrogative form

- 1- A scale measures the weight of an object.
.....
- 2- They turned the volume of their radio off.
.....
- 3- He is using CDs to back up his data.
.....
- 4- The chart below summarizes the information.
.....
- 5- They had expected some specific answers.
.....

UFR MATHS-INFO

EXAMEN D'ANGLAIS

L3 SEMESTRE 2

Durée: 02 heures

Part I : Reading

Exercise 1: Solve the following problems. Give only the solutions

1. Kenneth solved a certain number of problems and Harold solved 2 more than twice as many. Together they solved 38. How many did each solve?

Solution : _____

2. If 2 is added to a certain number, the result is the same as would be obtained if twice that number were subtracted from 32. What is the number?

Solution : _____

3. Harry wished one summer to earn enough money for his next years expense in college, which would amount to \$1560. His father said, "For every dollar that you earn I will give you four dollars." How much must Harry earn?

Solution : _____

4. A salesman sold twice as much pears in the afternoon than in the morning. If he sold 360 kilograms of pears that day, how many kilograms did he sell in the morning and how many in the afternoon?

Solution : _____

5. If a farmer wants to plough a farm field on time, he must plough 120 hectares a day. For technical reasons he ploughed only 85 hectares a day, hence he had to plough 2 more days than he planned and he still has 40 hectares left. What is the area of the farm field and how many days the farmer planned to work initially?

Solution : _____

Exercise 2: Translate the phrases into algebraic expressions. (Do not give the solutions)

1. Fifteen less than twice a number _____

2. The sum of one-sixth of r , five-sixths of m , and 3 _____

3. The product of nine and a number, decreased by six _____

4. 3 less than 8 times d _____5. The sum of two-fifths of h and five-sixths of f , minus 4 _____

14.10.2020

Part II: Grammar**Exercise 3:** Join these sentences using *who* or *which*, as in the example.

1. The person phoned. He didn't leave a message.

The person who phoned didn't leave a message.

2. The bus goes to the airport. It leaves every 20 minutes.

3. The picture was hanging near the door. It was horrible.

4. The instructor taught me how to drive. He was very patient.

Exercise 4: Turn these sentences into passive

1. Dennis Bergkamp scored the goal of the year yesterday.

2. Who has published the news?

3. You must load the bigger trunks first

Exercise 5: *comparatives and superlatives**First, Circle "Correct" or "Incorrect" under each sentence. Then, second, rewrite the correct version of the sentence if the sentence is incorrect.*

1. Where's the most cheap place to eat?

Correct Incorrect

2. She's worst than me at maths.

Correct Incorrect

3. The first number is superior than the second.

Correct Incorrect

UFR MATHS/INFO 2nd SESSION-L3 MATHS /2017/ 2 HOURS

ENGLISH EXAMINATION

code

Family name.....

Surnamestudent card number.....

Level of study.....Session.....Date.....

Cut here.....

ENGLISH EXAMINATION

code

DateSession.....

Level of study.....Major.....

Mark

I- Translate into English.

1- Additionnons deux nombres réels; disons x et y.....

2- Substituons le nombre imaginaire iy au nombre réel y

3- Soit une fonction d'une seule variable x : y égale f de x.

4- Quand x croit de cinquante pour cent, y décroît d'un facteur dix.....

5- C'est un ensemble vide.....

II- How do read these symbols or expressions in English?

1- $a \in A$

2- \exists

3- \forall

4- a_2

5- \bar{x}

6- Read OR write these expressions and equation

1- $2(\sqrt{2} 3x)$

2- the derivative of f of x

3- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ for $n \geq 3$
.....

4- $\frac{3}{4}$ (to speak about ratios).....

5- The absolute value of S minus the sum from 1 to n of f of t sub i times delta sub i is less than epsilon.
.....

6- 10^5
is 10to

2 heures

EXAMEN D'ANGLAIS

L3 SEMESTRE 2 (2)

Durée: 1:30 heure

Part I : Reading

Exercise 1: Solve the following problems. Give only the solutions

- 1. In a group of 60 people, 27 like cold drinks and 42 like hot drinks and each person likes at least one of the two drinks. How many like both coffee and tea? Solution : _____
- 2. There are 35 students in art class and 57 students in dance class. Find the number of students who are either in art class or in dance class. Solution : _____
- 3. Harry wished one summer to earn enough money for his next year's expense in college, which would amount to \$1560. His father said, "For every dollar that you earn I will give you four dollars." How much must Harry earn? Solution : _____
- 4. In a group of 100 persons, 72 people can speak English and 43 can speak French. How many can speak English only? How many can speak French only and how many can speak both English and French? Solution : _____

Exercise 2: Translate the phrases into algebraic expressions. (Do not give the solutions)

- 1. Fifteen less than twice a number _____
- 2. The sum of one-sixth of r, five-sixths of m, and 3 _____
- 3. The product of nine and a number, decreased by six _____
- 4. 3 less than 8 times d _____

Part II: Vocabulary

Exercise 3: Fill in the gaps with the most appropriate mathematics word.

- 1. If for example, we have the set $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, and another set $B = \{1, 2, 3\}$, then B is a _____ of A
- 2. The _____ $\{ \}$ are sometimes called "set brackets".
- 3. $\{ \dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots \}$ is the Set of _____ numbers:
- 4. $\{ \dots, -3, -1, 1, 3, \dots \}$ is the Set of _____ numbers:
- 5. the infinity symbols $(\infty, -\infty)$ do not represent real numbers, they are used to indicate that the set is _____ in the positive or negative direction of the real number line.

Part III: GrammarExercise 4 (a): Ask Yes/No questions

1. My result is correct
2. The set is empty
3. They solved the two operations
4. Ten and ten equals twenty
5. He will look at your problems later

Exercise 4 (b): Ask a WH-Question about the underlined part of the sentence

1. The University is only 5 km form my home
2. My car used seventy litres of gas for the trip
3. The class meets in room 205
4. *She has* three brothers
5. *I need* a calculator

Exercise 5: Define the mathematics concepts below, use relative pronouns

1. An integer
2. A set,
3. A University,
4. (the) night
5. a mathematician

UFR MATHS/INFO 1st SEMESTER 1st SESSIONL3

2017/ 2 HOURS

ENGLISH EXAMINATION

code

Family name.....

Given name

Student card number.....

Level of study.....Session.....Date.....

Cut here.....

ENGLISH EXAMINATION

code

DateSession.....

Level of study.....Major.....

Mark

1- Write the number sentence corresponding to each word problem and give the answer

Gerald traveled 432 miles by bus and 121 miles by train. How far did he go?
.....

Lucy has two apples. Julie has five apples. How many fewer apples does Lucy have than Julie?
.....

Louise is three years older than her sister Laura. Laura was 34 two years ago. How old is Louise now
.....

Zachary bakes 63 brownies and arranges them equally on 7 plates to give to 7 neighbors. How many brownies does each neighbor receive?
.....

All of the 121 fourth graders were in the gym. Mr Harold's class of 32 children left. How many remained in the gym?

- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{a+b}$
- $(x+y)^2$

- $x=2y$
- $x \equiv y$

- $0 < x < 1$

III- Read these expressions or equations

$$ax^2 + bx + c = 0$$

.....

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

.....

$$(2x+3)(x+1)$$

.....

$$3^{x+1} = 81 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^4$$

.....

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$$

.....

UFR MATHS/INFO 1st SESSION-L3 /2019

2 HOURS

ENGLISH EXAMINATION

Family name

code

Surname

student card number.

Level of study

Session.

Date

Cut here.....

ENGLISH EXAMINATION L3

Date.

...Session.

code

Level of study...

.Major.....

Mark

Major: Mathematics, Mechanics, Informatics...

I- Find the right preposition or expression

1- Twice -15 amounts 30

2- 24 is equal ...2 times-12

3- Three taken away.. .thirteen

4- The difference .

5- The ratio of x y

6- $4x - 8 \leq 12$ $\Rightarrow 4x - 8 + 8 \leq 12 + 8$, [Adding 8 on..... des of the inequation]7- Dividing a cake for 5 children consists in sharing one cake
five children8- $x + 4$ means that we increase x . 4.

9- y is diminished150

10- Four times a number p subtracted70

Cut here.....

II- Read the algebraic operations and variable expressions in a given model.

Example: $x - 5$ reads: the difference of five and a number

$\frac{38x}{-4}$ reads: the

$-13 - 3x$ reads: the

$(11)(-4x)$ reads: the

$(x + y)z + xy$ reads: The.

$x^2 + x^3 + x^5$ reads: the.

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \dots$$

$$4^{1/4} = \sqrt[4]{4} \dots$$

II- Read these symbols

symbols	examples	Reads
Example +	4+4	Four plus four
\in	$x \in Q$
\exists	$\exists x$
$\int_a^b f(x)$	
\vee	$P \vee Q$
\wedge	$P \wedge Q$

III- Find the word corresponding to this definition

- 1- The opposite of a number or its negative
- 2- An expression in algebra that consists of two terms.....
- 3- To divide into two equal sections.....
- 4- A number that is placed in front of a variable. For example, in $6x$
- 5- A number that when multiplied by itself twice gives the original number.....
- 6- An integer which can be divided by 2, with no remainder.
- 7- The square root of a negative number.....
- 8- A group of objects, numbers
- 9- A product of equal factors. $3 \times 3 \times 3 = 3^3$
- 10- A number greater than zero.....

IV- Read

1- $a + (b - c)$:

2- $a - (b + c)$:

3- $a + b - c$:

4- $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$..

5- $4^{1/4} = \sqrt[4]{4}$..

III- Find and write the solutions to these problems.

1- Subtract the greatest 8-digit number from the smallest 9-digit number.
.....

2- Kelly is x years older than John. The present age of John is y years. How old is Kelly now? What will be their ages after 5 years?

3- Two less than one third of x
.....

4- The product of two numbers is 64. One of them is d . Find the other.
.....

5- Let set $A = \{2, 4, 5, 6\}$ and set $B = \{4, 6, 7, 8\}$

Taking every element of both the sets A and B , without repeating any element, we get a new set = $\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Symbolically, we write

$$\therefore A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

And we read..
.....

6- There is a group of 80 persons who can drive scooter or car or both. Out of these, 35 can drive scooter and 60 can drive car. Find how many can drive both scooter and car? (a) How many can drive scooter only? (b) How many can drive car only? (c)

a

b

c

L3 MATHSE UFR.1^{re} SESSION- /2020

2 HOURS

ENGLISH EXAMINATION

Code

Family name.....

Forenamestudent card number.....

Level of study.....Session.....Date.....

Cut here

ENGLISH EXAMINATION L3

code

Date.....Session.....

Level of study.....Major.....

Mark

Major: Mathematics

M^{re} DEMBELLÉ

I- Write true or false

- 1- The name of the set is always written in small letter
- 2- The elements of a set must not be repeated
- 3- An empty set is a finite set, since the number of elements in an empty set is infinite, i.e., 0.
- 4- The cube of a negative integer is always positive
- 5- The square of a negative number is sometimes positive

II- Find the solutions to these words problems by demonstrating the answers (write numerals in figures).Complete the sentences when you are asked to.

- 1- Mr. Jones deposited \$278475 in a bank in his account. Later he withdrew \$155755 from his account. How much money was left in the bank in his account? (which amount?/write the sum)

Amount \$.....

Amount \$.....

Amount \$.....

Work on this sheet

Cut here

Therefore, Mr. Jones.....\$.....his bank account.

- 2- .470988 books are to be arranged equally in shelves. If 378 books are arranged in each shelf, how many shelves will be needed?
-

- 3- Subtract the greatest 8-digit number from the smallest 9-digit number
-

- 4- Ron had 15 marbles, he lost y marbles. How many marbles are now remaining with him?
-

- 5- Kelly is x years older than John. The present age of John is y years. How old is Kelly now? What will be their ages after 5 years?

Kelly

John

Kelly

III- Read these equations or expressions

1- $0.1 \times 0.1 = (0.1)^2 = 0.01$

.....

2- $7 + (-5) + 1.025 + .33 = y$

.....

3- $4a(2b + c)^2$

.....

4- $\sqrt{55 - 37}$

.....

5- $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

.....

IV- Write in numerical expressions

- 1- Six more than the product of 3 and 8.....
- 2- triple the sum of 24 and 16
- 3- Four less than the product of 14 and 5.....
- 4- The sum of 4 nines and 3 nines
- 5- The sum of 7 twenties and 4 twenties
- 6- The difference between 7 forty-six and 4 forty six.....
- 7- Half of the difference between 26 and 18
- 8- m taken away from h.....
- 9- Twice a number t subtracted from 50.....
- 10- Two fifths times the quantity nine thirds.....

V- Read these expressions and give the written forms for symbols and figures

- 1- $x \notin A$
- 2- $A \cup B = B \cup A$
- 3- $f(x) = 3x+5$
- 4- $A \subseteq B$
- 5- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Q} | x - y | < \frac{2}{3}$

VI- Read these symbols

- $\sqrt[3]{x}$
- \sqrt{x}
- \sqrt{x}
- \sqrt{x}
- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt{x^3}$
- a^n
- $a^{1/3}$
- 10^{-4}

Work on this sheet

EVALUATION DE TECHNIQUE D'EXPRESSION

Niveau : Licence 3

Durée : 1 Heure

EXERCICE 1 : Les accords du participe

1. Mettez les verbes entre parenthèses au participe passé et faites les accords qui conviennent (06 pts)

- a) Marie s'est (**préparer**) une tasse de thé.
- b) La mort que j'ai (**voir**) s'éloigner de ma maison.
- c) Les billets qu'elles se sont (**répartir**).
- d) Regardez qui arrive là; c'est un de mes amis que je n'ai plus (**voir**) depuis longtemps.
- e) Cette veuve, je l'ai (**entendre**) raconter son histoire souvent à la télé.
- f) Cette jeune fille est beaucoup plus belle que je l'avais (**imaginer**).

EXERCICE 2 : Registre de langue (14 pts)

Réécrivez le texte suivant au registre soutenu :

Tu veux que je te parle de ma vieille quoi ? En tout cas-la femme-là a trop souffert sur moi, quand je suis quitté au village au début là, je pensais trop à elle. C'est elle seule qui préparait pour tout le monde. Moi, je fréquentais pas mais, au nom de Dieu ! Je l'aidais pas aussi, ça me fait honte. A l'heure-là, elle n'est plus làlà, c'est trop dur sur moi. Mais j'ai fait comment? J'exerce pas encore, c'est débrouillardise seulement, sinon j'allais me retourner au village chercher les petits parce que mon vieux s'occupe pas bien d'eux. Il a enceinté autre femme vite fait donc pour lui est doux mais c'est Dieu qui va le payer.

Bonne chance !

Evaluation Licence3

DUREE :1h30mn

TECHNIQUES D'EXPRESSIONEXERCICE 1 : ECRIVEZ LES PHRASES SUIVANTES DANS UN REGISTRE SOUTIENU.

1. Tous les étudiants ont eu leur examen en fin d'année.
2. La Cote d'ivoire et le Mali collaborent ensemble dans le domaine militaire.
3. Deux étudiants de licence 3 se causent pendant les compositions.
4. Les hommes d'affaires sont toujours à cheval entre deux avions.
5. La foule est réunie en grand nombre le long de la rue pour applaudir le président.

EXERCICE 2 : PARMIS LES PHRASES CI-APRES, RELEVEZ CELLES QUI SONT CORRECTES.

1. La végétation était si luxuriante que l'on avait peine à passer.
2. Pendant l'hiver les marmottes hibernent.
3. Les frémissements de l'harmattan se font sentir.
4. Ces hommes sont mis au banc des accusés.
5. Les chaos de l'ambulance faisaient gémir le blessé.
6. Elle a senti une main effleurer son épaule.
7. Elle a obtenu le prolongement de son congé pour deux mois.
8. Le train est rentré en collision avec une voiture.

EXERCICE 3 : METTEZ LES VERBES EN PARENTHESES AU PARTICIPE PASSE EN RECOPIANT CHACUNE DES PHRASES CI-APRES.

1. Les garçons qui nous ont (recevoir) sont sympathiques.
2. Voici une chanson que j'ai (entendre) jouer pendant mon séjour à l'intérieur du pays.
3. Les musiciens que nous avons (voir) jouer ce soir sont de véritables professionnels.
4. Qui sont ces personnes qui se sont (succéder) sur la piste de danse ?
5. La montre que j'ai (faire) réparer coûte cher.

TECHNIQUES D'EXPRESSION

EXERCICE 1 : ECRIVEZ LES PHRASES SUIVANTES DANS UN REGISTRE SOUTENU.

1. Tous les étudiants ont eu leur examen en fin d'année.
2. La Cote d'ivoire et le Mali collaborent ensemble dans le domaine militaire.
3. Deux étudiants de licence 3 se causent pendant les compositions.
4. Les hommes d'affaires sont toujours à cheval entre deux avions.
5. La foule est réunie en grand nombre le long de la rue pour applaudir le président.

EXERCICE 2 : PARMIS LES PHRASES CI-APRES, RELEVEZ CELLES QUI SONT CORRECTES.

1. La végétation était si luxuriante que l'on avait peine à passer. ✓
2. Pendant l'hiver les marmottes hibernent.
- ✓ 3. Les frémissements de l'harmattan se font sentir.
4. Ces hommes sont mis au banc des accusés.
5. Les chaos de l'ambulance faisaient gémir le blessé.
6. Elle a senti une main effleurer son épaule.
7. Elle a obtenu le prolongement de son congé pour deux mois.
8. Le train est rentré en collision avec une voiture.

EXERCICE 3 : METTEZ LES VERBES EN PARENTHESES AU PARTICIPE PASSE EN RECOPIANT CHACUNE DES PHRASES CI-APRES.

1. Les garçons qui nous ont (recevoir) sont sympathiques.
2. Voici une chanson que j'ai (entendre) jouer pendant mon séjour à l'intérieur du pays.
3. Les musiciens que nous avons (voir) jouer ce soir sont de véritables professionnels.
4. Qui sont ces personnes qui se sont (succéder) sur la piste de danse ?
5. La montre que j'ai (faire) réparer coûte cher.

LICENCE 3 TECHNIQUE D'EXPRESSION DUREE : 1H

Exercice I : Formulez correctement les phrases suivantes

- 1- Nous sommes venus ensemble avec les élèves du Lycée Classique d'Abidjan ;
- 2- Chaque matin le médecin rend visite aux malades ;
- 3- Les étudiants marchent à pied pour se rendre au campus ;
- 4- Ce garçon a réussi au baccalauréat 2018 ;
- 5- A la rentrée des classes, les parents prêtent un peu d'argent à la banque pour acheter les fournitures scolaires.

Exercice II : Soit la phrase suivante

« je laisse mes biens à ma sœur non à mon frère au coiffeur rien aux pauvres »

A partir de cette phrase non ponctuée, construisez trois nouvelles phrases de sorte que les biens reviennent à

- a- aux pauvres
- b- au coiffeur
- c- au frère

Exercice III : Faites l'accord des participes passés dans les phrases suivantes, si nécessaire.

- 1- Voici les canards sauvages que nous avons (vu) s'envoler ;
- 2- La chanson que nous avons (entendu) fredonner est mélodieuse ;
- 3- Les filles se sont (tressé) les cheveux ce week-end ;
- 4- Les mangues que nous avons (cueilli) sont succulentes ;
- 5- Les filles se sont (sourit) en se regardant ;
- 6- Les hommes politiques se sont (succédé) à la tribune.

EVALUATION LICENCE 3 : TECHNIQUE D'EXPRESSION

18/30

EXERCICE 1 : Ecrivez correctement les participes passés en gras si cela est nécessaire

Combien de fois l'a-t-il *entendu* cette histoire sans y prêter attention (R. Ver-cel). – Il est des paroles sur lesquelles on ne peut revenir, si légèrement qu'on les ait *prononcé* (J. Perret). – La mésange ne se profilait plus sur le ciel. Je me souviens de l'avoir *vu* ouvrir ses ailes, puis glisser inerte et légère (M. Genevoix). – Les oiseaux se sont *envolés* de la forêt ou bien ils sont *brûlés* les ailes dans l'incendie (M. Genevoix). – L'autre hiver, deux grands arbres ont été *brisés* par les vents. J'en ai senti de la pitié (G. Duhamel). – Petite Véronique courait s'asseoir à notre porte dès qu'elle était *levée* et s'y tenait *tapi* (P. Loti).

EXERCICE 2 : Soit la phrase suivante : « je laisse mes biens à ma sœur non à mon frère au coiffeur rien aux pauvres »

- 1) – ponctuez cette phrase de sorte que les biens reviennent exclusivement au frère.
- 2) – ponctuez cette phrase de sorte que les biens reviennent exclusivement au coiffeur.

EXERCICE 3 : Formulez correctement les phrases ci-dessous en utilisant le registre soutenu.

- 1) – pardonnez monsieur, montrez-moi les wc.
- 2) - A cause des petits discours entre ma femme et moi elle me donne dos au lit.
- 3) - Ce matin mon pied a cogné un caillou et moins un je tombais.
- 4) – mes frères et sœurs fréquentent au Collège Modernes du Plateau
- 5) – c'est à lui que je cause
- 6) – l'homme que je dis il est beau est mon oncle.

EXERCICE 4 : Réécrivez les phrases suivantes en choisissant le mot juste.

- 1) – Elle a senti une main effleurer ou affleurer son dos
- 2) Le train est entré en collision ou collusion avec la voiture
- 3) Elle a obtenu le prolongement ou la prolongation de son congé pour deux mois
- 4) Chaque hiver, les marmottes hibernent ou hivernent.
- 5) La végétation était si luxuriante ou luxueuse que l'on avait peine à passer
- 6) Les chaos de l'ambulance faisaient gémir ou frémir le blessé

EXERCICE 5 : Définissez les termes suivant du schéma de la communication

- 1) Le code
- 2) Le référant
- 3) Le canal

BONNE CHANCE !!!

Université F.H.B Cocody
UFR Mathématiques -
Informatique

Année universitaire 2015 - 2016

Licence 3: TD Calcul différentiel
Fiche n°1

Exercice 1:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

- 1°) Montrer que f est de classe C^1 .
- 2°) f est-elle deux fois différentiable? Si oui, calculer sa différentielle seconde.
- 3°) f est-elle trois fois différentiable? Si oui, calculer sa différentielle troisième.
- 4°) Calculer

$$\sup_{(x,y) \in [0,1]^2} \|df(x)\|.$$

En déduire l'existence de $C > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(x, y)| \leq C \|(x, y)\|.$$

Exercice 2:

Soient α une fonction numérique de classe C^1 sur \mathbb{R} , $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} , et E l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} muni de la norme de la convergence uniforme.

Montrer que l'application $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(f) = \int_a^b \alpha[f(x)] dx,$$

est différentiable, et calculer sa différentielle.

Exercice 3:

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme associée à ce produit scalaire est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Soit u un endomorphisme continu symétrique de E , c'est à dire un endomorphisme continu de E tel que:

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

1°) Montrer que l'application $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \langle u(x), x \rangle$ est différentiable sur E , et calculer $\phi'(a).h$ pour tous $a, h \in E$.

2°) Soit $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$\psi(x) = \|x\|^{-2} \langle u(x), x \rangle \text{ si } x \neq 0, \text{ et } \psi(0) = 0.$$

Etudier la différentiabilité de ψ , et calculer le cas échéant sa différentielle.

Exercice 4:

Soit F l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_F$, et E l'espace de Banach des applications de classe C^2 de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} qui s'annulent en 0 et 1 muni de la norme:

$$\|y\|_E = \sup_{t \in [0,1]} [|y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|].$$

Soit $\phi : E \rightarrow F$ l'application définie par: $\phi(y) = y'' + ay' + by^2$, où a et b sont des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} .

1°) Montrer que ϕ est de classe C^1 sur E et calculer sa différentielle $d\phi(x)$ en un point x de E . $d\phi(0)$ est-elle bijective?

2°) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que: $\forall f \in F$ tel que $\|f\|_F < r$, il existe $y \in E$ tel que $\phi(y) = f$.

3°) f est-elle deux fois différentiable? Si oui, calculer sa différentielle seconde.

Exercice 5:

Soient E un espace de Banach, $f : L(E) \times L(E) \rightarrow L(E)$ définie par

$$f(A, B) = B - \frac{1}{2}(Id_E - A + B^2)$$

où $L(E)$ est l'espace des applications linéaires continues de E dans E .

1°) Montrer à l'aide du théorème des fonctions implicites qu'il existe U voisinage de Id_E , V voisinage de $0_{L(E)}$ dans $L(E)$, et une application $\phi : U \rightarrow V$ tels que

$$\phi(Id_E) = 0_{L(E)} \text{ et } A = (Id_E - \phi(A))^2, \forall A \in U.$$

2°) Montrer que l'application R définie sur U par $R(A) = Id_E - \phi(A)$ est différentiable et calculer sa différentielle au point Id_E .

Exercice 6:

On considère la fonction numérique sur \mathbb{R}^2 définie par: $F(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y) - 1$.

1°) Montrer que l'équation $F(x, y) = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite $\phi : x \mapsto y = \phi(x)$ telle que $\phi(0) = 0$.

2°) Donner le développement limité de ϕ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Université FHB - Cocody
 UFR Mathématiques -
 Informatique

Année universitaire 2015 - 2016

Licence 3: TD EQUATIONS DIFFERENTIELLES O.

Exercice 1:

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad (1 + t^2)y''(t) + t^2y(t)y'(t) + e^{-t}y(t)^2 = 0,$$

où y est une fonction à valeurs réelles de la variable réelle t .

1°) Posons $u(t) = y(t)$ et $v(t) = y'(t)$.

Montrer que y est solution de (E) si et seulement si (u, v) est solution de

$$(E_1) \quad \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{t^2}{1+t^2}u(t)v(t) - \frac{1}{1+t^2}e^{-t}u(t)^2. \end{cases}$$

2°) Etudier l'existence théorique de solution (u, v) de (E_1) .

3°) A-t-on unicité des solutions de (E_1) ?

4°) Énoncer le théorème des solutions partout définies. Ce théorème s'applique-t-il à (E_1) ?

Exercice 2:

On considère l'équation différentielle:

$$(E) \quad \begin{cases} x' = -2y + z \\ y' = x + 3y - t^2 \\ z' = -x - y + 3z \end{cases}, \text{ où } x, y \text{ et } z \text{ sont des fonctions réelles d'une variable réelle.}$$

1°) Montrer que (E) est linéaire.

2°) L'équation (E) admet-elle des solutions sur \mathbb{R} ?

3°) Jordaniser la matrice du système. En déduire la résolvante de (E).

4°) Donner la formule permettant de trouver la solution maximale $u(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) telle que $u(0) = (0, -1, 0)$.

5°) Calculer concrètement la solution maximale $u(t)$ de (E) telle que $u(0) = (0, -1, 0)$.

Université F. H. B
UFR-MI: Licence 3

Année universitaire 2015-2016

PROBABILITES AVANCEES

Fiche 2 : Indépendance stochastique, Vecteurs gaussiens

Exercice 1

On considère une variable aléatoire (X, Y) à valeurs dans \mathbb{R}^2 dont la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ admet la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 ,

$$f(x, y) := \alpha(1-x^2)I_{[0,1]}(x)ye^{-3y}I_{]0,+\infty[}(y),$$

où α est un réel.

1. Déterminer la valeur du réel α .
2. Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) .
3. Calculer $\mathbb{P}(0 < X \leq 2, Y \geq 1)$.
4. Calculer la matrice de dispersion D de (X, Y) .

Exercice 2

Soient n et m deux entiers naturels non nuls, X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que la variable X est binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$ et Y est une binomiale de paramètres $(m, \frac{1}{2})$. Calculer la probabilité que $X = Y$.

Exercice 3

On considère $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite indépendante de v.a.r. de même loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$ ($0 < p < 1$) définie sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit un entier $r \geq 1$, on définit les nouvelles v.a.r. en posant pour tout $\omega \in \Omega$,

$$T(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} / X_n(\omega) = 1\}$$

$$\tau_r(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N}^* / X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega) = r\}$$

$$\theta_r(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N}^* / X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_{n+r}(\omega) = r\}$$

avec la notation $\inf(\emptyset) := +\infty$.

1. Montrer que T est une v.a à valeurs dans \mathbb{N}^* . Déterminer sa loi et calculer son espérance.
2. Montrer, pour tout $x \in]0, 1[$, la relation

$$\sum_{k=r-1}^{+\infty} C_k^{r-1} x^{k-r+1} = \frac{1}{(1-x)^r}$$

3. Montrer que la v.a. τ_r est une v.a. réelle discrète de loi (dite loi de Pascal de paramètres r, p)

$$P(r, p) := \sum_{k=r}^{+\infty} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \delta_k.$$

Vérifier que $\mathbb{P}(\tau_r = +\infty) = 0$.

4. Montrer que la v.a. θ_r est une v.a. réelle discrète de loi (dite loi de Binomiale négative de paramètres r, p)

$$I(r, p) := \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r-1}^{r-1} p^r (1-p)^k \delta_k$$

Vérifier que $\mathbb{P}(\theta_r = +\infty) = 0$.

Exercice 4

On choisit au hasard une corde sur un cercle de rayon r et de centre O . On désire calculer la probabilité p pour qu'elle soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit (de longueur $\sqrt{3}r$). Ceci est équivalent à calculer la probabilité pour que la distance de la corde, choisie au hasard, au centre du cercle soit inférieure à $\frac{r}{2}$.

On considère que la longueur de la corde est déterminée par la donnée de la distance H de son milieu au centre du cercle. On suppose que H suit une loi uniforme sur $[0, r]$.

- 1) Quelle est la loi de la longueur de la corde ?
- 2) Quelle est son espérance et sa variance ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'elle soit plus grande que $\sqrt{3}r$?

Exercice 5

Soient X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et ε une variable aléatoire réelle indépendante de X de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$.

1. Montrer que la variable $Y := \varepsilon X$ est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
2. Prouver que les v.a.r. X, Y vérifient la relation $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ mais le couple (X, Y) n'est pas indépendant.

Exercice 6

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de loi $\mathbb{P}_{(X, Y)} = \left(\alpha e^{-\frac{1}{2}(x^2 - xy + y^2)} \right)$.

1. Déterminer la constante α et la matrice de dispersion du couple (X, Y) .
2. Préciser les lois respectives des variables aléatoires réelles X et Y .
3. Le couple de variables aléatoires réelles (X, Y) est-il indépendant.

Exercice 7

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer les lois respectives des variables aléatoires réelles $U := X + Y + Z$, $V := 2X - Y - Z$ et $W := Y - Z$.
 2. Montrer que les variables aléatoires réelles $X - Y, Y - Z$ et $Z - X$ sont chacune indépendantes de la v.a.r. U .
 3. Le vecteur aléatoire de dimension 3, (U, V, W) , est-il gaussien. Préciser sa loi.
 4. Le triplet de v.a.r. (U, V, W) est-il indépendant.
 5. On note φ la fonction caractéristique de X^2 . On admettra que, pour tout réel x , $\varphi(x) = (1 - 2ix)^{-\frac{1}{2}}$. On pose $T := (X - Y)^2 + (Y - Z)^2 + (Z - X)^2$.
- (i) Vérifier, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, l'égalité

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2 \left(x - \frac{1}{2}(x + y) \right)^2 + \frac{3}{2}(y - z)^2$$

- (ii) Exprimer la fonction caractéristique $\Phi_{(U, T)}$ du vecteur aléatoire (U, T) à l'aide de φ .
- (iii) En déduire l'expression de $\Phi_{(U, T)}(u, t)$ en fonction de u et t .

Université F. H. B
UFR-MI: Licence 3

Année universitaire 2015-2016

PROBABILITES AVANCEES
Fiche 3 : Fonctions caractéristiques, Convergences

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (X_1, \dots, X_n) une suite indépendante de v.a.r. toute de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit respectivement les v.a.r. moyenne empirique et variance empirique par

$$\bar{X}_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

$\chi\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$
↑

1. Montrer que la v.a.r. X_1^2 suit la loi $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ appelée aussi loi du Khi-deux à 1 degré de liberté $\chi^2(1)$.
2. En utilisant la fonction caractéristique des lois Gamma, déduire que la loi de la v.a.r. $\sum_{k=1}^n X_k^2$ est $\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$ appelée aussi loi du Khi-deux à n degrés de liberté $\chi^2(n)$.
3. Montrer que $S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2$.
4. En utilisant la loi forte des grands nombres, étudier les convergences presque-sure des suites \bar{X}_n et S_n^2 .

Exercice 2

Soit $(X_n; n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que la moyenne empirique $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ converge dans L^2 vers la moyenne $\frac{1}{\lambda}$.
2. On pose $Y_n := \sqrt{n} (\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda})$. Montrer que Y_n converge en loi vers une gaussienne dont on déterminera ses paramètres.

Exercice 3

On considère $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0; \theta]$, où $\theta > 0$. On pose pour $n \geq 1$, $X_n := \max_{1 \leq i \leq n} U_i$.

1. Montrer que $(X_n, n \geq 1)$ converge p.s. et déterminer sa limite. On pourra calculer $\mathbb{P}(|X_n - \theta| > \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.
2. Étudier la convergence en loi de la suite $(n(\theta - X_n), n > 1)$.

Exercice 4

1. En considérant une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer à l'aide de la loi faible des grands nombres

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

où f est une application continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

2. Soit $(Y_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha > 0$. Déterminer la loi de $Z_n := \sum_{k=1}^n Y_k$.
3. Montrer que la suite des moyennes empiriques $(\bar{Y}_n = \frac{Z_n}{n}, n \geq 1)$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera. Calculer (en s'inspirant de la question 1),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $\alpha > 0$ et f est une application continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Université F. H. B
UFR-M1: Licence 3

Année universitaire 2016-2017

PROBABILITES AVANCEES

Fiche 1 : Modèle probabiliste, Loi d'un vecteur aléatoire, Moment d'un vecteur aléatoire

Exercice 1

1) On considère $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité dénombrable. Soit h une application définie sur Ω et on note $\Omega' := h(\Omega)$. Démontrer que l'application \mathbb{P}'_h définie sur $\mathcal{P}(\Omega')$ par

$$(\forall A' \in \mathcal{P}(\Omega')) \quad \mathbb{P}'_h(A') = \mathbb{P}(h^{-1}(A'))$$

est une probabilité sur Ω' .

2) On sait que si X est une variable aléatoire réelle et si φ est une fonction affine, $\mathbb{E}[\varphi(X)] := \varphi[\mathbb{E}(X)]$. Déterminer la loi de probabilité de X si l'égalité reste vraie pour $\varphi(x) = x^2$

Exercice 2

Soient n, N_1, N trois entiers naturels non nuls tel que $N_1 \leq N$, $(a_{j,k})$ une suite double de nombre réels choisis dans $[0, 1]$ et $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}^n$ tel que

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{X_1} = B(N_1/N) \text{ (loi de Bernoulli)} \\ (\forall (j, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}) \quad \mathbb{P}(X_{j+1} = 1 | X_1 + \dots + X_j = k) = a_{j,k} \end{cases}$$

1) Déterminer la loi de probabilité de $Z_n = X_1 + \dots + X_n$ dans les deux cas suivants:

(a)

$$a_{j,k} = \begin{cases} \frac{N_1}{N} & \text{si } j \geq 1 \text{ et } 0 \leq k \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b)

$$a_{j,k} = \begin{cases} \frac{N_1 - k}{N - j} & \text{si } 1 \leq j \leq N - 1, \quad 0 \leq k \leq N_1 \text{ et } 0 \leq j - k \leq N - N_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2) Calculer l'espérance de Z_n dans chaque cas.

Exercice 3

Un joueur dispose d'un dé et d'une pièce. Le dé est équilibré et la pièce a une probabilité p ($0 < p < 1$) de tomber sur pile. Le joueur lance d'abord le dé, puis lance la pièce autant de fois que le résultat du dé. Il compte enfin le nombre de piles obtenus au cours des lancers. Les résultats de chaque lancer sont indépendants.

On note $q = 1 - p$ et on note également D la variable aléatoire correspondant à la valeur du dé et X celle correspondant au nombre de piles obtenus à la fin du jeu.

- 1) $\forall (i, j) \in \{1, \dots, 6\}^2$, déterminer la loi de $(X = j | D = i)$
- 2) Calculer $\mathbb{P}(X = 6)$ et $\mathbb{P}(X = 1)$
- 3) Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{q}{6} \left(\frac{1 - q^6}{1 - q} \right)$
- 4) Sachant qu'on a obtenu aucun pile au cours du jeu, quelle était la probabilité que le résultat du dé était 1. Évaluer cette quantité quand $p = q = \frac{1}{2}$

Exercice 4

- 1) Vérifier si la fonction suivante

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2\ln 2} e^{-t} \ln(1 + e^t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité. Si oui déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire associée à cette densité.

- 2) Vérifier si la fonction suivante

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est la fonction de répartition d'une variable à densité. Si oui, en donner une densité.

Exercice 5

- 1) Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition est strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$.
- 2) X une variable aléatoire est dite symétrique si $-X$ a même loi que X .
 - (a) Si X a une densité f , montrer que X est symétrique si et seulement si $f(x) = f(-x)$ pour presque tout x .
 - (b) Donner un exemple de loi symétrique.
 - (c) Montrer que X est symétrique si et seulement si le nombre $\mathbb{E}(e^{iux})$ est réel $\forall u \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

- 1) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
- (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
- (b) Déterminer une densité de X^2 .
- (c) Déterminer une densité de X^3 .
- 2) Soit une variable aléatoire dont la densité est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (a) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- (b) On pose $Y = |X|$. Déterminer la fonction de répartition G de Y puis montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y .
- 3) Soit X une variable aléatoire admettant une densité f . On suppose que X prends ses valeurs dans \mathbb{R}^+ . Soit $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X).
- (a) Déterminer la loi de Y .
- (b) Montrer que $\mathbb{E}(Y)$ existe si et seulement si $\mathbb{E}(X)$ existe.
- (c) Montrer que si $\mathbb{E}(X)$ existe alors : $E(Y) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y + 1)$.

Exercice 7

- 1) Montrer que $\forall z \geq 0, 0 \leq 1 - e^{-z} \leq z$.
- 2) En déduire que $\forall y > 0, x \mapsto \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- 3) Pour tout $y > 0$, on pose $F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x^2 y}}{x^2} dx$. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer $F'(y)$. (On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$).
- 4) En déduire $F(y)$ à une constante près.
- 5) Calculer cette constante en regardant $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(1/n)$.

Exercice 8

- 1) Soient Y une variable aléatoire réelle de densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Montrer que $1/Y$ a même loi que Y .
- 2) Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 de densité $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1 + (1+x^2)^2 y^2}$. Calculer la loi de X .

- 3) Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 de densité $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} e^{-y^2/2}$
Calculer la loi de X/Y . Cette variable est-elle intégrable

Exercice 9

Soit $\delta > 0$ et Y de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- 1) Montrer que

$$\mathbb{P}(Y > \delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx$$

En déduire que,

$$\mathbb{P}(Y > \delta) \leq \frac{1}{\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2}}$$

- 2) Vérifier que $\mathbb{P}(Y > \delta) = \int_{\delta}^{+\infty} y \left(\frac{1}{y} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right) dy$. Déduire que $\mathbb{P}(Y > \delta) \geq \delta \int_{\delta}^{+\infty} F(y) dy$

avec $F(y) = \int_y^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx$.

- 3) Montrer que $\int_{\delta}^{+\infty} F(y) dy = -\delta \int_{\delta}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy + \frac{e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

- 4) Finalement, déduire que

$$\mathbb{P}(Y > \delta) \geq \frac{1}{\left(\delta + \frac{1}{\delta}\right)} \frac{e^{-\frac{\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Exercice 10

- 1) Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1 - |x|) I_{\{|x| \leq 1\}}$
- 2) Soit X la variable aléatoire de densité $\sqrt{(2/\pi)} e^{-x^2/2} I_{\{x > 0\}}$.
 - (a) Soit $\varphi : u \in]-1, +\infty[\rightarrow \varphi(u) = \mathbb{E}(e^{-uX})$. Écrire $\varphi(u)$ sous forme d'une intégrale sur \mathbb{R} et montrer que φ est continue.
 - (b) Donner la limite de $\varphi(n)$ quand n entier positif tend vers l'infini.
 - (c) Donner la densité de la variable aléatoire $Y = e^{-X}$.

Université F. H. B
UFR-MI: Licence 3

Année universitaire 2016-2017

PROBABILITES AVANCEES

Fiche 2 : Indépendance, Conditionnement, Changement de variables, Variables gaussiennes

Exercice 1

- 1) Soient U une variable aléatoire exponentielle $\mathcal{E}(1)$ et V une loi uniforme sur $[0, 1]$. On suppose que les variables U, V sont indépendantes. Soient $X = \sqrt{U} \cos(2\pi V)$ et $Y = \sqrt{U} \sin(2\pi V)$. Calculer la loi du couple (X, Y) . Les variables X et Y sont-elles indépendantes.
- 2) Soient U, V deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$.
- (a) Quelle est la loi de $\sup(U, V)$.
- (b) Quelle est la loi de $U + V$.
- 3) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.

Exercice 2

- 1) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Indication: on calculera $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ en effectuant un changement en coordonnées polaires.
- 2) Calculer $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-(x+y)^2} e^{-(x-y)^2} dx dy$.
- 3) Soit (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^2$ de densité $f(x, y) = \frac{2}{\pi} e^{-x(1+y^2)} I_{x \geq 0, y \geq 0}$.
- (a) Calculer la densité de X .
- (b) Calculer la densité de Y .
- 4) Soit (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{R}^+)^2$ de densité $f(x, y) = \frac{e^{-(xy)^{1/4}}}{4\pi(y\sqrt{x} + x\sqrt{y})} I_{x \geq 0, y \geq 0}$.
- (a) Soient $U = (XY)^{1/4}$, $V = \frac{x}{y}^{1/4}$. Quelle est la densité de (U, V) .
- (b) Les variables U et V sont-elles indépendantes.
- (c) Donner les densités de U et V .

Exercice 3

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires et celles de densité

$$f(x, y) = C \exp\left[-\frac{1}{72}(9x^2 - 36xy + 40y^2)\right] \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}$$

où C est un réel strictement positif.

- 1) Montrer que (X, Y) est une variable gaussienne dont déterminera la matrice de dispersion D et la constante C .
- 2) Déterminer les lois marginales de X et Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes. Justifier.
- 3) Déterminer la densité conditionnelle de X sachant $Y = y$. Calculer $\mathbb{E}[X|Y = y]$ et en déduire $\mathbb{E}[X|Y]$.

Exercice 4

Soient X, Y, Z trois variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Déterminer les lois respectives des variables aléatoires réelles $U := X + Y + Z$, $V := 2X - Y - Z$ et $W := Y - Z$.
 2. Montrer que les variables aléatoires réelles $X - Y$, $Y - Z$ et $Z - X$ sont chacune indépendantes de la v.a.r. U .
 3. Le vecteur aléatoire de dimension 3, (U, V, W) , est-il gaussien. Préciser sa loi.
 4. Le triplet de v.a.r. (U, V, W) est-il indépendant.
 5. On note φ la fonction caractéristique de X^2 . On admettra que, pour tout réel x , $\varphi(x) = (1 - 2ix)^{-1/2}$. On pose $T := (X - Y)^2 + (Y - Z)^2 + (Z - X)^2$.
- (i) Vérifier, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, l'égalité

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2 \left(x - \frac{1}{2}(x + y) \right)^2 + \frac{3}{2}(y - z)^2$$

- (ii) Exprimer la fonction caractéristique $\Phi_{(U, T)}$ du vecteur aléatoire (U, T) à l'aide de φ
- (iii) En déduire l'expression de $\Phi_{(U, T)}(u, t)$ en fonction de u et t .

Exercice 5

Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur Gaussien à valeur dans \mathbb{R}^2 de loi $\mathcal{N}(m, \Sigma)$ avec $m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ avec $|\rho| < 1$. On pose $U = X - \rho Y$ et $V = \sqrt{1 - \rho^2} Y$.

- 1) Donner la loi de Z .
- 2) Déterminer les lois de U et V . Les v.a. sont-elles indépendantes.
- 3) (a) Montrer que $\mathbb{E}(Y^4) = 3$.
- (b) Calculer $\mathbb{E}(U^2 V^2)$, $\mathbb{E}(UV^3)$, $\mathbb{E}(V^4)$.
- (c) En déduire $\mathbb{E}(X^2 Y^2)$.

Université F. H. B
UFR-MI: Licence 3

Année universitaire 2016-2017

PROBABILITES AVANCEES

Fiche 3 : Fonctions caractéristiques, Convergences

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (X_1, \dots, X_n) une suite indépendante de v.a.r. toute de même loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On définit respectivement les v.a.r. moyenne empirique et variance empirique par

$$\bar{X}_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$$

1. Montrer que la v.a.r. X_1^2 suit la loi $\gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ appelée aussi loi du Khi-deux à 1 degré de liberté $\chi^2(1)$.
2. En utilisant la fonction caractéristique des lois Gamma, déduire que la loi de la v.a.r. $\sum_{k=1}^n X_k^2$ est $\gamma(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$ appelée aussi loi du Khi-deux à n degré de liberté $\chi^2(n)$.
3. Montrer que $S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2$.
4. En utilisant la loi forte des grands nombres, étudier les convergences presque-sure des suites \bar{X}_n et S_n^2 .

Exercice 2

Soit $(X_n; n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que la moyenne empirique $\bar{X}_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ converge dans L^2 vers la moyenne $\frac{1}{\lambda}$.
2. On pose $Y_n := \sqrt{n} (\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda})$. Montrer que Y_n converge en loi vers une gaussienne dont on déterminera ses paramètres.

Exercice 3

On considère $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$, où $\theta > 0$. On pose pour $n \geq 1$, $X_n := \max_{1 \leq i \leq n} U_i$.

1. Montrer que $(X_n, n \geq 1)$ converge p.s. et déterminer sa limite. On pourra calculer $\mathbb{P}(|X_n - \theta| > \varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$.
2. Étudier la convergence en loi de la suite $(n(\theta - X_n), n > 1)$.

Exercice 4

1. En considérant une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculer à l'aide de la loi faible des grands nombres

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

où f est une application continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

2. Soit $(Y_k, k \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\alpha)$, $\alpha > 0$. Déterminer la loi de $Z_n := \sum_{k=1}^n Y_k$.

3. Montrer que la suite des moyennes empiriques $(\bar{Y}_n = \frac{Z_n}{n}, n \geq 1)$ converge en loi vers une limite que l'on déterminera. Calculer (en s'inspirant de la question 1),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $\alpha > 0$ et f est une application continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Année universitaire 2015-2016
UFHB/UFRMI : Licence 3
Travaux dirigés : Analyse de la variance

Exercice 1 : Nous voulons tester quatre types de carburateurs : A_1 , A_2 , A_3 et A_4 . Pour chaque type de carburateur nous disposons de six pièces qui sont montées successivement en parallèle sur quatre voitures que nous supposons avoir des caractéristiques parfaitement identiques. Le tableau ci-dessous indique pour chacun des essais la valeur d'un paramètre lié à la consommation :

Essai	A_1	A_2	A_3	A_4
1	21	23	18	20
2	24	23	19	21
3	25	32	28	25
4	20	23	19	15
5	34	32	24	29
6	17	15	14	9

1. Dans cette partie nous ne tenons pas compte de la possible influence de l'ordre dans lequel les essais ont été effectués.
 - (a) Proposer une méthode statistique permettant d'étudier l'influence des modalités du facteur Carburateur sur la Consommation. Énoncer le modèle et les hypothèses nécessaires au modèle que vous projetez d'utiliser. Ce modèle comporte-t-il des répétitions ?
 - (b) Il y a-t-il des différences entre les Carburateur ? Quelles sont les estimations des coefficients du modèle ? Si nécessaire, comparer les différents niveaux du facteur Carburateur.
2. Après avoir effectué l'analyse de la première partie nous apprenons que tous les essais numéro 1 ont été réalisés un lundi, tous les essais numéro 2 un mardi... tous les essais numéro 6 un samedi. Nous décidons donc dans cette partie de tenir compte de la possible influence de l'ordre de réalisation des essais, c'est-à-dire du facteur Essai.
 - (a) Proposer une méthode statistique permettant d'étudier conjointement l'influence du facteur Carburateur et du facteur Essai sur la consommation. Énoncer le modèle et les hypothèses nécessaires au modèle que vous projetez d'utiliser. Ce modèle comporte-t-il des répétitions ?

- (b) Il y a-t-il des différences entre les carburateurs? Il y a-t-il des différences dues à l'ordre de réalisation des essais? Quelles sont les estimations des paramètres du modèle? Si nécessaire, comparer les différents niveaux du facteur Carburateur ainsi que les différents niveaux du facteur Essai.

Exercice 2 : Nous testons l'influence de différents régimes alimentaires sur des rats de laboratoire. Le gain de poids des rats est désigné par la variable Poids, exprimée en grammes, les deux facteurs sont les variables Calorie et Vitamine. La variable Calorie vaut 1 si les rats n'ont pas suivi un régime hypercalorique et 2 s'ils ont suivi un tel régime hypercalorique. La variable Vitamine vaut 1 si les rats n'ont pas reçu de compléments vitaminés et 2 s'ils ont reçu de tels compléments.

Calorie	Vitamine	Poids	Calorie	Vitamine	Poids
1	1	84	1	1	66
1	2	62	1	2	59
2	1	87	2	1	89
2	2	103	2	2	90
1	1	66	1	1	56
1	2	84	1	2	74
2	1	92	2	1	101
2	2	107	2	2	116
1	1	82	1	1	79
1	2	73	1	2	74
2	1	77	2	1	95
2	2	95	2	2	112
1	1	62	1	1	89
1	2	75	1	2	74
2	1	88	2	1	91
2	2	96	2	2	92

1. Quels modèles d'analyse de la variance à deux facteurs pouvez-vous utiliser pour étudier ces données? Nous décidons de retenir, pour répondre aux questions suivantes, le modèle le plus complet parmi ceux dont il est possible de se servir. Rappeler les hypothèses associées au modèle.
2. Procéder à l'étude à l'aide du logiciel R.
3. Quelles sont les estimations des paramètres du modèle?
4. Devons-nous réaliser des tests de comparaisons multiples? Si oui, pour que(s) facteur(s)? Le(s) faire.

Exercice 3 : Les 21 candidats à un oral ont été répartis au hasard entre 3 examinateurs. Le premier examinateur a fait passer l'oral à 6 étudiants, le second à 8 étudiants et le troisième à 7 étudiants. Les notes qu'ils ont eues sont :

Examineur	Kouko	Kofi	Adou
	10,11,11,12,13,15	8,11,11,13,14,15,16,16	10,13,14,14,15,16,16

La variation des moyennes est-elle due au hasard ou est-elle un réel "effet d'examineur" ?

Exercice 4 : Le tableau suivant présente les salaires annuels bruts d'individus au bout de cinq ans d'expériences selon leur niveau de formation initiale. Qu'en pensez-vous ?

Licence	Master	Doctorat
39.9	39.7	25.6
32.5	32.6	48.2
36	25.7	47.3
28.1	35.4	29.3
22.4	29.1	35.6
23.5	40.3	26.4
24.6	27.6	28.6
21.5	22.1	47.5
24.2	28.9	35.8
23.7	31.6	42.6
30.7	32.6	45

Exercice 5 : On a vu comment comparer les populations d'un même facteur. Supposons maintenant qu'un expérimentateur souhaite comparer l'influence de trois régimes alimentaires et de deux exploitations sur la production laitière. Les résultats expérimentaux sont dans le tableau suivant. Qu'en pensez-vous ?

Exploitation ↓ Régime alimentaire →	A	B	C
1	7	36	2
2	13	44	18

EXAMEN CALCUL DIFFERENTIEL 2015-2016 ; session 1Exercice 1 :

soient E_n l'espace vectoriel des polynômes réels et de degré inférieurs ou égaux à n .

Étudions la différentiabilité des applications suivantes définies sur E_n .

$$F: E_n \rightarrow E_{2n} \quad ; \quad G: E_n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \mapsto P' - P^2 \quad ; \quad P \mapsto \int_0^1 (P^2(x) - P'(x)) dx$$

* Différentiabilité de F

soient $P, P_0 \in E_n$. On $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ où $a_i \in \mathbb{R}$ d'ic $\overline{0, n}$

considérons la norme infinie sur E_n : $\|P\|_{E_n} = \sup_{i \in \overline{0, n}} |a_i|$.

$\forall P, H \in E_n$ on a:

$$F(P+H) = (P+H)' - (P+H)^2 = F(P) + H' - 2PH - H^2.$$

$$\Rightarrow F(P+H) - F(P) = H' - 2PH - H^2.$$

$$\text{posons } L(H) = H' - 2PH.$$

- montrons que L est linéaire continue.

soient $H, Q \in E_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a } L(H + \alpha Q) = (H + \alpha Q)' - 2P(H + \alpha Q) = H' - 2PH + \alpha(Q' - 2PQ)$$

$$= L(H) + \alpha L(Q)$$

Donc L est linéaire.

- E_n est un espace de dimension finie $n+1$ et L est linéaire sur E_n , donc L est continue.

$$\text{posons } \varphi(H) = -\frac{1}{\|H\|_{E_n}} H^2 \quad \forall H \in E_n \setminus \{0_{E_n}\}$$

$$\text{Soit } H(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \overline{0, n}.$$

$$\text{alors } H^2(x) = \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{j+k=i} a_j a_k \right) x^i, k, j \in \overline{0, i}.$$

$$\begin{aligned} \|H^2\|_{E_n} &= \sup_{i \in \overline{0, 2n}} \left| \sum_{j+k=i} a_j a_k \right| \leq \sup_{i \in \overline{0, 2n}} \sum_{k+j=i} |a_j| \cdot |a_k| \\ &\leq \sup_{i \in \overline{0, 2n}} \sum_{k+j=i} \|H\|_{E_n}^2 \\ &\leq \sup_{i \in \overline{0, 2n}} (i+1) \|H\|_{E_n}^2 \\ &\leq (2n+1) \|H\|_{E_n}^2. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\|H^2\|_{E_{2n}}}{\|H\|_{E_n}} \leq (2n+1) \|H\|_{E_n}.$$

$$\Rightarrow \|\varphi(H)\|_{E_{2n}} \leq (2n+1) \|H\|_{E_n}$$

Comme $\lim_{H \rightarrow 0_{E_n}} \|H\|_{E_n} = 0$, on a $\lim_{H \rightarrow 0_{E_n}} \|\varphi(H)\|_{E_{2n}} = 0_{E_{2n}}$.

Par suite $\lim_{H \rightarrow 0_{E_n}} \varphi(H) = 0_{E_{2n}}$.

En somme, F est différentiable en p . et comme le choix de p est quelconque sur E_n , alors F est différentiable sur E_n et $\forall H \in E_n$, $F'_p \cdot H = H' - 2pH$.

$$\underline{F'_p \cdot H = H' - 2pH.}$$

* Différentiabilité de G

$$G: E_n \rightarrow \mathbb{R}, p \mapsto G(p) = \int_0^1 (p^3(t) - p^2(t)) dt.$$

$\forall p \in E_n$, $p^3 - p^2$ est un polynôme sur \mathbb{R} donc continue

sur \mathbb{R} , d'où $p^3 - p^2$ est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

Ainsi, $\forall P \in E_n$, $G(P)$ existe et appartient à \mathbb{R} .

soit $P, H \in E_n$. On a:

$$\begin{aligned} G(P+H) &= \int_0^1 [(P+H)^2(t) - (P+H)(t)] dt \\ &= G(P) + \int_0^1 [3P^2(t)H(t) - 2P(t)H(t)] dt + \int_0^1 [3P(t)H^2(t) + H^3(t) - H^2(t)] dt \end{aligned}$$

Posons $L(H) = \int_0^1 [3P^2(t)H(t) - 2P(t)H(t)] dt$.

- étudions la linéarité et la continuité de L .

soient $H_1, H_2 \in E_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Par linéarité de l'intégrale de Riemann sur \mathbb{R} , on montre que: $L(H_1 + \alpha H_2) = L(H_1) + \alpha L(H_2)$. Alors L est linéaire. L est continue (car $\dim E_n = n+1 < +\infty$ et L est linéaire)

Posons $\varphi(H) = \frac{1}{\|H\|_{E_n}} \int_0^1 [3P(t)H^2(t) + H^3(t) - H^2(t)] dt \quad \forall H \in E_n \setminus \{0_{E_n}\}$

$$\begin{aligned} |\varphi(H)| &\leq \frac{1}{\|H\|_{E_n}} \int_0^1 |3P(t)H^2(t) + H^3(t) - H^2(t)| dt \\ &\leq \frac{1}{\|H\|_{E_n}} \int_0^1 (3\|P\|_{\infty} \|H\|_{\infty}^2 + \|H^3\|_{\infty} + \|H^2\|_{\infty}) dt \quad \text{ou} \end{aligned}$$

$$\|P\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$$

$$\|H^2\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |H^2(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |H(t)|^2 = \left(\sup_{t \in [0,1]} |H(t)| \right)^2 = \|H\|_{\infty}^2$$

soit $H(t) = \sum_{i=0}^m a_i t^i$.

$$\|H\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |H(t)| = \sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{i=0}^m a_i t^i \right| \leq \sup_{t \in [0,1]} \sum_{i=0}^m |a_i| t^i \leq \sum_{i=0}^m |a_i|$$

$$\|H\|_{\infty} \leq \sum_{i=0}^n \sup_{t \in \overline{0,1}} |a_i| \leq (n+1) \sup_{t \in \overline{0,1}} |a_i| = (n+1) \|H\|_{E_n}$$

$$\text{D'où } |\varphi(H)| \leq \frac{(n+1)^2 \|H\|_{E_n}^2}{\|H\|_{E_n}} \left(3(n+1) \|P\|_{E_n} + (n+1) \|H\|_{E_n+1} \right)$$

$$|\varphi(H)| \leq (n+1)^2 \|H\|_{E_n} \left(3(n+1) \|P\|_{E_n} + (n+1) \|H\|_{E_n+1} \right)$$

Comme $\lim_{H \rightarrow 0_{E_n}} \|H\|_{E_n} = 0_n$, on a $\lim_{H \rightarrow 0_{E_n}} |\varphi(H)| = 0_n$.

Par suite $\lim_{H \rightarrow 0_{E_n}} \varphi(H) = 0_{\mathbb{R}}$.

En somme, G est différentiable en $p \in E_n$, comme le choix de p est quelconque sur E_n alors G est différentiable sur E_n et $\forall H \in E_n$, on a: $G'(p) \cdot H = \int_0^1 [3P^2(t)H(t) - 2P(t)H(t)] dt$

Exercice 3

soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application différentiable, on a:

$\|f(x)\| \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$ où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne issue du produit scalaire euclidien \langle, \rangle de \mathbb{R}^2 . $f(x)$ est injective pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

soit $a \in \mathbb{R}^2$. On pose: $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \|f(x) - a\|^2 = \langle f(x) - a, f(x) - a \rangle$

1) Calculons $g'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

considérons $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$; $\gamma: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (f(x) - a, f(x) - a)$; $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, (\gamma \circ \alpha)(x) = \gamma(\alpha(x)) = \gamma(f(x) - a, g(x) - a) = g(x),$$

donc $g = \gamma \circ \alpha$.

* différentiabilité de α

On a $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ avec $\alpha_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$.

soit $\alpha_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ alors $\alpha_1 = f + \alpha_2$
 $x \mapsto -\alpha$

On sait que f est différentiable. α_2 est une application constante sur \mathbb{R}^2 donc différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Alors α_1 est différentiable sur \mathbb{R}^2 . On en déduit que α est différentiable sur \mathbb{R}^2 et $\forall x \in \mathbb{R}^2$ on a : $\alpha'_1(x) = f'(x) + 0 = f'(x)$
 d'où $\alpha'(x) = (f'(x), f'(x))$.

* différentiabilité de γ

γ est le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^2 donc γ est une application bilinéaire. Montrons que γ est continue.

D'après l'inégalité de Schwarz on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ donc } \gamma \text{ est continue.}$$

γ est bilinéaire et continue, d'après le cours γ est différentiable et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. On a :

$$\gamma'(x, y) \cdot (h_1, h_2) = \gamma(x, h_2) + \gamma(h_1, y) = \langle x, h_2 \rangle + \langle h_1, y \rangle.$$

Par conséquent $g = \gamma \circ \alpha$ est différentiable et

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \forall v \in \mathbb{R}^2, \quad g'(x) \cdot v = J'(f(x)) \cdot (f'(x) \cdot v) \\ = J'(f(x)-a, g(x)-\alpha) \cdot (f'(x) \cdot v, g'(x) \cdot v)$$

$$g'(x) \cdot v = J(f(x)-a, g'(x) \cdot v) + J(g'(x) \cdot v, f(x)-a) \\ = \langle f(x)-a, g'(x) \cdot v \rangle + \langle g'(x) \cdot v, f(x)-a \rangle \\ = 2 \langle f(x)-a, g'(x) \cdot v \rangle$$

D'où $\forall x, v \in \mathbb{R}^2, \quad g'(x) \cdot v = 2 \langle f(x)-a, f'(x) \cdot v \rangle$

2) Démontrons que g atteint sa borne inférieure en un point $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et que $g'(x_0) = 0$.

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x) = \|f(x)-a\|^2. \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad g(x) \geq 0.$$

Alors $\{g(x) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ est une partie non vide et minorée de \mathbb{R} donc elle admet une borne inférieure β .
montrons que $\exists x_0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x_0) = \beta$.

montrons que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} |g(x)| = +\infty$. C'est $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$
(on $g \geq 0$).

$$\text{Or on a } g(x) = \langle f(x)-a, f(x)-a \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle + \langle f(x), -a \rangle + \\ \langle -a, f(x) \rangle + \langle -a, -a \rangle = \|f(x)\|^2 + \|a\|^2 - 2 \langle f(x), a \rangle$$

D'après Schwartz on a $|\langle f(x), a \rangle| \leq \|f(x)\| \cdot \|a\|$.

$$\Rightarrow \langle f(x), a \rangle \leq \|f(x)\| \cdot \|a\| \Rightarrow -2 \langle f(x), a \rangle \geq -2 \|f(x)\| \cdot \|a\|$$

$$\Rightarrow g(x) \geq \|f(x)\|^2 + \|a\|^2 - 2 \|f(x)\| \cdot \|a\| = (\|f(x)\| - \|a\|)^2$$

Or $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$ alors $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ tel que $\|x\| > \eta \Rightarrow |g(x)| > \varepsilon$
 $\Rightarrow g(x) > \varepsilon$.

Donc pour $\varepsilon > 0$ fixe (très grand), $\exists \eta > 0$ tel que

$$\|x\| > \eta \Rightarrow g(x) > \varepsilon.$$

$$\text{Alors } \inf_{x \in \mathbb{R}^2} g(x) = \inf_{x \in B_p(0, \eta)} g(x).$$

Comme $B_p(0, \eta)$ est une partie convexe fermée et bornée de \mathbb{R}^2 donc elle est compacte.

Comme g est différentiable sur \mathbb{R}^2 , alors g est continue sur \mathbb{R}^2 donc en particulier sur $B_p(0, \eta)$ et est à valeur dans \mathbb{R} . Donc g atteint sa borne inférieure sur $B_p(0, \eta)$.

$$\text{Alors } \exists x_0 \in B_p(0, \eta) \text{ tel que } g(x_0) = \inf_{x \in B_p(0, \eta)} g(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} g(x) = B.$$

$g(x_0) = B$. g est différentiable sur \mathbb{R}^2 et admet un minimum au point $x_0 \in \mathbb{R}^2$, alors x_0 est un point critique de g c'est-à-dire $g'(x_0) = 0$.

3) Dédouirons que f est surjective.

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{R}^2, g'(x_0) \cdot v = 0.$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}, \langle f(x_0) - \alpha, f'(x_0) \cdot v \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x_0) - \alpha, f'(x_0) \cdot v \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$$

Comme $f'(x_0)$ est injective alors d'après le théorème du rang, $\text{rang } f'(x_0) = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \ker f'(x_0) = 2 - 0 = 2$.

D'où $f'(x_0)$ est surjective. Alors $\langle f(x_0) - \alpha, f'(x_0) \cdot v \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^2, \langle f(x_0) - \alpha, u \rangle = 0 \Rightarrow f(x_0) - \alpha = 0 \Rightarrow$$

$f(x_0) = \alpha$. Ainsi, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^2, \exists x_0 \in \mathbb{R}^2 / f(x_0) = \alpha$. Donc f est surjective.

EXAMEN CALCUL DIFFERENTIEL 2015-2016: 2^{ème} session.Exercice 1: Énoncer proprement:(i) Le théorème des accroissements finis pour les fonctions numériques;

Théorème: soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. si f est définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.

(ii) Le théorème des accroissements finis pour les fonctions à valeurs vectorielles;

Théorème: soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E ; $f: U \rightarrow F$ une application différentiable sur U , a et b deux éléments distincts de U .

si $[a, b] = \{x \in E; x = (1-t)a + tb, t \in [0, 1]\} \subset U$, alors

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \|b - a\|_E \sup_{t \in [0, 1]} \|f'((1-t)a + tb)\|,$$

(iii) Le théorème des fonctions implicites;

Théorème: soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$, $(a, b) \in U$, $T: U \rightarrow G$ une application continue en (a, b) . Supposons que:

(i) $T(a, b) = 0$;

(ii) $\frac{\partial T}{\partial y}$ existe et continue;

(iii) $\frac{\partial T}{\partial y}(a, b) \in \text{ISOM}(F, G)$;

Alors

Alors, il existe un voisinage ouvert A de a dans E ,
 un voisinage ouvert B de b dans F tels que pour
 tout x dans A l'équation $T(x, y) = 0$ ait dans B
 une et une seule solution $\varphi(x) = y$ où l'application
 $\varphi: A \rightarrow B$
 $x \mapsto \varphi(x)$ est continue et est telle que $\varphi(a) = b$.

(iv) Le théorème d'inversion locale pour les fonctions de
 classe C^1 .

Théorème: soient E, F deux espaces de Banach, U un ouvert
 de E , $a \in U$, $f: U \rightarrow F$ une application de classe
 C^1 et $b = f(a)$. Supposons que $f'(a) \in \text{Isom}(E, F)$.

Alors, il existe un voisinage ouvert V_a de a dans E ,
 un voisinage ouvert V_b de b dans F tels que la
 restriction $f|_{V_a}$ de f à V_a soit un C^1 -difféomorphisme
 sur V_b .

EXERCICE 2 :

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $\theta: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$
 $u \mapsto \theta(u) = u \circ u = u^2$

une application.

1) montrons que θ est de classe C^1 et admet une différentielle en tout point u_0 .

$$\begin{aligned} \text{soit } \varphi: \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{L}(E) \\ (u, v) &\mapsto \varphi(u, v) = uv \text{ et} \\ \psi: \mathcal{L}(E) &\rightarrow \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \\ u &\mapsto \psi(u) = (u, u). \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\theta(u) = \varphi \circ \psi(u)$.

• Soient $u, v, w \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} - \varphi(u, v + \lambda w) &= u \circ (v + \lambda w) \\ &= uv + \lambda uw \text{ (car } u \text{ est linéaire)} \\ &= \varphi(u, v) + \lambda \varphi(u, w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \varphi(u + \lambda w, v) &= (u + \lambda w) \circ v \\ &= uv + \lambda wv \\ &= uv + \lambda vw \\ &= \varphi(u, v) + \lambda \varphi(w, v). \end{aligned}$$

Alors φ est bilinéaire.

On a $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$.

$$\|\varphi(u, v)\|_{\mathcal{L}(E)} = \|uv\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \|u\|_{\mathcal{L}(E)} \times \|v\|_{\mathcal{L}(E)} \Rightarrow \varphi \text{ est}$$

continue.

• On a $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u)) = (u, u)$

d'où $\varphi_1 = \varphi_2 = \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$.

Par conséquent φ_1 et φ_2 sont linéaire, et donc sont de classe C^∞ . Alors φ est de classe C^∞ .

Conclusion : On a $\theta = \varphi \circ \psi$: composée d'applications de classe C^∞ donc θ est de classe C^∞ , en particulier θ est de classe C^1 .

* Calculons la différentielle de θ

soient $u_0, u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} \theta'(u_0) \cdot u &= \varphi'(\varphi(u_0)) \circ \varphi'(u_0) \cdot u \\ &= \varphi'(u_0, u_0) \circ \varphi'(u_0) \cdot u \end{aligned}$$

On a $\varphi'(u_0) \cdot u = (\varphi_1'(u_0) \cdot u, \varphi_2'(u_0) \cdot u)$

$\varphi_1 = \varphi_2 = \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$ donc $\varphi'(u_0) \cdot u = (u, u)$.

On a $\varphi'(u_0, u_0) \cdot (u, u) = \varphi(u_0, u) + \varphi(u, u_0)$ [d'après le cours]

$$= u_0 \circ u + u \circ u_0$$

donc $\theta'(u_0) \cdot u = u_0 \circ u + u \circ u_0$

2°) montrons qu'il existe un réel ε tel que $\forall v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|\text{Id}_E - v\| < \varepsilon$, l'équation $u \circ u = v$ admet une solution dans $\mathcal{L}(E)$.

$$\|\text{Id}_E - v\| < \varepsilon \Rightarrow v \in \mathcal{B}(\text{Id}_E, \varepsilon)$$

$$u \circ u = v \Rightarrow \theta(u) = v$$

$$\text{On a } \theta(\text{Id}_E) = \text{Id}_E \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E.$$

$$\theta'(\text{Id}_E) \cdot u = \text{Id}_E \circ u + u \circ \text{Id}_E = u + u = 2u. \quad \forall u \in \mathcal{Y}(E)$$

$$\Rightarrow \theta'(\text{Id}_E) = 2\text{Id}_{\mathcal{Y}(E)} \in \text{ISOM}(\mathcal{Y}(E)).$$

Comme θ est de classe C^1 , le théorème d'inversion locale donne : il existe A un voisinage ouvert de Id_E et $\varepsilon > 0$ tels que θ soit un C^1 -difféomorphisme de A sur $B(\text{Id}_E, \varepsilon)$. par conséquent, $\forall v \in B(\text{Id}_E, \varepsilon)$, $\exists u \in A$ tel que $\theta(u) = v$.

3°) $E = \mathbb{R}^2$, On considère les éléments u et h de $\mathcal{Y}(E)$ dont les matrices dans la base canonique de \mathbb{R}^2 sont respectivement : $u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Calculons $\theta'(u) \cdot h$.

d'après ce qui précède on a $\theta'(u) \cdot h = hu + uh$.
soit A la matrice de $\theta'(u) \cdot h$ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 .

$$\text{Alors } A = v \cdot u + u \cdot v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi, } \underline{\theta'(u) \cdot h = 0_{\mathcal{Y}(\mathbb{R}^2)}}$$

5) ...

supposons par absurde qu'il existe un voisinage w de Id_E dans $\mathcal{Y}(E)$, w , un voisinage de $u \in \mathcal{Y}(E)$ et $\psi: w \rightarrow w$, une application telle que $\psi(\text{Id}_E) = u$ et $\psi(w) \circ \psi(w) = w$ $\forall w \in w$.

$$\text{On a : } \psi(w) \circ \psi(w) = w \Rightarrow \theta(\psi(w)) = w. \quad \forall w \in w. \quad (1)$$

(1) $\Rightarrow \forall u \in U; \forall h \in \mathcal{L}(E), \exists m \alpha$

$$\theta'(\psi(u)) \circ \psi'(u) \cdot h = h$$

U est un voisinage de Id_E dans $\text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$.

Pour $u = \text{Id}_E$. On a :

$$\theta'(\psi(\text{Id}_E)) \circ \psi'(\text{Id}_E) \cdot h = h.$$

$$\Rightarrow \theta'(u) \circ \psi'(\text{Id}_E) \cdot h = h.$$

$$\Rightarrow \theta'(u) \circ \psi'(\text{Id}_E) = \text{Id}_{\mathcal{L}(E)}$$

Donc $\theta'(u)$ est surjective. et comme son est en dimension finie alors $\theta'(u)$ est bijective.

D'après 2) $\theta'(u) \cdot h = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$$\text{Ce qui donne } h = \theta'(u)^{-1}(0_{\mathcal{L}(E)}) = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Cela est absurde car $h \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Conclusion : Il n'existe pas de fonction différentiable ψ , définie sur un voisinage U de Id_E et à valeurs dans un voisinage U_1 de u dans $\mathcal{L}(E)$, telle que $\psi(\text{Id}_E) = u$ et $\psi(u) \circ \psi(u) = u$ pour tout $u \in U$.

UFR-MI :L3

Année 2017-2018

EXAMEN CALCUL DIFFERENTIEL

Session 1

Exercice 1

1. Montrons que $\exists! g \in Z(E, F)$ tel que $h \in V(0_E)$ de E .

$$f(a+h) = f(a) + g(h) + |h|_E \varphi(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0_E} \varphi(h) = 0_F$$

$$\varphi(h) = \frac{f(a+h) - f(a) - g(h)}{|h|_E}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0_E} \varphi(h) &= \lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{f(a+h) - f(a) - g(h)}{|h|_E} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{f(a+h) - f(a)}{|h|_E} - \lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{g(h)}{|h|_E} \\ &= f'(a).h - \lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{g(h)}{|h|_E} \end{aligned}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0_E} \varphi(h) = 0 \text{ car } \lim_{h \rightarrow 0_E} \frac{g(h)}{|h|_E} = f'(a).h$$

D'où la vérification de l'hypothèse.

2. Exprimons que f est différentiable au point a .

D'après ce qui précède f est différentiable au point a car $\exists! g \in Z(E, F)$ continue telle que $f(a+h) = f(a) + g(h) + |h|_E \varphi(h)$.

3. Démontrons que si f est différentiable au point a , elle est continue en a .

. Supposons que f est différentiable au point a .

$$\Rightarrow f(a+h) = f(a) + g(h) + |h|_E \varphi(h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0_E} f(a+h) - f(a) = \lim_{h \rightarrow 0_E} (g(h) + |h|_E \varphi(h)) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0_E} f(a+h) = f(a) \text{ d'où } f \text{ est continue en } a$$

5) Démontrons que k est différentiable et $\forall a, u \in E, b, v \in F$, donner l'expression de l'image de (u, v) par la différentielle de k au point (a, b)

Soit $a, u \in E, b, v \in F$

$$\begin{aligned} k((a, b) + (u, v)) &= k((a + u, b + v)) \\ &= k(a, b) + k(a, v) + k(u, b) + k(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k((a, b) + (u, v)) - k(a, b) &= k(a, v) + k(u, b) + k(u, v) \\ &= k(a, v) + k(u, b) + k(u, v) \times \frac{|(u, v)|}{|(u, v)|} \end{aligned}$$

On a : $\lim_{(u, v) \rightarrow 0_{E \times F}} \frac{k(u, v)}{|(u, v)|} = 0$ car $\frac{k(u, v)}{|(u, v)|} \leq |k| |(u, v)|$. D'où k est différentiable.

Ainsi $k'(a, b) \cdot (u, v) = k(a, v) + k(u, b)$

Exercice 2

1. Énonçons le théorème des accroissements finis par f .

Soient E, F deux espaces vectoriels normés,

U ouvert de E, a, b distincts dans U .

$f : U \rightarrow F$ différentiable.

Si $[a, b] \subset U \Rightarrow \|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f'(1 - ta + tb)\|$

2. a) Énonçons le théorème des fonctions implicites pour T .

Soient E , espace vectoriel normé, F, G deux espaces de Banach.

U un ouvert de $E \times F$;

$T : U \rightarrow G$ continue en $(a, b), (a, b) \in U$

Supposons que :

i) $T(a, b) = 0$

ii) $\frac{\partial T}{\partial y}$ existe et continue dans U

iii) $\frac{\partial T}{\partial y}(a, b) \in I \text{ som}(F, G)$

Alors il existe A un voisinage ouvert de a , il existe B un voisinage ouvert de b , il existe C un voisinage ouvert de 0 tel que $\forall x \in A, T(x, y) = 0$ ait dans B une unique solution $y = \varphi(x)$. En outre l'application :

$\varphi : A \rightarrow B$

$x \mapsto \varphi(x)$ est continue et est telle que $\varphi(a) = b$.

2.b) Conditions minimales que la fonction implicite φ est différentiable.
Il faut que T soit différentiable de φ en un point a .

$$\forall a \in A, \varphi'(a) = -[T'_y(a, \varphi(a))]^{-1} \circ T'_a(a, \varphi(a))$$

2.c) Énonçons le théorème d'inversion locale pour f

Soit E, F deux espaces de Banach

U ouvert de $E, f : U \rightarrow F, a \in U$

Supposons que $f \in C^k (k \geq 1)$ et $f'(a) \in \text{Isom}(E, F)$, alors $\exists A$ un voisinage ouvert de $a \exists B$ un voisinage ouvert de b tel que la restriction de f_a de f dans A soit un C^k difféomorphisme dans B . De plus $\forall y \in B$,

$$\begin{aligned} (\varphi_a^{-1})'(y) &= \varphi'_a(\varphi_a^{-1}(y)) \\ &= \varphi'_a(x) \text{ ou } y = \varphi(x) \end{aligned}$$

Exercice 3

$n \in \mathbb{N}^*, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de $C^1, k > 0$ tel que
 $\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n \textcircled{*}$

1. Montrons que f est injective

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = f(y)$, alors $\|f(x) - f(y)\| = 0$ or

$$\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|$$

On a donc $0 \geq k\|x - y\| \Rightarrow \|x - y\| = 0$ car $k > 0$

$\Rightarrow x = y$. Donc f est injective.

2. Montrons que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans \mathbb{R}^n

Soient $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de point de $f(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers β dans \mathbb{R}^n .

Comme $\forall k \in \mathbb{N}, y_k \in f(\mathbb{R}^n), \exists x_k \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_k) = y_k$ ($(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant convergente, elle est de Cauchy.

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $p, q > N_\varepsilon \Rightarrow \|y_p - y_q\| < k_\varepsilon$.

$$\Rightarrow \|f(x_p) - f(x_q)\| \geq k_\varepsilon$$

$$\textcircled{*} \Rightarrow k\|x_p - x_q\| \leq \|f(x_p) - f(x_q)\| \leq k_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \frac{k_\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $p, q > N_\varepsilon \Rightarrow \|x_p - x_q\| > \varepsilon$.
 D'où $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R}^n qui est un espace complet.
 Donc $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente dans \mathbb{R}^n vers α .

$$\text{On a : } \beta = \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k\right)$$

Car f est continue et $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = \alpha \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow f\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k\right) = f(\alpha).$$

Donc $\beta = f(\alpha)$.

D'où $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.

3. Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^n, f'(x)$ est injective.

Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $f'(x).h = 0_{\mathbb{R}^n}$. f étant différentiable en x , on a :

$$f(x + th) - f(x) = |t| \|h\| \varphi(th) + f'(x).(th) \text{ avec } \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(th) = 0, (t \neq 0)$$

$$\Rightarrow f(x + th) - f(x) = |t| \|h\| \varphi(th)$$

$$\textcircled{*} \Rightarrow k \|(x + th) - x\| \leq \|f(x + th) - f(x)\| \\ \leq |t| \|h\| \varphi(th)$$

$$\Rightarrow k|th| \leq |t| \|h\| \varphi(th)$$

$$\Rightarrow k|t| \|h\| \leq |t| \|h\| \varphi(th)$$

$$\Rightarrow k \|h\| \leq \|h\| \varphi(th)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} k \|h\| \leq \lim_{t \rightarrow 0} \|h\| \varphi(th) = 0$$

$$\Rightarrow k \|h\| \leq 0$$

$$\text{Puisque } k > 0 \Rightarrow \|h\| = 0$$

$$\Rightarrow h = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

D'où $\text{Ker } f'(x) = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \Leftrightarrow f'(x)$ est injective.

4. Montrons que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $y \in f(\mathbb{R}^n)$. Alors $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$.

$f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ car $\dim \mathbb{R}^n = n < +\infty$. Alors $f'(x) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach, f est une application de \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^n , $f'(x) \in \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, alors d'après le théorème d'inversion locale, $\exists U \in v(x)$ et $\exists V \in v(y)$ tels que la restriction f_x de f à U soit un difféomorphisme de U sur V .

Alors $V \subset f(\mathbb{R}^n)$. Or V est un voisinage de chacun de y . Donc $f(\mathbb{R}^n)$ est un voisinage de chacun de ses points, donc $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert dans \mathbb{R}^n .

* Dédouons que f est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .

- Montrons que f est bijective de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .

$f(\mathbb{R}^n)$ est à la fois ouvert et fermé dans \mathbb{R}^n qui est convexe, donc $f(\mathbb{R}^n) \in [\mathbb{R}^n, \emptyset]$. Or $f(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset \Rightarrow f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. Alors f est surjective. Or f est injective d'après (1). D'où f est bijective. De plus f est de classe \mathcal{C}^1 .

- Montrons que f^{-1} est de classe \mathcal{C}^1

Différentiabilité de f^{-1}

Soit $y \in \mathbb{R}^n$, alors $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = y$. D'après le raisonnement précédent $\exists U \in v(x)$ et $\exists V \in v(y)$ tels que $f|_U : U \rightarrow V$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

$(f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$ est de classe \mathcal{C}^1 .

Donc $(f|_U)^{-1}$ est différentiable en y et sa différentielle en y est continue. Alors f^{-1} est différentiable en y , est continue. Ceci étant vrai, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, on a : f^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 .

Normalement f est bijective de \mathcal{C}^1 et f^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 .

Alors f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^n .

Université FHB - Cocody Année Universitaire 2018-2019
UFR Mathématique-Informatique

LICENCE 3 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES
Examen Seconde Session

Exercice 1 : (Cours)

1) Enoncé du Théorème de Cauchy - Lipschitz - Picard (2.5 points) :

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , U un ouvert de E , et $f : I \times U \rightarrow E$ une application continue telle que : $\exists M > 0$ vérifiant : $\forall (t, x, y) \in I \times U \times U, \|f(t, x) - f(t, y)\|_E \leq M \|x - y\|_E$.

Alors, $\forall (t_0, x_0) \in I \times U, \exists \varepsilon > 0$ et $\exists ! u :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\cap I \rightarrow U$ qui est dérivable

et vérifie :
$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)); \forall t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

2) Posons $v(t) = \int_0^t u(s) ds, \forall t \in [0, T]$.

v est dérivable sur $]0, T[$ et on a : $v'(t) = u(t), \forall t \in]0, T[$ et $v(0) = 0$. On aussi $v'(t) \leq at + kv(t), \forall t \in]0, T[$ (1).

Posons $w(t) = e^{-kt} v(t), \forall t \in [0, T]$.

Alors : $w'(t) = e^{-kt} (v'(t) - kv(t)), \forall t \in]0, T[$.

Donc (1) $\Leftrightarrow v'(t) - kv(t) \leq at$

$\Leftrightarrow e^{-kt} (v'(t) - kv(t)) \leq ate^{-kt}$

$\Leftrightarrow w'(t) \leq ate^{-kt}, \forall t \in]0, T[$

$w'(t)$ étant continue sur $]0, T[$ on a : $\forall t \in]0, T[, w(t) = \int_0^t w'(s) ds \leq \int_0^t ase^{-ks} ds$

car $w(0) = 0$

donc $w(t) \leq \frac{a}{k^2} (1 - e^{-kt} - kte^{-kt})$ et par suite $v(t) \leq \frac{a}{k^2} (e^{kt} - 1 - kt)$

et donc : $u(t) \leq at + kv(t) \leq at + \frac{a}{k} (e^{-kt} - 1 - kt) = \frac{a}{k} (e^{-kt} - 1)$ (2.5 points)

Exercice 2 :

1) Posons $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 11 & 6 & 3 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

Alors $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ et $(E) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) + B(t)$. (1.5 points)

$t \mapsto B(t)$ est continue sur \mathbb{R} , donc (E) est linéaire

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*, I_n = [t_0 - n, t_0 + n]$ est compact, donc (E) admet une et une seule solution $X^{(n)}$ sur I_n telle que $X^{(n)}(t_0) = X_0$ (voir cours).

$I_n \subset I_{n+1}$ donc l'unicité de $X^{(n)}$ donne que $X^{(n+1)}|_{I_n} = X^{(n)}$.

$\mathbb{R} = \cup I_n$ Posons $X(t) = X^{(n)}(t), \forall t \in I_n$.

X est bien définie sur \mathbb{R} et est l'unique solution de (E) sur \mathbb{R} telle que

$$X(t_0) = X_0$$

(2 points)

3) a) Le polynôme caractéristique de A est $P_A(X) = -(X+1)(X-2)^2$

$$\text{Spec}_A = \{-1, 2\}$$

(0.5 points)

b) Sous-espaces propres E_{-1}, E_2 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow (A+I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 7 & 6 \\ 11 & 11 & 3 \\ -1 & -1 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 7x + 7y + 6z = 0 \\ 11x + 11y + 3z = 0 \\ -x - y + 12z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ points})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow (A-2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 7 & 6 \\ 11 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -8x + 7y + 6z = 0 \quad (1) \\ 11x - 4y + 3z = 0 \quad (2) \\ -x - y - 3z = 0 \quad (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 5y = 0 : (2) + (3) \\ -10x + 5y = 0 : (1) + 2 * (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 6z = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = -x \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ points})$$

$$(A-2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 7y + 6z = 5 \\ 11x - 4y + 3z = 5 \\ x + y + 3z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x + 5y = 5 : (1) - 2 * (3) \\ 10x - 5y = 5 : (2) - (3) \\ x + y + 3z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -x + 2 \end{cases}$$

$$\text{Pour } x = 0 \text{ on a : } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ points})$$

$$\text{Posons } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Alors } A = PJP^{-1}$$

4) $R(t, t_0) = \exp((t-t_0)A) = P \exp((t-t_0)J) P^{-1}$ (0.5 points)

$$\text{Posons } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$J = D + N \text{ avec } DN = ND \text{ donc } \exp((t-t_0)J) = \exp((t-t_0)D) + (t-t_0)N \\ \exp((t-t_0)J) = \exp((t-t_0)D) \times \exp((t-t_0)N) \quad (0.5 \text{ points})$$

$$N^2 = 0 \Rightarrow \exp((t-t_0)N) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t-t_0)^k N^k = I_3 + (t-t_0)N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t-t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp((t-t_0)D) = \begin{pmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix} \quad (0.5 \text{ points})$$

$$\exp((t-t_0)J) = \begin{pmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} & (t-t_0)e^{2(t-t_0)} \\ 0 & 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix} \quad (0.5 \text{ points})$$

Calcul de P^{-1}

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ -x+2y-z=b \\ -y+2z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x+a \\ z=\frac{1}{2}(-x+a+c) \\ -x+2(-x+a)-\frac{1}{2}(-x+a+c)=b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=-x+a \\ z=\frac{1}{2}(-x+a+c) \\ -\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}c=b \Rightarrow x=\frac{1}{5}(3a-2b-c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{5}(2a+2b+c) \\ z=\frac{1}{5}(a+b+3c) \\ -\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}c=b \Rightarrow x=\frac{1}{5}(3a-2b-c) \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (0.5 \text{ points})$$

$$R(t, t_0) = \frac{1}{5} P \begin{pmatrix} 3e^{-(t-t_0)} & -2e^{-(t-t_0)} & -e^{-(t-t_0)} \\ (2+t-t_0)e^{2(t-t_0)} & (2+t-t_0)e^{2(t-t_0)} & (1+3t-3t_0)e^{2(t-t_0)} \\ e^{2(t-t_0)} & e^{2(t-t_0)} & 3e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

$$R(t, t_0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } a_{11} = 3e^{-(t-t_0)} + (2+t-t_0)e^{2(t-t_0)} \quad a_{12} = -2e^{-(t-t_0)} + (2+t-t_0)e^{2(t-t_0)}$$

$$a_{13} = -e^{-(t-t_0)} + (1+3t-3t_0)e^{2(t-t_0)} \quad a_{21} = -3e^{-(t-t_0)} + (3+2t-2t_0)e^{2(t-t_0)}$$

$$a_{22} = 2e^{-(t-t_0)} + (3+2t-2t_0)e^{2(t-t_0)} \quad a_{23} = e^{-(t-t_0)} + (1+6t-6t_0)e^{2(t-t_0)}$$

$$a_{31} = (t_0-t)e^{2(t-t_0)} \quad a_{32} = (t_0-t)e^{2(t-t_0)} \quad a_{33} = (5-3t+3t_0)e^{2(t-t_0)}$$

$$R(t, t_0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{-(t-t_0)} + (2+t-t_0)e^{2(t-t_0)} & -2e^{-(t-t_0)} + (2+t-t_0)e^{2(t-t_0)} & -e^{-(t-t_0)} + (1+3t-3t_0)e^{2(t-t_0)} \\ -3e^{-(t-t_0)} + (3+2t-2t_0)e^{2(t-t_0)} & 2e^{-(t-t_0)} + (3+2t-2t_0)e^{2(t-t_0)} & e^{-(t-t_0)} + (1+6t-6t_0)e^{2(t-t_0)} \\ (t_0-t)e^{2(t-t_0)} & (t_0-t)e^{2(t-t_0)} & (5-3t+3t_0)e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}$$

$$5) R(t, 0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3e^{-t} + (2+t)e^{2t} & -2e^{-t} + (2+t)e^{2t} & -e^{-t} + (1+3t)e^{2t} \\ -3e^{-t} + (3+2t)e^{2t} & 2e^{-t} + (3+2t)e^{2t} & e^{-t} + (1+6t)e^{2t} \\ -te^{2t} & -te^{2t} & (5-3t)e^{2t} \end{pmatrix} \quad (0.5 \text{ points})$$

$$X(t) = R(t, 0)X(0) + \int_0^t R(t, s)B(s)ds \quad (1 \text{ points})$$

$$R(t, 0)X(0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2e^{-t} + (2+t)e^{2t} \\ 2e^{-t} + (3+2t)e^{2t} \\ -te^{2t} \end{pmatrix} \quad (0.5 \text{ points})$$

$$R(t,s)B(s) = \frac{s}{5} \begin{pmatrix} 3e^{-(t-s)} + (2+t-s)e^{2(t-s)} \\ -3e^{-(t-s)} + (3+2t-2s)e^{2(t-s)} \\ (s-t)e^{2(t-s)} \end{pmatrix} \quad (0.5 \text{ points})$$

$$* \int_0^t s e^{-(t-s)} ds = e^{-t} \int_0^t s e^s ds = e^{-t} \int_0^t s (e^s)' ds = e^{-t} \left[s e^s \Big|_0^t - \int_0^t e^s ds \right]$$

$$\int_0^t s e^{-(t-s)} ds = e^{-t} [t e^t - e^t + 1] = t - 1 + e^{-t}$$

$$* \int_0^t s(2+t-s)e^{2(t-s)} ds = e^{2t} \int_0^t [(2+t)s - s^2] \left(-\frac{1}{2}e^{-2s}\right)' ds$$

$$= e^{2t} \left[\left[-(2+t)s - s^2 \right] \frac{1}{2} e^{-2s} \Big|_0^t + \frac{1}{2} \int_0^t (2+t-2s) e^{-2s} ds \right]$$

$$= e^{2t} \left[-t e^{-2t} + \frac{1}{2} \int_0^t (2+t-2s) \left(-\frac{1}{2}e^{-2s}\right)' ds \right]$$

$$= e^{2t} \left[-t e^{-2t} - \frac{1}{4} \left[(2+t-2s) e^{-2s} \right]_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2s} ds \right]$$

$$= e^{2t} \left[-t e^{-2t} - \frac{1}{4} (2-t) e^{-2t} + \frac{1}{4} (2+t) + \frac{1}{4} \left[e^{-2s} \right]_0^t \right]$$

$$= e^{2t} \left[-t e^{-2t} - \frac{1}{4} (2-t) e^{-2t} + \frac{1}{4} (2+t) + \frac{1}{4} e^{-2t} - \frac{1}{4} \right]$$

$$= e^{2t} \left[\left(-t - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \right) e^{-2t} + \frac{1}{4} (1+t) \right]$$

$$\int_0^t s(2+t-s)e^{2(t-s)} ds = \frac{1}{4} (-3t-1) e^{2t} + \frac{1}{4} (1+t) e^{2t}$$

$$x(t) = \frac{1}{5} \left[-2e^{-t} + (2+t)e^{2t} + 3t - 3 + 3e^{-t} - \frac{1}{4} (3t+1) + \frac{1}{4} (1+t) e^{2t} \right]$$

En utilisant la résolvante, la solution $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (E) telle que $X(0) = (0, 1, 0)$ est :

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{5} \left[e^{-t} + \frac{1}{4} (5t+9) e^{2t} + \frac{1}{4} (9t-13) \right]} \quad (1.5 \text{ points})$$

UFR-MI : L3

Année 2018-2019

CORRECTION : GEOMETRIE 3 SESSION 1

EXERCICE 1

- (a) On vérifie d'abord que $\Omega = (1, 1, -1) \in U = S_1 \cap S_2$.
 $\nabla f_1(\Omega) = (2, 2, -1)$ et $\nabla f_2(\Omega) = (3, -3, 1)$ sont non colinéaires, alors il existe un ouvert V contenant Ω tel que $U \cap V$ soit le support d'une courbe Γ .
- (b) La matrice ci-dessous venant des deux gradients

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang égal à 2. Comme $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, il existe, d'après le théorème des fonctions implicites, des intervalles ouverts de \mathbb{R} , I, J, K avec $1 \in I, 1 \in J, -1 \in K$, et des fonctions, $\varphi \in C^1(K, I), \psi \in C^1(K, J)$ tels que $V = I \times J \times K$ et $\forall (x, y, z) \in V$; on a

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = \varphi(z) \text{ et } y = \psi(z), z \in K$$

Ainsi $\gamma : K \rightarrow V, z \rightarrow M = \gamma(z) = (\varphi(z), \psi(z), z)$ est une représentation cartésienne de Γ au voisinage de Ω .

Calculons $\gamma'(-1), \gamma''(-1)$

$$(S_0) : \begin{cases} \varphi^2(z) + \psi^2(z) + z^2 - 3 = 0 \\ \varphi^3(z) - \psi^3(z) + z^3 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$(S') : \begin{cases} \varphi' \varphi + \psi' \psi + z = 0 \\ \varphi' \varphi^2 - \psi' \psi^2 + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{D'où } \gamma'(-1) = (0, 1, 1)$$

$$(S'') : \begin{cases} \varphi'' \varphi + \varphi'^2 + \psi'' \psi + \psi'^2 + 1 = 0 \\ \varphi'' \varphi^2 + 2\varphi' \varphi' \varphi - \psi'' \psi^2 - 2\psi' \psi' \psi + 2z = 0 \end{cases}$$

D'où $\gamma''(-1) = (1, -3, 0)$

Une équation de P_Ω est $\det(\overrightarrow{\Omega M}, -\gamma'(-1), \gamma''(-1)) = 0$

$$\text{soit } \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-1 & 1 & -3 \\ z+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou encore} \quad 3x + y - z - 5 = 0$$

EXERCICE 2

- (E_1) devient $X^2Y + 2Z^2(-Y) = 0$
 $\det(L(X), L(X), L(Z)) \neq 0$
 $F(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z) = \lambda^3 F(X, Y, Z)$
 S_1 est un cône de sommet $\Omega(0, -1, -3)$ de directrice d'équations (E_1)
 et $Z = 0$
- (E_2) devient $X^2Y - 3ZX = 0$
 $\det(L(X), L(Y), L(Z)) \neq 0$ et $F(\lambda x, Y, \lambda z) = \lambda^2 F(X, Y, Z)$
 S_2 est un conoïde d'axe $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ de plan directeur
 $y + z + 1 = 0$ et de directrice d'équations E_2 et $x = 0$
- Posons $X = x + y, Y = y - z + 1, Z = 2x + 3y - z + 1$ et $Z' = x + z - 1$
 Le système $\{L(X), L(Y)\}$ est libre
 $\det((L(X), L(Y), L(Z))) = 0 \Rightarrow L(z) = aL(X) + bL(Y)$
 $\det((L(X), L(Y), L(Z'))) = 0 \Rightarrow L(Z') = a'L(X) + b'L(Y)$
 (E_3) devient : $XY - 3(2X + Y)(X - Y)^2 = 0$
 S_3 cylindre d'axe $\mathbb{R}(-1, 1, 1)$, de directrice E_3 et $x = 0$

EXERCICE 3

1. $\vec{n} = \overrightarrow{n(u, v)} = \frac{\partial \pi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \pi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -(1 + \cos u) \sin v \\ (1 + \cos u) \cos v \end{pmatrix}$
 $\overrightarrow{n(u, v)} = -(1 + \cos u) \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$ avec $(u, v) \in [0, \pi[x] - \pi, \pi[$
 $\overrightarrow{n(u, v)} \neq \vec{0}$ car $H = \|\overrightarrow{n(u, v)}\| = 1 + \cos u > 0$ car $u \neq \pm\pi$ donc
 Σ régulière.
2. $E = 1, F = 0, G = (1 + \cos u)^2$ d'où $\Phi_1 = du^2 + (1 + \cos u)^2 dv^2$
 $\frac{\partial^2 \pi}{\partial u^2} = (-\cos u \cos v) \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial u \partial u} = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ -\sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{\partial^2 \pi}{\partial v^2} = \begin{pmatrix} -(1 + \cos u) \cos v \\ -(1 + \cos u) \sin v \\ 0 \end{pmatrix}$

$D = 1 + \cos u, D' = 0, D'' = (1 + \cos u) \cos u$; or $H = 1 + \cos u$ d'où
 $\Phi_2 = du^2 + \cos u dv^2$

3. $\det(\text{mat } \Phi_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos u \end{vmatrix} = \cos u.$

Si v est quelconque et :

(i) $u \in [0, \frac{\pi}{2}[$, alors le point $\pi(u, v)$ est elliptique;

(ii) $u = \frac{\pi}{2}$, alors le point $\pi(u, v)$ est parabolique;

(ii) $u \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, alors le point $\pi(u, v)$ est hyperbolique.

4. Équation des asymptotes.

$\Phi_2 = 0$ d'où $du^2 + \cos u dv^2 = 0.$

UFHB-UFRMI

Année Académique

Niveau: L3

2015/2016

Examen de Probabilités avancées

Session 1

Correction

Exercice 1 (8 points)

Trois personnes A , B , et C jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée, de la façon suivante : A et B jouent en premier et le gagnant, par exemple A , rencontre C . Si A gagne également cette seconde partie, il est déclaré vainqueur. Sinon C rencontre B , s'il gagne, C est déclaré vainqueur, sinon B rencontre à nouveau A , C'est-à-dire qu'à chaque fois le gagnant d'une partie rencontre le perdant de la partie précédente, et il faut gagner deux parties consécutives pour être déclaré vainqueur. On cherche la probabilité de gain de chacun des trois joueurs.

On considère les événements ci-dessous:

$V_k(A)$ désigne l'événement: " A sort vainqueur du jeu à la $k^{\text{ème}}$ partie."

$V(A)$ est l'événement: " A sort vainqueur du jeu."

On définit de même $V_k(B)$, $V_k(C)$, $V(B)$, $V(C)$.

1) Calculer $\mathbb{P}(V_k(A))$ en fonction de k

Un résultat de cette expérience aléatoire est une suite $\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\cdots$ où ω_n désigne le joueur qui est sorti vainqueur de la $n^{\text{ème}}$ partie. Par exemple :

AA signifie que A a gagné les deux premières parties donc est vainqueur du jeu.

ACC signifie que A a gagné la première partie, a perdu contre C et ensuite C a battu B . Donc C est vainqueur.

Les éventualités pour lesquelles A est vainqueur du jeu sont des suites de longueur $3k+2$, $k \in \mathbb{N}$ si la suite démarre par une victoire de A (AA , $ACBAA$, $ACBACBAA$, etc.) ou de longueur $3k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$ si la suite commence par une victoire de B ($BCAA$, $BCABCAA$, etc.).

Dans tout ce qui suit on suppose que les parties sont indépendantes.

Ainsi

$$\mathbb{P}(V_k(A)) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin (3\mathbb{N} + 2) \cup (3\mathbb{N}^* + 1) \\ (\frac{1}{2})^k & \text{si } k \in (3\mathbb{N} + 2) \cup (3\mathbb{N}^* + 1) \end{cases}$$

2) Exprimer $V(A)$ en fonction des $V_k(A)$

On a

$$V(A) = \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} V_{3k+2}(A) \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_{3k+1}(A) \right)$$

3) Déduire $\mathbb{P}(V(A))$

On a d'après la question précédente que:

$$\mathbb{P}(V(A)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(V_{3k+2}(A)) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(V_{3k+1}(A)).$$

D'où

$$\mathbb{P}(V(A)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k+1}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(V(A)) = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{8}} + \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{14}.$$

4) Calculer $\mathbb{P}(V(B))$

Par raison de symétrie

$$\mathbb{P}(V(B)) = \mathbb{P}(V(A))$$

5) Calculer $\mathbb{P}(V(C))$ en suivant la même procédure que dans les questions 1), 2) et 3).

Les éventualités pour lesquelles C est vainqueur du jeu sont de la forme $ACC, ACBACC$, etc. ou $BCC, BCABCC$, etc. Ainsi ces éventualités sont de longueur $3k$.

Notons A_1 (resp. B_1) l'événement: A (resp. B) gagne la première partie. On a

$$V(C) = (V(C) \cap A_1) \cup (V(C) \cap B_1).$$

D'autre part, par symétrie on a

$$\mathbb{P}(V(C) \cap A_1) = \mathbb{P}(V(C) \cap B_1).$$

Maintenant,

$$\mathbb{P}(V(C) \cap A_1) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_{3k}\right) \cap A_1\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3k} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}.$$

Ainsi

$$\mathbb{P}(V(C)) = 2\mathbb{P}(V(C) \cap A_1) = \frac{2}{7}.$$

6) Est-ce qu'on peut jouer indéfiniment?

On a

$$\mathbb{P}(V(A)) + \mathbb{P}(V(B)) + \mathbb{P}(V(C)) = 1,$$

donc on ne peut pas jouer indéfiniment. Le jeu finira par s'arrêter avec la victoire de l'un des joueurs.

Exercice 2 (6 points)

Soient X une variable aléatoire réelle (v.a.r.) de loi gaussienne centrée réduite et Z une v.a.r., indépendante de X , uniformément distribuée sur $\{-1, 1\}$.

1) Vérifier que ZX est gaussienne

Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} F_{ZX}(u) &= \mathbb{P}(ZX < u) \\ &= \mathbb{P}(ZX < u, Z = 1) + \mathbb{P}(ZX < u, Z = -1) \\ &= \mathbb{P}(X < u, Z = 1) + \mathbb{P}(-X < u, Z = -1) \\ &= \mathbb{P}(X < u) \frac{1}{2} + \mathbb{P}(-X < u) \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Comme X et $-X$ ont la même loi, on a $\mathbb{P}(X < u) = \mathbb{P}(-X < u)$. Donc

$$\begin{aligned} F_{ZX}(u) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X < u) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(-X < u) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X < u) + \mathbb{P}(-X < u)) \\ &= \frac{1}{2}(2\mathbb{P}(X < u)) \\ &= \mathbb{P}(X < u). \end{aligned}$$

D'où, X et ZX ont la même fonction de répartition c'est à dire la même loi. Par conséquent ZX est de loi gaussienne centrée réduite.

- 2) En considérant la somme $X + ZX$, montrer que le couple (Z, ZX) n'est pas gaussien. Supposons que (Z, ZX) est de loi gaussienne. Dans ce cas, $X + ZX$ est de loi gaussienne aussi. Maintenant, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + ZX = 0) &= \mathbb{P}(X(1 + Z) = 0) \\ &\geq \mathbb{P}(Z = -1) \\ &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent $X + ZX$ ne peut pas avoir de densité car sinon $\mathbb{P}(X + ZX = 0) = 0 \geq \frac{1}{2}$. Donc elle doit être constante, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, (Z, ZX) n'est pas gaussien.

- 3) Montrer que X et ZX ne sont pas indépendantes

Comme X et ZX sont de lois gaussiennes si elles étaient indépendantes le vecteur (Z, ZX) serait gaussien, ce qui n'est pas le cas. D'où X et ZX ne sont pas indépendantes.

Remarque. Il est facile de voir que $Cov(X, ZX) = 0$ sans pour autant que X et ZX soient indépendantes.

Exercice 3 (6 points) Trois personnes A, B , et C arrivent à la poste en même temps pour téléphoner. Il y a deux cabines téléphoniques qu'occupent immédiatement A et B ; C remplace le premier sorti. A, B , et C quittent chacun la poste immédiatement après avoir téléphoné. On suppose que les temps d'occupation de la cabine par A, B et C sont des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre α .

On note X_A le temps d'occupation de la cabine par la personne A . On définit de même X_B et X_C .

- 1) Exprimer l'événement $D(A)$: " A sort le dernier" en fonction de X_A, X_B et X_C . Calculer la probabilité que A sorte le dernier.

A sort le dernier s'il met plus de temps à téléphoner que C après la sortie de B . Donc

$$D(A) = \{X_A - X_B > X_C\}.$$

Pour calculer $\mathbb{P}(D(A))$, nous proposons deux méthodes.

Méthode 1

On définit $D(B)$ et $D(C)$ par analogie avec $D(A)$. Par raison de symétrie on a

$$(0.1) \quad \mathbb{P}(D(A)) = \mathbb{P}(D(B)).$$

On a aussi

$$D(A) \cup D(B) = \{|X_A - X_B| > X_C\}.$$

Déterminons la loi de $|X_A - X_B|$. Pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, posons $\Delta = \{(x, y) \in]0, +\infty[^2; x > y + u\}$. Comme (X_A, X_B) et (X_B, X_A) ont la même loi, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_A - X_B| > u) &= 2\mathbb{P}(X_A > X_B + u) \\ &= 2 \int_{\Delta} f_{(X_A, X_B)}(x, y) dx dy \\ &= 2 \int_{\Delta} \alpha^2 e^{-\alpha(x+y)} dx dy \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha y} \left(\int_{x>y+u} \alpha e^{-\alpha x} dx \right) dy \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha y} e^{-\alpha(y+u)} dy \\ &= e^{-\alpha u} \int_0^{+\infty} 2\alpha e^{-2\alpha y} dy \\ &= e^{-\alpha u}. \end{aligned}$$

Donc $|X_A - X_B|$ et X_C sont indépendantes et ont la même loi exponentielle de paramètre α . Par conséquent

$$\mathbb{P}(D(A) \cup D(B)) = \mathbb{P}(|X_A - X_B| > X_C) = \mathbb{P}(X_C > |X_A - X_B|) = \frac{1}{2}$$

car

$$\mathbb{P}(|X_A - X_B| = X_C) = 0.$$

En effet pour toutes variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi, les vecteurs aléatoires (X, Y) et (Y, X) sont de même loi. Donc

$$\mathbb{P}(X < Y) = \mathbb{P}(Y < X).$$

En utilisant l'équation (0.1), on déduit que

$$\mathbb{P}(D(A)) = \frac{1}{4}.$$

Méthode 2

Posons $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3 : x > y + z\}$. On a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(D(A)) &= \mathbb{P}(\{X_A - X_B > X_C\}) \\
 &= \int_{\Gamma} \alpha^3 e^{-\alpha(x+y+z)} dx dy dz \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-\alpha(y+z)} \left(\int_{x>y+z} \alpha e^{-\alpha x} dx \right) dy dz \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-2\alpha(y+z)} dy dz \\
 &= \frac{1}{4} \left(\int_0^{+\infty} 2\alpha e^{-2\alpha y} dy \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

- 2) Calculer la probabilité que C sorte le dernier après avoir exprimé l'événement "C sort le dernier" en fonction de X_A , X_B et X_C .

On a

$$D(C) = \{|X_A - X_B| < X_C\}$$

Evidemment $\{D(A), D(B), D(C)\}$ est une partition de l'univers. Donc $\mathbb{P}(D(A)) + \mathbb{P}(D(B)) + \mathbb{P}(D(C)) = 1$. On en déduit que $\mathbb{P}(D(C)) = \frac{1}{2}$.

- 3) Exprimer le temps total T passé par C dans la poste en fonction de X_A , X_B et X_C . Donner la loi de probabilité de T .

Le temps passé par C est la somme de son temps d'attente dans la poste qui est $\min(X_A, X_B)$ et de la durée de son coup de fil qui est X_C . Donc

$$T = \min(X_A, X_B) + X_C.$$

Commençons par déterminer la loi du temps d'attente $W = \min(X_A, X_B)$. On a pour tout $w \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(W > w) &= \mathbb{P}(X_A > w, X_B > w) \\
 &= \mathbb{P}(X_A > w) \mathbb{P}(X_B > w) \\
 &= e^{-2\alpha w}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent W suit la loi exponentielle de paramètre 2α . Comme W et X_C sont des variables aléatoires indépendantes, la loi du temps T passé par C dans la poste est le produit

de convolution des deux lois. D'où sa fonction de densité est donnée par: pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_{\mathbb{R}} f_W(x) f_{X_C}(t-x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2\alpha^2 e^{-2\alpha x} e^{-\alpha(t-x)} 1_{]0,+\infty[}(x) 1_{]0,+\infty[}(t-x) dx \\ &= 2\alpha^2 e^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha x} dx \\ &= 2\alpha e^{-\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

Evidemment pour tout $t \leq 0$, $f_T(t) = 0$.

- 4) Donner la loi de probabilité de l'instant du dernier départ, l'instant 0 étant l'arrivée des trois personnes à la poste.

Notons Z l'instant du dernier départ. On a $Z = W + \max(|X_A - X_B|, X_C)$. Il est clair que le temps d'attente de C est indépendant du temps que passe dans la poste le dernier à sortir entre A et B après que le premier soit sorti c'est à dire que W et $|X_A - X_B|$ sont indépendantes. Montrons le rigoureusement.

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(W > u, |X_A - X_B| > v) &= \mathbb{P}(W > u, X_B - X_A > v, X_A < X_B) + \mathbb{P}(W > u, X_A - X_B > v, X_A > X_B) \\ &= 2\mathbb{P}(W > u, X_B - X_A > v, X_A < X_B) \\ &= 2\mathbb{P}(X_A > u, X_B > X_A + v) \\ &= 2 \int_u^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} \left(\int_{x+v}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha y} dy \right) dx \\ &= e^{-2\alpha u} e^{-\alpha v} \end{aligned}$$

Maintenant, le vecteur $(W, |X_A - X_B|)$ est indépendant de X_C . Donc les variables aléatoires $W, |X_A - X_B|$ et X_C sont indépendantes. Puisque W est indépendante de $\max(|X_A - X_B|, X_C)$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z < z) &= \mathbb{P}(W + \max(|X_A - X_B|, X_C) < z) \\ &= \int_0^z \mathbb{P}(\max(|X_A - X_B|, X_C) < z - x) 2\alpha e^{-2\alpha x} dx \\ &= 2\alpha \int_0^z (1 - e^{-\alpha(z-x)})^2 e^{-2\alpha x} dx \\ &= 1 - 4e^{-\alpha z} + (3 + 2\alpha z)e^{-2\alpha z}. \end{aligned}$$

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire réelle et F sa fonction de répartition. C'est à dire pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $F(x) = P(X \leq x)$

1) Montrons que F est continue à droite

Soit $x \in \mathbb{R}$ considérons une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ décroissante convergant vers x . Montrons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = F(x).$$

on a $F(x_n) = P_X]-\infty, x_n]$ comme la suite d'ensemble $(]-\infty, x_n])_{n \geq 0}$ est décroissante on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = P_X \left(\bigcap_{n=0}^{\infty}]-\infty, x_n] \right)$$

Il nous suffit alors de prouver que

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}]-\infty, x_n] =]-\infty, x].$$

on a clairement $]-\infty, x] \subset]-\infty, x_n] \forall n \geq 0$

Donc on a $]-\infty, x] \subset \bigcap_{n=0}^{\infty}]-\infty, x_n]$

Soit $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty}]-\infty, x_n]$. Alors $\forall n \geq 0$
 $y \leq x_n$ donc en faisant tendre n
 vers ∞ , on a $y \leq x$ d'où $y \in]-\infty, x]$.
 D'où $\bigcap_{n=0}^{\infty}]-\infty, x_n] \subset]-\infty, x]$.

On suppose maintenant que x est
 absolument continue et on considère la
 variable aléatoire $y = F(x)$

2) Que signifie cette hypothèse?

Cette hypothèse signifie que la loi
 de x est une mesure absolument
 continue par rapport à la mesure de
 Lebesgue λ . D'où il existe une fonction
 positive mesurable telle que

$P_x = f_x \cdot \lambda$ c'est à dire que pour
 tout borélien A on a:

$$P_x(A) = \int_A f_x(x) d\lambda(x)$$

3) - Montrons que F est continue sur \mathbb{R} .

On soit que le saut $F(x) - F(x^-)$ en un
 point $x \in \mathbb{R}$ est $P(x = x)$ or

$$P(x=x) = \int_{\{x\}} f_x(u) d\lambda(u) = 0$$

Donc F est continue à gauche. Ainsi F est continue puisqu'elle l'est à droite d'après la question 1

4) - Soit $y \in]0, 1[$ on pose $A = \{x \in \mathbb{R}, F(x) \leq y\}$

a) Montrons que A est non vide

soit $0 < y < 1$ comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, il existe $x_0 < 0$ tel que $\forall x \leq x_0$ $F(x) < y$ d'où $x_0 \in A$.

b) Montrons que A majoré et justifions l'existence de la borne supérieure notée u et calculons $F(u)$.

Supposons que A n'est pas majoré. Alors il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $+\infty$. En effet pour tout $n \geq 0$ il existe $x_n \in A$ telle que $x_n > n$. La suite $(x_n)_{n \geq 0}$ tend clairement vers $+\infty$. Pour cette suite, on a $F(x_n) \leq y \quad \forall n \geq 0$. En passant à la limite comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ on a $1 \leq y$ ce qui est absurde car $0 < y < 1$ d'où A est majoré.

Comme A est majoré et non vide, il admet une borne supérieure.

Puisque la borne supérieure de A est une valeur d'adhérence de A , il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de A qui converge vers u . On a $F(x_n) \leq y \forall n \geq 0$. Puisque F est continue, en passant à la limite, on a $F(u) \leq y$.

Maintenant supposons que $F(u) < y$.

En utilisant la continuité à droite de F on a $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u + \frac{1}{n}) = F(u)$. D'où il existe

$n_0 \geq 0$ tel que $F(u) < F(u + \frac{1}{n_0}) < y$
par conséquent $u + \frac{1}{n_0} \in A$ ce qui est absurde car u est la borne supérieure de A . Ainsi on a $F(u) = y$.

c) Montrons que $P(Y \leq y) = y$. En déduisons la loi de Y .

D'après ce qui précède on a $\{Y \leq y\} = \{X \leq u\}$
En effet, si $w \in \{Y \leq y\}$ alors $F(X(w)) < y$.

Alors $X(\omega) \in A$ et par conséquent $X(\omega) \leq u$
 donc $\{Y \leq y\} \subset \{X \leq u\}$. Maintenant soit
 $\omega \in \{X \leq u\}$. Alors $X(\omega) \leq u$. Puisque
 F est croissante on a $F(X(\omega)) \leq F(u) = y$
 Ainsi $Y(\omega) \leq y$ par conséquent $\{X \leq u\} \subset \{Y \leq y\}$
 Finalement $P(Y \leq y) = P(X \leq u) = F(u) = y$.
 Ainsi $F(Y)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 2

1) on suppose dans cette question que toutes
 les poignées possibles sont équiprobables.
 a) Trouvons la loi de N et son espérance
 L'univers de ce phénomène aléatoire est
 l'ensemble des sous ensembles de $\{1, \dots, n\}$
 Notons le Ω . Puisque il y a équiprobabilité
 la probabilité qui gouverne ce phénomène
 aléatoire est la probabilité uniforme
 qu'on désigne par P . Evidemment la tribu
 des événements est l'ensemble des parties
 de Ω noté $\mathcal{P}(\Omega)$. Pour tout événement A
 on a :
$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$$

on a

$$P(N=k) = \begin{cases} \frac{C_n^k}{2^n} & \text{si } k \in \{0, \dots, n\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) Déterminons le paramètre de la variable aléatoire de Bernoulli X_i

on a $\text{Card}\{X_i=1\} = 2^{n-1}$ puisque les cas favorables sont ceux où la poignée est de la forme $\{i\} \cup A$ où A est un sous ensemble de $\{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ donc.

$$P(X_i=1) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

c) Montrons que $S = \sum_{i=1}^n X_i$ En déduisons $E(S)$

cette égalité est évidente car.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le jeton } i \text{ fait partie de la poignée} \\ 0 & \text{si le jeton } i \text{ ne fait pas partie de la poignée.} \end{cases}$$

Donc on a :

$$E(S) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n \frac{i}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$$

En effet on prélève k jetons simultanément de l'urne et on désire que la poignée contient le jeton i . On a donc une loi hypergéométrique de paramètre $(n, 1, k)$.

Il s'ensuit grâce au théorème des Probabilités totales que

$$\begin{aligned} P(x_i=1) &= \sum_{k=0}^n P(x_i=1 | N=k) P(N=k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) Calculons l'espérance de s

Par le même calcul qu'en 1-a) on obtient $E(s) = \frac{n(n+1)}{4}$

d) Les Variables aléatoires x_i sont-elles encore indépendantes?

Calculons $\text{cov}(x_i, x_j)$.

$$P(x_i=1, x_j=1 | N=k) = \frac{C_2^k C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

par la formule des probabilités totales on a :

$$P(x_i=1, x_j=1) = \sum_{k=0}^n P(x_i=1, x_j=1 | N=k) P(N=k)$$

d) Montrons que les variables X_i sont deux à deux indépendantes et en déduisons la variance.

on a pour tout $i \neq j$

$$P(X_i=1, X_j=1) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4} = P(X_i=1) P(X_j=1)$$

on peut conclure car les autres cas se traitent de la même en utilisant le complémentaire. Ainsi les variables X_i sont indépendantes deux à deux.

D'où :

$$V(S) = \sum_{i=1}^n i^2 V(X_i) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

2) on suppose dans cette question que N suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$

a) déterminons l'espérance de N ?

$$E(N) = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{1}{n+1} = \frac{n}{2}$$

b) calculons pour $k \in \{0, \dots, n\}$ $P(X_i=1 | N=k)$

$$P(X_i=1 | N=k) = \frac{C_1^1 C_{n-1}^{k-1}}{C_n^k} = \frac{k}{n}$$

$$\begin{aligned}
 P(X_i=1, X_j=1) &= \sum_{k=0}^n \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{1}{n(n^2-1)} \left(\sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k \right) \\
 &= \frac{1}{n(n^2-1)} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

D'où $P(X_i=1, X_j=1) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = P(X_i=1)P(X_j=1)$
 Donc les variables aléatoires X_i ne sont plus indépendantes on a :

$$E(X_i, X_j) = P(X_i=1, X_j=1) \text{ et}$$

$$E(X_i)E(X_j) = P(X_i=1)P(X_j=1).$$

Donc

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

3) on suppose $n=3$

Déterminons dans le 1^{er} et le second cas \mathcal{S} .

premier cas :

$$\mathcal{L} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

et

$$\{S = k\} = \begin{cases} \emptyset & n \quad k=0 \\ \{\{1\}\} & n \quad k=1 \\ \{\{2\}\} & n \quad k=2 \\ \{\{1,2\}, \{3\}\} & n \quad k=3 \\ \{\{1,3\}\} & n \quad k=4 \\ \{\{2,3\}\} & n \quad k=5 \\ \{\{1,2,3\}\} & n \quad k=6 \end{cases}$$

D'où la fonction de densité est donnée par :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(S=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Deuxième cas :

Dans ce cas on a :

$$IP(\emptyset) = P(N=0) = \frac{1}{4}, \quad P(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) = P(N=1) = \frac{1}{4}$$

$$P(\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}) = P(N=2) = \frac{1}{4}$$

$$P(\{\{1,2,3\}\}) = P(N=3) = \frac{1}{4}$$

Ainsi la probabilité que la poignée soit vide est $\frac{1}{4}$

cette pour la poignée pleine est $\frac{1}{4}$.
 et pour les autres poignées cette
 probabilité est de $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
 par conséquent.

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(S=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

Exercice 3

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } f_{X+Y}(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_Y(z-x) f_Y(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(z-x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[z-1, z]}(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx \\
 &= \lambda([\max(z-1, 0), \min(z, 1)])
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} z & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 2-z & \text{si } 1 < z \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

UFR MI :L3

2018-2019

CORRECTION : PROBABILITE AVANCÉE SESSION 1

Exercice 1

1. Montrons qu'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} possède une espérance mathématique ssi $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) < +\infty$.

On sait que, pour toute variable aléatoire.

On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X \geq n\}} \leq X \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X \geq n\}}$$

- Supposons que $\mathbb{E}(X)$ existe c'est-à-dire $\mathbb{E}(X) < +\infty$

On a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X \geq n\}} \leq X$. En prenant l'espérance de part et d'autre,

On a :

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X \geq n\}}\right) \leq \mathbb{E}(X)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E} \mathbb{1}_{\{X \geq n\}} \leq \mathbb{E}(X)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \leq \mathbb{E}(X)$$

Or $\mathbb{E}(X) < +\infty$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) < +\infty$.

- Supposons $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) < +\infty$

Comme X est à valeur dans \mathbb{N} , $|X| = X$

D'où $|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{|X| \geq n\}}$.

$$\mathbb{E}(|X|) \leq \mathbb{E}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{|X| \geq n\}}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(|X|) \leq \mathbb{E}(1) + \mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{|X| \geq n\}}\right)$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{|X| \geq n\}}\right)$ car la fonction indicatrice est intégrable.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(|X|) \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) < +\infty$$

D'où $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$

Donc $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$, alors X possède une espérance mathématique.

Ainsi comme X est à valeur dans \mathbb{N} , alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.

2. X et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(a)$ indépendantes.

* Calculons $\mathbb{P}(X \geq j)$

$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X \geq j) = (1-p)p^j$ où $0 \leq p < 1, j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq j) &= \sum_{k=j}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=j}^{+\infty} (1-p)p^k \\ &= (1-p) \sum_{k=j}^{+\infty} p^k \\ &= (1-p)p^j \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^j \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X \geq j) = p^j$$

* Déduisons que $Z = \min(X, Y) \hookrightarrow \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \geq j) &= \mathbb{P}(X \geq j, Y \geq j) \cdot Z(\Omega) = \mathbb{N} \\ &= \mathbb{P}(X \geq j) \mathbb{P}(Y \geq j) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendants} \\ &= p^j p^j \\ \mathbb{P}(Z \geq j) &= p^{2j} \end{aligned}$$

On remarque que : $\{X \geq j\} = \{X = j\} \cup \{X > j\}$

Les deux événements $\{X = j\}$ et $\{X > j\}$ étant disjoints, on a :

$$\mathbb{P}(X \geq j) = \mathbb{P}(X = j) + \mathbb{P}(X > j)$$

Cependant ; $\mathbb{P}(Z \geq j) = \mathbb{P}(Z = j) + \mathbb{P}(Z > j)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = j) &= \mathbb{P}(Z \geq j) - \mathbb{P}(Z > j) \\ &= \mathbb{P}(Z \geq j) - \mathbb{P}(Z \geq j+1) \\ &= p^{2j} - p^{2j+2} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Z = j) = (1-p^2)p^{2j}$$

Donc $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p^2)$

Exercice 3

1. $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Déterminons la loi de $Z = \tan(x)$.

Soit h une fonction borélienne positive. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(h(z)) &= \mathbb{E}(h(\tan x)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tan x) dx\end{aligned}$$

Posons $z = \tan(x) \Rightarrow x = \arctan z$

$$dx = \frac{1}{1+z^2} dz. \quad \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty, z \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow -\infty, z \rightarrow -\frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\mathbb{E}(h(z)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} h(z) \frac{1}{1+z^2} dz$$

$$\mathbb{E}(h(z)) = \int_{\mathbb{R}} h(z) \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+z^2} dz$$

Donc la loi de Z a pour densité la fonction définie par $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+z^2} \mathbb{1}_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$

2. $U \hookrightarrow \varepsilon(1), V \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. On suppose que U et V sont indépendantes. Soient $X = \sqrt{U} \cos(2\pi V), Y = \sqrt{U} \sin(2\pi V)$

2.i) Calculons la loi du couple (X, Y)

Soit h une fonction borélienne positive de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^+ .

$$\mathbb{E}(h(X, Y)) = \mathbb{E}(h(\sqrt{U} \cos(2\pi V), \sqrt{U} \sin(2\pi V)))$$

$$\mathbb{E}(h(X, Y)) = \int_0^{+\infty} \int_0^1 h(\sqrt{U} \cos(2\pi V), \sqrt{U} \sin(2\pi V)) e^{-U} dU dV$$

En effectuant le changement de variable

$\psi :]0, +\infty[\times]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[^2$ définie pour $(U, V) \in]0, +\infty[\times]0, 1[$,

$$\begin{cases} x = \sqrt{U} \cos 2\pi V \\ y = \sqrt{U} \sin 2\pi V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U = x^2 + y^2 \\ V = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Le Jacobien de ψ^{-1} est :

$$J_{\psi^{-1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{1}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{1}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix}$$

$$I_{e^{-1}} = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{1}{\pi} \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

$$I_{e^{-1}} = \frac{1}{\pi} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\pi}$$

On obtient donc $\mathbb{E}(h(X, Y)) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} h(x, y) \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

Donc la loi du couple (X, Y) a pour densité $f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} \mathbb{1}_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}(x, y)$

2.ii) X et Y indépendantes ?

On a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} \mathbb{1}_{\{x>0\}} \mathbb{1}_{\{y>0\}}$$

$$= \frac{1}{\pi} e^{-x^2-y^2} \mathbb{1}_{\{x>0\}} \mathbb{1}_{\{y>0\}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \mathbb{1}_{\{x>0\}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \mathbb{1}_{\{y>0\}}$$

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

Donc X et Y sont bien indépendantes.

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles gaussiennes indépendantes.

1. Condition nécessaires et suffisantes pour que $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes.

Comme X et Y sont indépendantes gaussiennes alors (X, Y) est un vecteur gaussien. Par conséquent, $(X + Y, X - Y)$ est aussi un vecteur gaussien et les variables $X + Y$ et $X - Y$ sont des variables gaussiennes.

Par conséquent, $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes si et seulement si leur covariance est nulle.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) = 0 &\Leftrightarrow \mathbb{E}[(X + Y)(X - Y)] - \mathbb{E}(X + Y)\mathbb{E}(X - Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}[X^2 - XY + XY - Y^2] - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X - Y) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X - Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 - (\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Var}(X) - \text{Var}(Y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) \end{aligned}$$

Conclusions : $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes si et seulement si $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$

2. On suppose de plus que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$

Calculons la fonction caractéristique de $Z_1 = \frac{X^2}{2}$ puis $Z_2 = \frac{X^2 - Y^2}{2}$

Notons ϕ_1 la fonction caractéristique de Z_1

Soit $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi_{z_1} &= \mathbb{E}(e^{itx_1}) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{it\frac{x^2}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{it\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}(1-it)} dx \end{aligned}$$

$$\text{Posons } U = x \frac{\sqrt{1-it}}{\sqrt{2}} = x \sqrt{\frac{1-it}{2}}$$

$$dU = \sqrt{\frac{1-it}{2}} dx \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{2}{1-it}} dU$$

$$\text{On obtient donc } \phi_{z_1}(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-it}} \int_{\mathbb{R}} e^{-U^2} dU$$

$$\boxed{\phi_{z_1}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-it}}}$$

$$\begin{aligned}\phi_{z_2}(t) &= \mathbb{E}(e^{itZ_2}) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{it\frac{X^2 - Y^2}{2}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{it\frac{X^2}{2}} e^{-it\frac{Y^2}{2}}\right)\end{aligned}$$

Comme X et Y sont indépendants, alors X^2 et Y^2 le sont également.
Donc

$$\begin{aligned}\phi_{z_2}(t) &= \mathbb{E}\left(e^{it\frac{X^2}{2}}\right) \mathbb{E}\left(e^{-it\frac{Y^2}{2}}\right) \\ &= \phi_{z_1}(t) \phi_{z_1}(-t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-it}} \times \frac{1}{\sqrt{1+it}} = \frac{1}{\sqrt{(1-it)(1+it)}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\phi_{z_2}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

3. Montrons que Z_2 peut s'écrire comme produit de deux variables normales indépendantes.

$$\begin{aligned}\text{On a : } Z_2 &= \frac{X^2 - Y^2}{2} \\ &= \frac{(X - Y)(X + Y)}{2} \\ &= \frac{X - Y}{\sqrt{2}} \times \frac{X + Y}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

D'après 1), $X - Y$ et $X + Y$ sont indépendantes ssi $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$
or $X \leftrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \leftrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

Donc $\text{Var}(X) = 1 = \text{Var}(Y)$

Ainsi $X - Y$ et $X + Y$ sont indépendantes.

Il en est de même pour $\frac{X - Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X + Y}{\sqrt{2}}$

Donc Z_2 s'écrit comme produit de deux variables normales indépendantes.

ANALYSE CONVEXE ET OPTIMISATION: Examen de la 2^{ème} session

2015-2016

Exercice 1

Soit S un ensemble non vide de \mathbb{R}^n . pour tout $d \in \mathbb{R}^n$,
 On définit la fonction d'appui de l'ensemble S par

$$\sigma_S(d) := \sup_{s \in S} \langle s, d \rangle.$$

1) Montrons que si A et B sont deux parties non vides de \mathbb{R}^n , on a: $\sigma_{A+B} = \sigma_A + \sigma_B$.

• Montrons que $\sigma_{A+B} \leq \sigma_A + \sigma_B$.
 soit $y \in \mathbb{R}^n$.

$$\sigma_{A+B}(y) = \sup_{x \in A+B} y^T x = \sup_{\substack{x \in A \\ b \in B}} y^T (a+b) = \sup_{\substack{x \in A \\ b \in B}} (y^T a + y^T b).$$

$$\text{On a } \sup_{\substack{x \in A \\ b \in B}} (y^T a + y^T b) \leq \sup_{x \in A} y^T a + \sup_{b \in B} y^T b = \sigma_A(y) + \sigma_B(y)$$

$$\text{Donc } \sigma_{A+B} \leq \sigma_A + \sigma_B.$$

• Montrons que $\sigma_{A+B} \geq \sigma_A + \sigma_B$.

$$\forall (a, b) \in A \times B, \sigma_{A+B}(y) \geq y^T a + y^T b. \quad (1)$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists (a_\varepsilon, b_\varepsilon) \in A \times B$ tels que $\sigma_A(y) \leq y^T a_\varepsilon + \varepsilon$, $\sigma_B(y) \leq y^T b_\varepsilon + \varepsilon$
 C'est-à-dire $\sigma_A(y) - \varepsilon \leq y^T a_\varepsilon$, $\sigma_B(y) - \varepsilon \leq y^T b_\varepsilon$.

Comme $(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \in A \times B$ alors (1) donne:

$$y^T a_\varepsilon + y^T b_\varepsilon \leq \sigma_{A+B}(y). \Rightarrow \sigma_A(y) + \sigma_B(y) - 2\varepsilon \leq \sigma_{A+B}(y).$$

En faisant tendre ε vers 0 on a: $\sigma_A(y) + \sigma_B(y) \leq \sigma_{A+B}(y)$.

Conclusion: $\forall y \in \mathbb{R}^m$, $\overline{\sigma}_{A+B}(y) = \overline{\sigma}_A(y) + \overline{\sigma}_B(y)$

Donc $\overline{\sigma}_{A+B} = \overline{\sigma}_A + \overline{\sigma}_B$

2) soit S une partie non vide de \mathbb{R}^n , montrons que

$$\overline{\sigma}_S = \overline{\sigma}_{\overline{\text{Conv}(S)}}$$

Rappel: $\text{Conv}(S) = \left\{ x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i : k \in \mathbb{N}^*, x^i \in S, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$

$\overline{\text{Conv}(S)}$ est l'adhérence de l'enveloppe convexe de S .

- montrons que $\overline{\sigma}_S \leq \overline{\sigma}_{\overline{\text{Conv}(S)}}$

soit $y \in \mathbb{R}^m$.

$\forall x \in \overline{\text{Conv}(S)}$, $\overline{\sigma}_{\overline{\text{Conv}(S)}}(y) \geq y^T x$. or d'autre part:

$S \subset \overline{\text{Conv}(S)} = \overline{\text{Conv}(S)}$, donc $\forall x \in S$, $\overline{\sigma}_{\overline{\text{Conv}(S)}}(y) \geq y^T x$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_\varepsilon \in S$ tel que $\overline{\sigma}_S(y) \leq y^T x_\varepsilon + \varepsilon$.

Ce qui donne $\overline{\sigma}_S(y) - \varepsilon \leq y^T x_\varepsilon$.

Or $x_\varepsilon \in S \subset \overline{\text{Conv}(S)}$, donc $\overline{\sigma}_{\overline{\text{Conv}(S)}}(y) \geq y^T x_\varepsilon \geq \overline{\sigma}_S(y) - \varepsilon$

et en faisant tendre ε vers 0 on a $\overline{\sigma}_{\overline{\text{Conv}(S)}}(y) \geq \overline{\sigma}_S(y)$.

Ainsi: $\overline{\sigma}_S \leq \overline{\sigma}_{\overline{\text{Conv}(S)}}$

- montrons que $\overline{\sigma}_S \geq \overline{\sigma}_{\overline{\text{Conv}(S)}}$

soit $y \in \mathbb{R}^m$.

$$\overline{\sigma}_{\overline{\text{Conv}(S)}}(y) = \sup_{x \in \overline{\text{Conv}(S)}} y^T x \leq \sup_{x \in \text{Conv}(S)} y^T x = \sup_{a_i \in S} y^T \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \right)$$

Car $x \in \text{Conv}(S) \Rightarrow \exists a_i \in S / x = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$, $k \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$

$$\text{Or } \sup_{a_i \in S} y^T \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \sup_{a_i \in S} y^T a_i \leq \overline{\sigma}_S(y) \cdot \sum_{i=1}^k \lambda_i = \overline{\sigma}_S(y)$$

Ainsi, on a $\overline{\sigma}_{\overline{\text{Conv}(S)}}(y) \leq \overline{\sigma}_S(y)$

Conclusion: $\overline{\sigma}_S = \overline{\sigma}_{\overline{\text{Conv}(S)}}$

Exercice 2

On considère la fonction \mathcal{J} définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ par :

$$\mathcal{J}(t, r) = \frac{t^2}{r}$$

* montrons que la fonction \mathcal{J} est convexe

$$\text{On a } \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(t, r) = \frac{2t}{r}, \quad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r}(t, r) = -\frac{t^2}{r^2}$$

- les fonctions $(t, r) \mapsto t$ et $(t, r) \mapsto \frac{1}{r}$ sont continues donc $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}(t, r)$ est continue.

- les fonctions $(t, r) \mapsto t^2$ et $(t, r) \mapsto \frac{1}{r^2}$ sont continues donc $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial r}$ est continue.

Alors \mathcal{J} est différentiable.

Montrons $\nabla \mathcal{J} : \mathbb{R} \times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(t, r) \mapsto \left(\frac{2t}{r}, -\frac{t^2}{r^2} \right)$ est différentiable.

$(t, r) \mapsto \frac{2t}{r}$ et $(t, r) \mapsto -\frac{t^2}{r^2}$ sont différentiables donc $\nabla \mathcal{J}$ l'est aussi. par conséquent \mathcal{J} est 2 fois différentiable.

$$\text{Posons } H(t, r) = \nabla^2 \mathcal{J}(t, r). \text{ On a : } H(t, r) = \begin{pmatrix} \frac{2}{r} & -\frac{2t}{r^2} \\ -\frac{2t}{r^2} & \frac{2t^2}{r^3} \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } \det H(t, r) = \frac{4t^2}{r^4} - \frac{4t^2}{r^4} = 0 \text{ et } \frac{2}{r} > 0 \text{ donc } H(t, r) \text{ est semi-définie positive.}$$

par conséquent \mathcal{J} est convexe.

* S convexe de \mathbb{R}^n et g une fonction convexe strictement positive sur S , montrons que la fonction μ définie sur S par
$$\mu(x) = \begin{cases} -\ln(g(x)) & \text{si } g(x) \leq 1 \\ 0 & \text{si } g(x) > 1 \end{cases}$$
 est convexe sur S .

$$\text{Donc } \mu(x) = \begin{cases} -\ln(g(x)) & \text{si } \ln(g(x)) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \ln(g(x)) \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors donc } \mu(x) = \max_{x \in S} (-\ln(g(x)), 0)$$

g est convexe et la fonction $x \mapsto \ln x$ est concave et croissante
alors la fonction $x \mapsto \ln(g(x))$ est concave, donc la fonction
 $x \mapsto -\ln(g(x))$ est convexe.

Par conséquent μ est convexe.

* En déduire que la fonction définie sur $S \times]0, +\infty[$ par
 $\theta(x, r) = \frac{1}{r} \mu^2(x)$ est convexe.

$S \times]0, +\infty[$ est un convexe non vide car produit cartésien de
convexes.

Remarquons que $\theta(x, r) = \mathcal{S}(\mu(x), r)$ et $\mu(x) \geq 0$

soit $(x_1, r_1), (x_2, r_2) \in S \times]0, +\infty[$, $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} \theta(\lambda(x_1, r_1) + (1-\lambda)(x_2, r_2)) &= \theta(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2) \\ &= \mathcal{S}(\mu(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2) \end{aligned}$$

Comme μ est convexe donc: $\mu(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda \mu(x_1) + (1-\lambda) \mu(x_2)$

montrons que si $t_1 \leq t_2$, alors $\mathcal{S}(t_1, r) \leq \mathcal{S}(t_2, r)$. ($t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*$)

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow t_1^2 \leq t_2^2 \Rightarrow \frac{t_1^2}{r} \leq \frac{t_2^2}{r} \Rightarrow \mathcal{S}(t_1, r) \leq \mathcal{S}(t_2, r)$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \mathcal{S}(\mu(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2) &\leq \mathcal{S}(\lambda \mu(x_1) + (1-\lambda) \mu(x_2), \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2) \\ &\leq \mathcal{S}(\lambda(\mu(x_1), r_1) + (1-\lambda)(\mu(x_2), r_2)) \end{aligned}$$

Comme \mathcal{S} est convexe donc:

$$\begin{aligned} \theta(\lambda(x_1, r_1) + (1-\lambda)(x_2, r_2)) &= \mathcal{S}(\mu(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2), \lambda r_1 + (1-\lambda)r_2) \\ &\leq \lambda \mathcal{S}(\mu(x_1), r_1) + (1-\lambda) \mathcal{S}(\mu(x_2), r_2) \\ &\leq \lambda \theta(x_1, r_1) + (1-\lambda) \theta(x_2, r_2) \end{aligned}$$

D'où la convexité de θ .

EXAMEN ANALYSE CONVEXE ET OPTIMISATION

SESSION 1 (2016-2017)

Partie Analyse Convexe

Exercice 2 (le cours)

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Montrons les équations suivantes :

a) Montrons que (i) \Leftrightarrow (ii)

– (i) \Rightarrow (ii) : Supposons que f est convexe et montrons que $\text{epi}(f)$ est convexe.

Rappel : $\text{epi}(f) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$

Soient $(x, \alpha), (y, \beta) \in \text{epi}(f)$ et $\lambda \in [0, 1]$.

Montrons que $(1 - \lambda) \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \in \text{epi}(f)$

C'est-à-dire $\begin{pmatrix} (1 - \lambda)x + \lambda y \\ (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta \end{pmatrix} \in \text{epi}(f)$

C'est-à-dire $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta$.

On a : $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \in \text{epi}(f)$ donc $f(x) \leq \alpha$ de même $f(y) \leq \beta$. Comme la fonction f est convexe on a :

$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta$. D'où $(1 - \lambda) \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \in \text{epi}(f)$

Par conséquent $\text{epi}(f)$ est convexe.

– (ii) \Rightarrow (i) : Supposons que $\text{epi}(f)$ est convexe et montrons que f est convexe.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0, 1]$. A-t-on $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$?

On a : $f(x) \leq f(x), f(y) \leq f(y)$ donc $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \text{epi}(f)$ et comme

$\text{epi}(f)$ est convexe, on a : $(1 - \lambda) \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y \\ f(y) \end{pmatrix} \in \text{epi}(f)$

C'est-à-dire $\begin{pmatrix} (1 - \lambda)x + \lambda y \\ (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \end{pmatrix} \in \text{epi}(f) \Rightarrow f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$

D'où f est convexe.

Conclusion 1 : (i) \Leftrightarrow (ii)

b) Montrons que (i) \Leftrightarrow (iii)

– (i) \Rightarrow (iii) : Supposons que $\text{epi}(f)$ est convexe et montrons que $\tilde{\text{epi}}(f)$ est

convexe.

Rappel : $\tilde{epi}(f) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / f(x) < \lambda\}$

Soient $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \in \tilde{epi}(f)$ et $\lambda \in [0, 1]$

Montrons que $(1 - \lambda) \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \in \tilde{epi}(f)$

C'est-à-dire $\begin{pmatrix} (1 - \lambda)x + \lambda y \\ (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta \end{pmatrix} \in \tilde{epi}(f)$

C'est-à-dire $f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta$.

On a : $\begin{cases} (x, \alpha) \in \tilde{epi}(f) \Rightarrow f(x) < \alpha \Rightarrow \varepsilon_1 > 0 \text{ telque } f(x) \leq \alpha - \varepsilon_1 \\ (y, \beta) \in \tilde{epi}(f) \Rightarrow f(y) < \beta \Rightarrow \varepsilon_2 > 0 \text{ telque } f(y) \leq \beta - \varepsilon_2 \end{cases}$

Posons $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$; d'où $f(x) \leq \alpha - \varepsilon$ et $f(y) \leq \beta - \varepsilon$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ \alpha - \varepsilon \end{pmatrix} \in epi(f)$; $\begin{pmatrix} y \\ \beta - \varepsilon \end{pmatrix} \in epi(f)$ et comme $epi(f)$ est convexe, on

a : $(1 - \lambda) \begin{pmatrix} x \\ \alpha - \varepsilon \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y \\ \beta - \varepsilon \end{pmatrix} \in epi(f)$ Ce qui donne

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta - \varepsilon < (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta$$

D'où $(1 - \lambda) \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \in \tilde{epi}(f)$

. C'est-à-dire $\tilde{epi}(f)$ est convexe

- (iii) \Rightarrow (ii) : Supposons que $\tilde{epi}(f)$ est convexe et montrons que $epi(f)$ est convexe.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \in epi(f)$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $(1 - \lambda) \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \in epi(f)$

C'est-à-dire $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta$.

On a : $\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} \in epi(f) \Rightarrow f(x) \leq \alpha \Rightarrow \varepsilon_1 > 0 \text{ telque } f(x) < \alpha + \varepsilon_1 \\ \begin{pmatrix} y \\ \beta \end{pmatrix} \in epi(f) \Rightarrow f(y) \leq \beta \Rightarrow \varepsilon_2 > 0 \text{ telque } f(y) < \beta + \varepsilon_2 \end{cases}$

On pose $\varepsilon = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ et on a : $f(x) < \alpha + \varepsilon, f(y) < \beta + \varepsilon$.

Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ \alpha + \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \beta + \varepsilon \end{pmatrix} \in \tilde{epi}(f)$ et comme par hypothèse $\tilde{epi}(f)$ est convexe, on

a : $(1 - \lambda) \begin{pmatrix} x \\ \alpha + \varepsilon \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y \\ \beta + \varepsilon \end{pmatrix} \in \tilde{epi}(f)$.

D'où $f((1 - \lambda)x + \lambda y) < (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta + \varepsilon \leq (1 - \lambda)\alpha + \lambda\beta$

Par conséquent $epi(f)$ est convexe.

Conclusion 2 : (ii) \Leftrightarrow (iii)

Conclusion : (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)

2. $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est dite positivement homogène de degré $\alpha > 0$ lorsque $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall t > 0, f(tx) = t^\alpha f(x)$

La fonction f est positivement homogène si $\alpha = 1$

Montrons qu'une fonction f positivement homogène est convexe si et seulement si $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$

* (\Rightarrow) Supposons que f (positivement homogène) est convexe. Alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

On a : $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \forall \lambda \in [0, 1]$.

En prenant $\lambda = \frac{1}{2}$, on a : $f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) \Rightarrow f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

* (\Leftarrow) Supposons que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ et montrons que f est convexe.

Soient $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, 1]$. On sait que $(1-\lambda)x, \lambda y \in \mathbb{R}^n$ donc par hypothèse, on a : $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq f((1-\lambda)x) + f(\lambda y)$. Comme f est positivement homogène, on a : $f((1-\lambda)x) = (1-\lambda)f(x)$ et $f(\lambda y) = \lambda f(y)$. D'où $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$ par conséquent f est convexe

Exercice 3

On considère $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 < t\}$

- 1) Montrons que la fonction $h(x, t) = t - \frac{1}{t}x^T x$ est concave sur Ω

On a : $h(x, t) = t - \frac{1}{t}\|x\|_2^2, \forall (x, t) \in \Omega$.

$\forall (t \in \mathbb{R}^*)$, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{t}\|x\|_2^2$ est différentiable et la fonction $t \mapsto t$ est dérivable. Alors h est différentiable sur \mathbb{R}^{n+1} .

$\forall (x, t) \in \Omega$: Posons $f(x, t) = -h(x, t) = \frac{1}{t}\|x\|_2^2 - t$. Alors la fonction f est aussi différentiable. Déterminons $\nabla f(x, t)$. On a :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, t) &= \left(\frac{\partial f(x, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x, t)}{\partial x_n}, \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right)^T \\ &= \left(\frac{2x_1}{t}, \frac{2x_2}{t}, \dots, \frac{2x_n}{t}, -\frac{\|x\|_2^2}{t^2} - 1 \right)^T \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{t}x \\ -\frac{\|x\|_2^2}{t^2} - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les applications composantes de $\nabla f(x, t)$ sont différentiables donc $\nabla f(x, t)$ est différentiable.

Déterminons la matrice hessienne de f .

$$\nabla^2 f(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial t} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial t} & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} J_n & -\frac{2}{t^2} x \\ -\frac{2}{t^2} x^T & \frac{2\|x\|^2}{t^3} \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\nabla^2 f(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} J_n & -\frac{2}{t^2} x \\ -\frac{2}{t^2} x^T & \frac{2\|x\|^2}{t^3} \end{pmatrix}$ (Matrice en bloc)

Étudions le signe de $\langle \nabla^2 f(x, t) \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} \rangle$ avec $\begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} \in \Omega$

On a : $\nabla^2 f(x, t) \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} h - \frac{2\alpha}{t^2} x \\ -\frac{2}{t^2} x^T h + \frac{2\alpha}{t^3} \|x\|^2 \end{pmatrix} = \frac{2}{t} \begin{pmatrix} h - \frac{\alpha}{t} x \\ \frac{\alpha}{t^2} \|x\|^2 - \frac{1}{t} x^T h \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \nabla^2 f(x, t) \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} \rangle &= \frac{2}{t} \left(\begin{pmatrix} h - \frac{\alpha}{t} x \\ \frac{\alpha}{t^2} \|x\|^2 - \frac{1}{t} x^T h \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{2}{t} (\|h\|^2 - 2\frac{\alpha}{t} x^T h + (\frac{\alpha}{t} \|x\|^2)) \\ &= \frac{2}{t} \|h - \frac{\alpha}{t} x\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Car $\forall (x, t) \in \Omega, \|x\|_2 < t$ d'où $t > 0$.

Ainsi, on a : $\langle \nabla^2 f(x, t) \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h \\ \alpha \end{pmatrix} \rangle \geq 0 \quad \forall (h, \alpha) \in \Omega$. Alors la matrice hessienne de f

est définie positive, par conséquent f est convexe (d'après le cours) sur Ω .

Comme $h = -f$ alors h est concave sur Ω

2) Montrons que la fonction $g(x, t) = -\ln(h(x, t))$ est convexe sur Ω .

On a : $g(x, t) = -\ln(t - \frac{1}{t}\|x\|_2^2) = -\ln(h(x, t))$

On a : $-g(x, t) = \ln(h(x, t))$

D'après la question précédente, h est concave et la fonction logarithme est concave et strictement croissante donc la fonction $(x, t) \mapsto \ln(h(x, t))$ est concave c'est-à-dire $-g$ est concave et par conséquent g est convexe.

UFR MI :L3

2018-2019

CORRECTION : OPTIMISATION SESSION 1

Exercice 2

On considère $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ et le problème $\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y)$.

1. Déterminons $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x, y) > \alpha \|(x, y)\|^2 \in \beta$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 = x^4 + y^4 - 2(x^2 - 2xy + y^2) \\ f(x, y) &= x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, (x^2 - \varepsilon)^2 &\geq 0 \Leftrightarrow x^4 + y^4 - 2\varepsilon x^2 + \varepsilon^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^4 \geq 2\varepsilon x^2 - \varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même, on a : } y^4 &\geq 2\varepsilon y^2 - \varepsilon^2 \\ \Rightarrow f(x, y) &\geq 2\varepsilon x^2 - \varepsilon^2 + 2\varepsilon y^2 - \varepsilon^2 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy \\ \Rightarrow f(x, y) &\geq (2\varepsilon - 2)x^2 + (2\varepsilon - 2)y^2 - 2\varepsilon^2 + 4xy \\ (x + y)^2 &\geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2xy \geq -x^2 - y^2 \\ &\Leftrightarrow 4xy \geq -2x^2 - 2y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x, y) &\geq (2\varepsilon - 2)x^2 + (2\varepsilon - 2)y^2 - 2\varepsilon^2 - 2x^2 - 2y^2 \\ \Rightarrow f(x, y) &\geq (2\varepsilon - 4)x^2 + (2\varepsilon - 4)y^2 - 2\varepsilon^2 \\ \Rightarrow f(x, y) &\geq (2\varepsilon - 4)(x^2 + y^2) - 2\varepsilon^2 \\ \Rightarrow f(x, y) &\geq (2\varepsilon - 4) \|(x, y)\|^2 - 2\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on peut prendre ce qu'on veut. Seulement ici, on doit choisir ε de sorte que $\alpha = (2\varepsilon - 4)$ soit positif et $\beta = -2\varepsilon^2$ appartiennent à \mathbb{R} .

Moi, je choisis $\varepsilon = 3 \Rightarrow 2\varepsilon - 4 = 2$ et $-2\varepsilon^2 = -18$

$$\Rightarrow \boxed{f(x, y) \geq 2 \|(x, y)\|^2 - 18} \quad \alpha = 2 \text{ et } \beta = -18$$

$$\lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} 2 \|(x, y)\|^2 - 18 = +\infty \Rightarrow \lim_{\|(x, y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

Donc f est coercive. D'après le cours, comme f est de plus continue, (P) admet au moins une solution.

2. Déterminons les points critiques de f et précisons leur nature.

Les points critiques sont tels que : $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} 4x^3 - 4(x - y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x - y) = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x^3 - (x - y) = 0 \\ y^3 + (x - y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + (x - y) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} y = -x \\ x(x^2 - 2) = 0 \end{cases} &\iff x = 0, x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

On en déduit que les points critiques sont : $O \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

La fonction f est de classe C^∞ , donc de classe C^1 , nous allons déterminer la nature de ces points grâce à la matrice hessienne.

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

* Point $A \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\text{Hess } f(A) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr}(\text{Hess } f(A)) = 40 \text{ et } \det(\text{Hess } f(A)) = 40 - 16 = 384$$

$\text{Tr}(\text{Hess } f(A)) > 0$ et $\det(\text{Hess } f(A)) > 0$ donc $\text{Hess } f(A)$ possède deux valeurs propres strictement positives.

Donc A un point de minimum local pour f

* Point O : $\nabla^2 f(O) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

$$\text{Tr}(\nabla^2 f(O)) = -8 \text{ et } \det(\nabla^2 f(O)) = 16 - 16 = 0$$

Donc on ne peut conclure.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que } |x| < 2, f(x, y) &= f(x, -x) \text{ car } y = -x \\ \Rightarrow f(x, -x) &= x^4 + (-x)^4 - 2(x+x)^2 \\ &= x^4 + x^4 - 2(2x)^2 \\ &= 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4 - x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \text{ tel que } |x| < 2, 4 - x^2 > 0 \\ \Rightarrow f(x, -x) < 0, O \text{ est un point selle pour } f \end{aligned}$$

* Point $B \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\nabla^2 f(B) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \nabla^2 f(A)$$

Donc B est un point de minimum pour f

- La fonction f est-elle convexe sur \mathbb{R}^2 .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

f est convexe sur \mathbb{R}^2 si et seulement si $\nabla^2 f(x, y)$ est semi-définie positive. Or $\nabla^2 f(0, 0)$ a pour valeur propre 0 et -8 donc f n'est pas convexe sur \mathbb{R}^2 ?

Resolvons le problème (P)

Comme (P) admet une solution alors

$$\boxed{\inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = f(A) = f(B) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8}$$

Exercice 3

Fourivoire fabrique deux type de fours F_1 et F_2 .

1.

- * Choix des variables

Soient x_1, x_2 les variables associées respectivement au nombre de four F_1 et F_2 .

* Signe des variables

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2$$

* Contraintes structurelles

La capacité (K) est de 270.

$$\Rightarrow 5x_1 + 3x_2 \leq 270$$

La capacité des heures ouvriers est de 800

$$\Rightarrow 7x_1 + 8x_2 \leq 800$$

La capacité des heures techniciens est de 360

$$\Rightarrow 4x_1 + 6x_2 \leq 360$$

* Fonction-objectif

Ici on veut maximiser la marge sur coût de production c'est-à-dire qu'on veut maximiser le bénéfice.

$$\text{Bénéfice} = \text{Prix de vente} - \text{Coût de production} = PV - PC$$

$$\text{Prix de vente} = 2010x_1 + 2400x_2$$

$$\text{Coût de production est : } 20(5x_1 + 3x_2) + 30(7x_1 + 8x_2) + 50(4x_1 + 6x_2)$$

$$\begin{aligned} \text{Coût de production} &= 100x_1 + 60x_2 + 210x_1 + 240x_2 + 200x_1 + 300x_2 \\ &= 310x_1 + 300x_2 + 200x_1 + 300x_2 \end{aligned}$$

$$\text{Coût de production} = 510x_1 + 600x_2$$

$$\Rightarrow \text{Bénéfice} = 2010x_1 + 2400x_2 - 510x_1 - 600x_2$$

$$\text{Bénéfice} = 1500x_1 + 1800x_2$$

$$\text{Fonction-objectif : Max } Z = 1500x_1 + 1800x_2$$

Programme linéaire (P)

$$\text{Max } Z = 1500x_1 + 1800x_2$$

$$(P) \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 270 \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 800 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 360 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

2. Déterminons le dual du programme (P)

Soit y_1, y_2, y_3 les variables duales associées respectivement à la première contrainte, deuxième et troisième contraintes du programme (P).

Le dual est alors

$$\text{Min } W = 270y_1 + 800y_2 + 350y_3$$

$$(D) \begin{cases} 5y_1 + 7y_2 + 4y_3 \geq 1500 \\ 3y_1 + 8y_2 + 6y_3 \geq 1800 \\ y_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Resolvons (D)

UFRMI : Licence 3
Examen : Régression linéaire
Durée : 2 heures

Faire tous les calculs intermédiaires.

Exercice 1. On considère le modèle de régression linéaire passant par l'origine

$$Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

avec $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ et $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Trouver l'estimateur des moindres carrés $\hat{\beta}$ du paramètre β .

Nous avons

$$S(\beta) = \sum_{t=1}^n (Y_t - \beta X_t)^2$$

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -2 \sum_{t=1}^n X_t (Y_t - \beta X_t) = 0 \iff \beta = \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}$$

$$\frac{\partial^2 S(\beta)}{\partial \beta^2} = \sum_{t=1}^n X_t^2 \implies \hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t Y_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}$$

est l'estimateur des moindres carrés ordinaires de β . (1.5 point)

2. Démontrer que l'estimateur $\hat{\beta}$ est sans biais.

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \frac{\sum_{t=1}^n X_t \mathbb{E}(Y_t)}{\sum_{t=1}^n X_t^2} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t^2 \beta}{\sum_{t=1}^n X_t^2} = \beta.$$

$\hat{\beta}$ est sans biais. (1 point)

3. Calculer la variance de l'estimateur $\hat{\beta}$.

Nous avons

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\beta}) &= \mathbb{E}(\hat{\beta} - \mathbb{E}(\hat{\beta}))^2 \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^n \left(\frac{X_t}{\sum_{t=1}^n X_t^2}\right) \varepsilon_t\right)^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^n X_t^2} \quad (1.5 \text{ point}) \end{aligned}$$

4. Soit X_{n+1} une nouvelle valeur de la variable explicative, Y_{n+1} la vraie valeur de la variable à expliquer correspondant à X_{n+1} et \hat{Y}_{n+1} la prévision de Y_{n+1} . En supposant que

- (a) ε_t suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$
 (b) $\text{Cov}(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_t) = 0$ pour tout $t = 1, \dots, n$
 (c) $\text{Var}[\varepsilon_t] = \sigma^2$ est estimée par

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X}_n)^2 \quad \text{où } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t$$

Construire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour Y_{n+1} .

$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\beta}X_{n+1}$; $\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1}$ est une gaussienne $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\left(1 + \frac{X_{n+1}}{\sum_{t=1}^n X_t^2}\right)\right)$.

On a

$$\frac{\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1}}{\sigma \sqrt{1 + \frac{X_{n+1}}{\sum_{t=1}^n X_t^2}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (1 \text{ point})$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \chi^2(n-1)$$

et

$$\frac{\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1}}{s \sqrt{1 + \frac{X_{n+1}}{\sum_{t=1}^n X_t^2}}} \hookrightarrow T(n-1) \quad (1 \text{ point})$$

L'intervalle de confiance pour Y_{n+1} de niveau $1 - \alpha$ est

$$\left[\hat{Y}_{n+1} - qs \sqrt{1 + \frac{X_{n+1}}{\sum_{t=1}^n X_t^2}}, \hat{Y}_{n+1} + qs \sqrt{1 + \frac{X_{n+1}}{\sum_{t=1}^n X_t^2}} \right] \quad (2 \text{ points})$$

Exercice 2. Considérer le modèle de régression linéaire $Y = X\beta + \varepsilon$, où X est une matrice n lignes et $(p+1)$ colonnes, β est un vecteur de dimension $p+1$, Y et ε sont des vecteurs de dimension n .

1. Démontrer que l'estimateur des moindres carrés ordinaires $\hat{\beta}$ vérifie

$$(X^T X) \hat{\beta} = X^T Y.$$

Nous avons

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} S(\beta)$$

où

$$\begin{aligned} S(\beta) &= (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \\ &= Y^T Y - Y^T X\beta - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta. \end{aligned}$$

L'estimateur $\hat{\beta}$ vérifie

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = 0 \implies -2X^T Y + 2X^T X \beta = 0$$

c'est à dire $X^T X \beta = X^T Y$. (2 points)

En déduire l'expression de $\hat{\beta}$.

Si $\text{rang}(X) = p + 1$ alors $X^T X$ est inversible et

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (1 \text{ point})$$

2. Démontrer que $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β .

Nous avons

$$\mathbb{E}(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E}(Y) = (X^T X)^{-1} X^T X \beta = \beta. \quad (0.5 \text{ point})$$

Par suite $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β .

3. Soit \hat{Y}_{n+1} la prévision de la variable à expliquer correspondant aux valeurs du vecteur ligne

$$X_{n+1} = (1 \ X_{n+1,1} \ \dots \ X_{n+1,p})$$

On a donc

$$\hat{Y}_{n+1} = X_{n+1} \hat{\beta}.$$

(a) Démontrer que $\mathbb{E}[\hat{Y}_{n+1}] = \mathbb{E}[Y_{n+1}]$.

Comme $Y_{n+1} = X_{n+1} \beta + \varepsilon_{n+1}$ et $\mathbb{E}(\varepsilon_{n+1}) = 0$ alors $\mathbb{E}(Y_{n+1}) = X_{n+1} \beta$.

Comme $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β , alors $\mathbb{E}(\hat{Y}_{n+1}) = X_{n+1} \beta$. (0.5 point).

(b) Démontrer que l'erreur de prévision de la valeur moyenne de Y_{n+1} est

$$\mathbb{E}(\hat{Y}_{n+1} - \mathbb{E}[\hat{Y}_{n+1}])^2 = \sigma^2 X_{n+1} (X^T X)^{-1} X_{n+1}^T.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{Y}_{n+1} - \mathbb{E}[\hat{Y}_{n+1}])^2 &= \text{var}(\hat{Y}_{n+1}) \\ &= \text{var}(X_{n+1} \hat{\beta}) \\ &= X_{n+1} \text{var}(\hat{\beta}) X_{n+1}^T \end{aligned}$$

Or $\text{var}(\hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} X^T \text{var}(Y) X (X^T X)^{-1}$ avec $\text{var}(Y) = \sigma^2 I_n$.
Nous avons alors

$$\text{var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1} \quad (1 \text{ point}).$$

Par suite

$$\mathbb{E}(\hat{Y}_{n+1} - \mathbb{E}[\hat{Y}_{n+1}])^2 = \sigma^2 X_{n+1} (X^T X)^{-1} X_{n+1}^T \quad (1 \text{ point})$$

Construire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour $\mathbb{E}[Y_{n+1}]$.

Si nous faisons l'hypothèse que ε est un vecteur gaussien $\mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$ alors $Y = X\beta + \varepsilon$ est un vecteur gaussien $\mathcal{N}(X\beta, \sigma^2 I_n)$. Par suite $\hat{Y}_{n+1} = X_{n+1} \hat{\beta}$ est une variable aléatoire gaussienne

$$\mathcal{N}(X_{n+1} \beta, \sigma^2 X_{n+1} (X^T X)^{-1} X_{n+1}^T).$$

Par suite

$$\frac{\hat{Y}_{n+1} - \mathbb{E}[\hat{Y}_{n+1}]}{\sigma \sqrt{X_{n+1} (X^T X)^{-1} X_{n+1}^T}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (1 \text{ point})$$

On sait que

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p-1} (Y - X\hat{\beta})^T (Y - X\hat{\beta})$$

et

$$\frac{(n-p-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2(n-p-1).$$

On en déduit que

$$\frac{\hat{Y}_{n+1} - \mathbb{E}[\hat{Y}_{n+1}]}{\hat{\sigma} \sqrt{X_{n+1} (X^T X)^{-1} X_{n+1}^T}} \rightarrow T(n-p-1) \quad (1 \text{ point})$$

c'est à dire la loi de Student à $n-p-1$ degrés de liberté; on obtient ainsi une fonction pivot $\mathbb{E}[\hat{Y}_{n+1}]$ et

$$P \left(\left| \frac{\hat{Y}_{n+1} - \mathbb{E}[\hat{Y}_{n+1}]}{\hat{\sigma} \sqrt{X_{n+1} (X^T X)^{-1} X_{n+1}^T}} \right| \leq q \right) = 1 - \alpha$$

où q est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi $T(n-p-1)$. Ainsi, l'intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour $\mathbb{E}[Y_{n+1}]$ est

$$\left[\hat{Y}_{n+1} - q\hat{\sigma} \sqrt{X_{n+1} (X^T X)^{-1} X_{n+1}^T}, \hat{Y}_{n+1} + q\hat{\sigma} \sqrt{X_{n+1} (X^T X)^{-1} X_{n+1}^T} \right] \quad (1 \text{ point})$$

(c) Démontrer que l'erreur de prévision de Y_{n+1} est

$$\mathbb{E}(\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1})^2 = \sigma^2(1 + X_{n+1}(X^T X)^{-1}X_{n+1}^T).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1})^2 &= \mathbb{E}(\hat{Y}_{n+1} - \mathbb{E}[Y_{n+1}] + \mathbb{E}[Y_{n+1}] - Y_{n+1})^2 \\ &= \text{var}(\hat{Y}_{n+1}) + \text{var}(Y_{n+1}) - \text{cov}(\hat{Y}_{n+1}, Y_{n+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{cov}(\hat{Y}_{n+1}, Y_{n+1}) &= \text{cov}(X_{n+1}\hat{\beta}, X_{n+1}\beta + \varepsilon_{n+1}) \\ &= \text{cov}(X_{n+1}\hat{\beta}, \varepsilon_{n+1}) \\ &= \text{cov}(X_{n+1}(X^T X)^{-1}X^T Y, \varepsilon_{n+1}) \\ &= X_{n+1}(X^T X)^{-1}X^T \text{cov}(Y, \varepsilon_{n+1}) \\ &= X_{n+1}(X^T X)^{-1}X^T \text{cov}(\varepsilon, \varepsilon_{n+1}) = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\mathbb{E}(\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1})^2 = \sigma^2 + \sigma^2 X_{n+1}(X^T X)^{-1}X_{n+1}^T. \quad (1 \text{ point})$$

Construire un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour Y_{n+1} .

La variable aléatoire $\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1}$ est gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2(1 + X_{n+1}(X^T X)^{-1}X_{n+1}^T))$, soit

$$\frac{\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1}}{\sigma \sqrt{1 + X_{n+1}(X^T X)^{-1}X_{n+1}^T}} \mapsto \mathcal{N}(0, 1) \quad (1 \text{ point}).$$

En procédant comme dans la question précédente, on obtient

$$\frac{\hat{Y}_{n+1} - Y_{n+1}}{\hat{\sigma} \sqrt{1 + X_{n+1}(X^T X)^{-1}X_{n+1}^T}} \mapsto T(n - p - 1). \quad (1 \text{ point})$$

L'intervalle de confiance pour Y_{n+1} de niveau $1 - \alpha$ est :

$$\left[\hat{Y}_{n+1} - q\hat{\sigma} \sqrt{1 + X_{n+1}(X^T X)^{-1}X_{n+1}^T}, \hat{Y}_{n+1} + q\hat{\sigma} \sqrt{1 + X_{n+1}(X^T X)^{-1}X_{n+1}^T} \right] \quad (1 \text{ point})$$

Correction d'Analyse des Données (Session 1) 2016 - 2017

Exercice 1 : Questions de cours (voir cours)

Exercice 2 :

On observe $P = 2$ variables sur $n = 5$ individus uniformement pondérées.

$$\text{la matrice de donnée est : } X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculons la matrice S de covariance

$$\text{On a } S = X'D_P X - gg'$$

Les individus sont simultanément pondérés donc $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = \frac{1}{5}$. D'où $D_P = \frac{1}{5}I_5$

$$\text{Ainsi, } S = \frac{1}{5}X'X - gg' \text{ avec } g = X'D_P \mathbb{1}_5 = \frac{1}{5}X'\mathbb{1}_5$$

$$\text{On a } g = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$gg' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } X'X = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 19 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi, } S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 34 & -12 \\ -12 & 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\text{La matrice de covariance est : } S = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalisation de la matrice S

$$P_S(X) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \begin{vmatrix} 14-5X & -2 \\ -2 & 14-5X \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{5}\right) (12-5X)(16-5X)$$

Les valeurs propres de S sont (rangées dans l'ordre croissant) : $\lambda_1 = \frac{16}{5}$ et $\lambda_2 = \frac{12}{5}$

Déterminons les sous-espaces propres associés aux valeurs propres.

$$- E_{\lambda_1} = \ker(S - \lambda_1 I_2). \text{ On a } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_{\lambda_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

D'où $x_2 = -x_1$,

$$\text{Ainsi } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ainsi le facteur associée à la valeur propre λ_1 est : $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$- E_{\lambda_2} = \ker(S - \lambda_2 I_2) \text{ On a } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_{\lambda_2} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$$

D'où $x_1 = x_2$,

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{\lambda_1} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Ainsi le facteur associée à la valeur propre λ_2 est : $\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Calculons la matrice C des composantes principales

On a $C = (c_1, c_2)$ où C_k est le $k^{\text{ième}}$ vecteur colonne de la matrice C et

On a : $C_k = y \alpha_k \quad k = 1, 2$

$$- C_1 = y \alpha_1 \text{ On a } y = X - 1_S g'; \text{ on obtient } y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha_1 =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ Ainsi, } C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$C_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$- C_2 = y \alpha_2 \text{ avec } \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où la matrice des composantes principales est : } C = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. les corrélation entre les composantes principales et les variables initiales

Pour, $k, j \in \overline{1, 2}$, on a $\text{cor}(X_j, C_k) = \frac{\sqrt{\lambda_k}}{s_j} \alpha_{kj}$ où $s_j = \sigma_j$ et α_{kj} est le $j^{\text{ième}}$ du facteur α_k . Ainsi, on a :

$$- \text{Cor}(X_1, C_1) = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\text{var}(X_1)}}; \alpha_{11} = \sqrt{\frac{16}{8}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On obtient : $Cor(X_1, C_1) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

— $Cor(X_2, C_1) = \sqrt{\frac{\lambda_1}{var(X_2)}} \alpha_{12}$, on obtient $Cor(X_2, C_1) = -\frac{2\sqrt{7}}{7}$

— $Cor(X_1, C_2) = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sigma_1} \alpha_{21} = \sqrt{\frac{12}{5}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

— $Cor(X_2, C_2) = \frac{\sqrt{\lambda_2}}{\sigma_2} \alpha_{22} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

5. la qualité de la représentation de l'individu ω_1 sur le 1^{er} axe
C'est le carré du cosinus de l'angle formé par l'individu ω_1 et sa projection orthogonale sur le premier axe. C'est la quantité :

$$\cos^2(\omega_1, \alpha_1) = \frac{C_{11}^2}{C_{11}^2 + C_{12}^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 0} = 1$$

$$\cos^2(\omega_1, \alpha_1) = 1$$

6. Donnons la contribution de l'individu ω_2 à la formation du deuxième axe
C'est la coordonnée de l'individu ω_2 suivant l'axe C_{22} . Donc la contribution de ω_2 à la formation de l'axe α_2 est : $C_{22} = 2\sqrt{2}$.
7. Donnons la qualité globale du premier axe

C'est la quantité : $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{16}{5} + \frac{12}{5}} = \frac{21}{7} \simeq 57\%$.

Donc $I = 57\%$

EXERCICE 3

1. Etude des tableaux des valeurs propres

- (a) la somme des valeurs propres représente l'inertie totale et est égale ici au nombre de variable c'est-à-dire 6.
 (b) JUSTIFICATION (critère de KAISER)

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \max\{\alpha/\lambda_\alpha \geq \bar{\lambda}\}, \bar{\lambda} = 1 \\ \hat{r} &= \max\{\alpha/\lambda_\alpha \geq 1\} = \max\{1; 2\} = 2 \\ \hat{r} &= 2 \end{aligned}$$

ce qui justifie le choix d'étudier que les deux premiers facteurs principaux.

2. Etude du tableau des corrélations

- (a) Les corrélations de plus fortes sont celles qui sont inférieures à $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou supérieures à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 Ainsi les subtests, les fortements corrélés entre eux sont CUB et CAL de corrélation 0,9207
 (b) La plupart des coefficients de corrélations sont positifs. Cela signifie qu'un bon résultat à un subtest est en général lié à un bon résultats aux autres subtests. Mais il existe une exception remarquable : la variable MEN est corrélée négativement avec les variables CUB, PUZ et CAL.

3. Etude des qualités de représentation dans le plan principal

- (a) L'individu le moins bien représenté par le premier plan principal est l'individu ϱ_{13} donc une qualité de représentation $0,2615 = 0,1151 + 0,1464$
 (b) L'individu le mieux représenté est l'individu ϱ_1 avec une qualité de représentation de $0,9885 = 0,4078 + 0,5807$

4. Etude du nuage des individus

- (a) La moyenne des contributions à la formation du 1er facteur principal est 6,67% .
 Les individus dont la contribution à la formation du 1er facteur principal est supérieure à la moyenne sont :
 * signe de la coordonnée (+) : ρ_1 (13,43%); ρ_4 (16,01%); ρ_5 (6,95%); ρ_7 (11,20%).
 * signe de la coordonnée (-) : ρ_6 (7,30%); ρ_9 (16,5%); ρ_{10} (9,66%); ρ_{14} (8,31%)
- (b) * signe de la coordonnée (+) : ρ_4 (7,77); ρ_7 (8,7); ρ_8 (17,65),
 * signe de la coordonnée (-) : ρ_1 (33,91); ρ_{11} (15,06)

5. Etude du nuage des variables

- (a) Les extrémités des vecteurs représentant les variables sont toutes très proches du cercle des corrélations , ce qui montre les qualités de représentation des variables sont satisfaites. Ainsi , la dernière colonne de la TABLE 6 montre que la variable la plus mal représentée est MEN, avec une qualité atteinte quand même 0,8160.
- (b) Seule la variable MEN est corrélée positivement avec le 1er axe , toutes les autres sont corrélées négativement.
 Ainsi , cet axe oppose le résultat au test MEN à tous les autres tests.
- (c) Les variables qui ont joué un rôle dominant dans la formation du deuxième axe sont MEN , COM et VOC avec les contributions respectives 33,64% ; 31,67% et 27,87% .

EXAMEN DE GESTION DE PROJET (décembre 2016)

Exercice 1 (voir 2^e session 2017)Exercice 2

A1 - Complétons le tableau :

Nom de la tâche	durées	Prédécesseurs
A - Etudier le dossier	2	—
B - Concevoir le montage	7	A
C - Réaliser le montage	8	B, E
D - Commander l'outillage	1	A
E - Recevoir l'outillage	1	D

Calculons les dates au plus tôt en n'oubliant pas la contrainte entre D et E.

Dates au plus tôt

Tâches	durées	Prédécesseurs	D+ tôt	F+ tôt
A	2	—	1	2
B	7	A	3	9
C	8	B, E	10	17
D	1	A	3	3
E	1	D	7	7

Dates au plus tard

Tâches	durées	Successseurs	D+ tard	F+ tard
A	2	D, B	1	2
B	7	C	3	9
C	8	—	10	17
D	1	E	5	5
E	1	C	9	9

A₂ - Établissons le tableau des marges

Tâches	Marge totale	Marge libre	Tâche critique ?
A	0	0	oui
B	0	0	oui
C	0	0	oui
D	2	0	non
E	2	2	non

B. la disponibilité: le fait de pouvoir ou ne pas pouvoir accomplir la tâche dans son entièreté (en terme de jours)

B₁ - Complétons le tableau

Nom de la tâche	Ressources	Durée (en jour)
A. Étudier le dossier	Alain [100%]	2
B. Concevoir le montage	Bernard [100%]	7
C. Réaliser le montage	Cédric [50%]	16
D. Commander l'outillage	Delphine [50%]	2
E. Recevoir l'outillage	Eric [100%]	1

On calcul maintenant les dates au plus tôt

Tâches	Durées	Prédécesseurs	successeurs	D+tôt	F+tôt	D+tard	F+tard
A	2	—	B, D	1	2	1	2
B	7	A	C	3	9	3	9
C	16	B, E	—	10	25	10	25
D	2	A	E	3	4	4	5
E	1	D	C	8	8	9	9

B₂ Établissons le tableau des marges :

Tâches	Marge totale	Marge libre	Tâche critique (oui/non) ?
A	0	0	oui
B	0	0	oui
C	0	0	oui
D	1	0	non
E	1	1	non

14.10.2020

EXAMEN GESTION DE PROJET session 1 2016-2017
--

Exercice 1: Montage d'un film

1) Le diagramme de PERT

* Calcul des dates et des marges

$T_0 = 1$

Tâch	Duréejr	Prédéc	D+tôt	F+tôt	Suc.	D+t	F+t	D+tôt:su.précoc	Mg.T	Mg.L
A	30	-	1	30	D	1	30	31	0	0
B	12	-	16	27	F	23	34	35	7	7
C	8	-	21	28	D	23	30	31	2	2
D	4	A,C	31	34	E,F	31	34	35	0	0
E	7	D	35	41	G	38	44	45	3	3
F	10	B,D	35	44	G	35	44	45	0	0
G	12	E,F	45	56	H	45	56	57	0	0
H	3	G	57	59	I	57	59	60	0	0
I	14	H	60	73	K	60	73	74	0	0
J	7	-	63	69	K	67	73	74	4	4
K	6	I,J	74	79	L	74	79	80	0	0
L	1	K	80	80	-	80	$80 = T_F$	-	0	0

Tâch=Tâches;Mg.T=Marge.Totale;Mg.L=Marge.Libre;D+t=D+tard;F+t=F+tard

N.B: Gestion des contraintes "Debut-Debut" entre les tâches (A et B),(A et C) et (I et J)

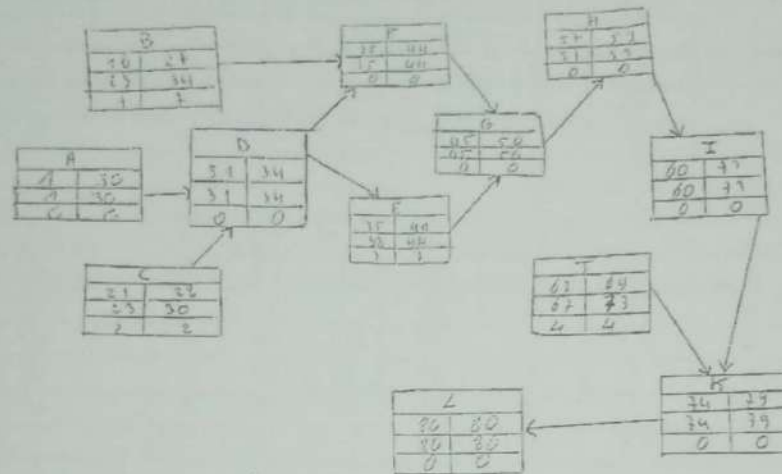
$$D + \text{tôt}(B) = D + \text{tôt}(A) + 15$$

$$D + \text{tôt}(C) = D + \text{tôt}(A) + 20$$

$$D + \text{tôt}(J) = D + \text{tôt}(I) + 3$$

Les dates au plus tard ne sont pas concernées par ces contraintes ni les marges.

* PERT



2) Quelles sont les tâches critiques du projet?

Ce sont les tâches dont la marge totale est nulle. Ce sont les tâches: A, D, F, G, H, I, K et L.

3)

La durée minimale de réalisation du projet est la somme des durées des tâches critiques. On obtient: 80 jours

4) Le nombre de personne minimum pour réaliser le projet

- . Une personne pour réaliser les tâches du chemin critiques;
- . Une personne pour réaliser les tâches $B \rightarrow E \rightarrow J$
- . Une personne pour réaliser la tâche C

Alors, il faut au minimum trois personnes pour réaliser le projet.

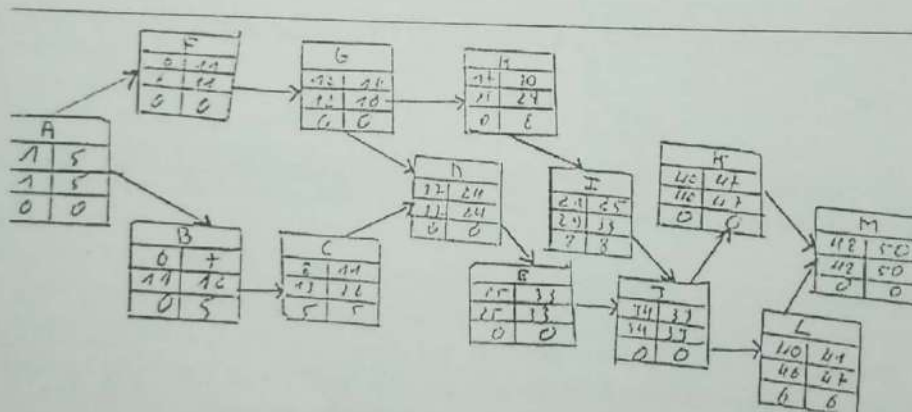
Exercice 2: Planification et PERT

1) Le programme de PERT

*Calcul des dates et des marges

Tâch	Duréejr	Prédéc	D+tôt	F+tôt	Suc.	D+t	F+t	D+tôt:su.préc	Mg.T	Mg.L
A	5	-	1	5	B,F	1	5	6	0	0
B	2	A	6	7	C	11	12	8	5	0
C	4	B	8	11	D	13	16	17	5	5
D	8	C,G	17	24	E	17	24	25	0	0
E	9	D	25	33	J	25	33	34	0	0
F	6	A	6	11	G	6	11	12	0	0
G	5	F	12	16	H,D	12	16	17	0	0
H	4	G	17	20	I	25	28	21	8	0
I	5	H	21	25	J	29	33	34	8	8
J	6	E,I	34	39	K,L	34	39	40	0	0
K	8	J	40	47	M	40	47	48	0	0
L	2	J	40	41	M	46	47	48	6	6
M	3	K,L	48	50	-	48	50	-	0	0

*PERT



2) Quelles sont les tâches critiques?

Ce sont les tâches dont la marge totale est nulle. On a: A, F, G, D, E, J, J et M.

3)

Chaque mois comporte 20 jours ouvrables donc du 1 avril au 15 juin, on a: $20 + 20 + 15 = 55$ jours.

Or d'après le PERT la durée minimale de réalisation du projet est 50 jours. Alors, l'inauguration peut avoir lieu comme prévu le 15 juin.

4)

La pose des canalisations correspond à la tâche *C* de marge totale 5 jours. Alors, un retard de 6 jours sur la tâche *C* aura une influence sur le délai prévu car la marge totale sera totalement consommée.

5)

La sonorisation sous-marine correspond à la tâche *I*.

Supprimer la tâche *I* est inutile. Car, la tâche *I* n'est pas sur le chemin critique, donc sa suppression ne change en aucun cas les délais de réalisations du projet.

EXAMEN DE GESTION DE PROJET 2^e session 2016-2017

Exercice 1

- a- les éléments qui permettent l'analyse du contours d'un projet sont :
- * la définition très claire des objectifs du projet
 - * la définition du périmètre fonctionnel
 - * l'analyse de ses interactions avec les autres produits de l'entreprise
 - * le dégagement de l'importance du projet
- b- Une marge Totale est l'intervalle de temps pendant lequel une tâche peut être retardée sans retarder la date de fin du projet
 Une marge Libre est l'intervalle de temps pendant lequel une tâche peut être retardée sans retarder d'autres tâches.
- c- Le processus de planification est basée sur 5 étapes que sont :
- * Dresser la liste des tâches et des jalons
 - * Déterminer les relations entre les tâches
 - * Estimer la durée de chaque tâche
 - * Construire le réseau
 - * Optimiser le réseau
- d- Les paramètres qui permettent de déterminer la durée d'une tâche sont le nombre de personnes allouées à la tâche et leur disponibilité
- e- La planification a pour objectif de déterminer à l'avance et le plus précisément possible tout ce qui doit être fait.
 Ses éléments sont :
- * l'organigramme des produits(PBS)
 - * l'organigramme des tâches(WBS)
 - * l'évaluation des tâches
 - * l'ordonnance des tâches
 - * liste des ressources humaines et de leur disponibilité
 - * liste des ressources matérielles nécessaires

Exercice 2

1. Le diagramme de PERT(Voir feuille annexe)
2. Les tâches critiques sont les tâches A,B,C,D,F,I,J,K et M.
3. La durée du projet est la somme des durées des tâches critiques. En la notant d on a :

$$d = 2 + 6 + 2 + 8 + 4 + 5 + 2 + 1 + 2$$

$$d = 32$$
 La durée minimale du projet est donc de 32 jours.

4. Le nombre minimum de personnes qu'il faut :
 - 1^{ère} personne : A,B,C,D,F,I,J,K et M
 - 2^e personne :E,G et L
 - 3^e personne :HIl faut donc 3 personnes au minimum.
5. Modification de la tâche L
 - a- La tâche L n'étant pas critique ,sa modification n'impacte pas la date de fin du projet(on peut calculer les nouvelles dates au plus tôt et au plus tard pour avoir le nombre de jours)
 - b- Le nombre de personnes ne changera pas car la durée est dépendante du nombre de personnes et non le contraire

Tâches	Durées	préd	D+tôt	F+tôt	Tâches	Durées	Succ	D+tard	F+tard	Tâches	M.T	M.L	Critique ?
A	2	B,E	7	8	A	2	J	7	8	A	0	0	oui
B	6	-	1	6	B	6	A	1	6	B	0	0	oui
C	2	F	31	32	C	2	-	31	32	C	0	0	oui
D	8	J	14	21	D	8	L,I	14	21	D	0	0	oui
E	3	-	1	3	E	3	A	4	6	E	3	3	non
F	2	K	29	30	F	2	C	29	30	F	0	0	oui
G	5	J	14	18	G	5	M	21	25	G	7	7	non
H	10	J	14	23	H	10	M	16	25	H	2	3	non
I	4	D	22	25	I	4	M	22	25	I	0	0	oui
J	5	A	9	13	J	5	H,D	9	13	J	0	0	oui
K	1	M	28	28	K	1	F	28	28	K	0	0	oui
L	2	D	22	23	L	2	M	24	25	L	2	2	non
M	2	L,I,G,H	26	27	M	2	K	26	27	M	0	0	oui

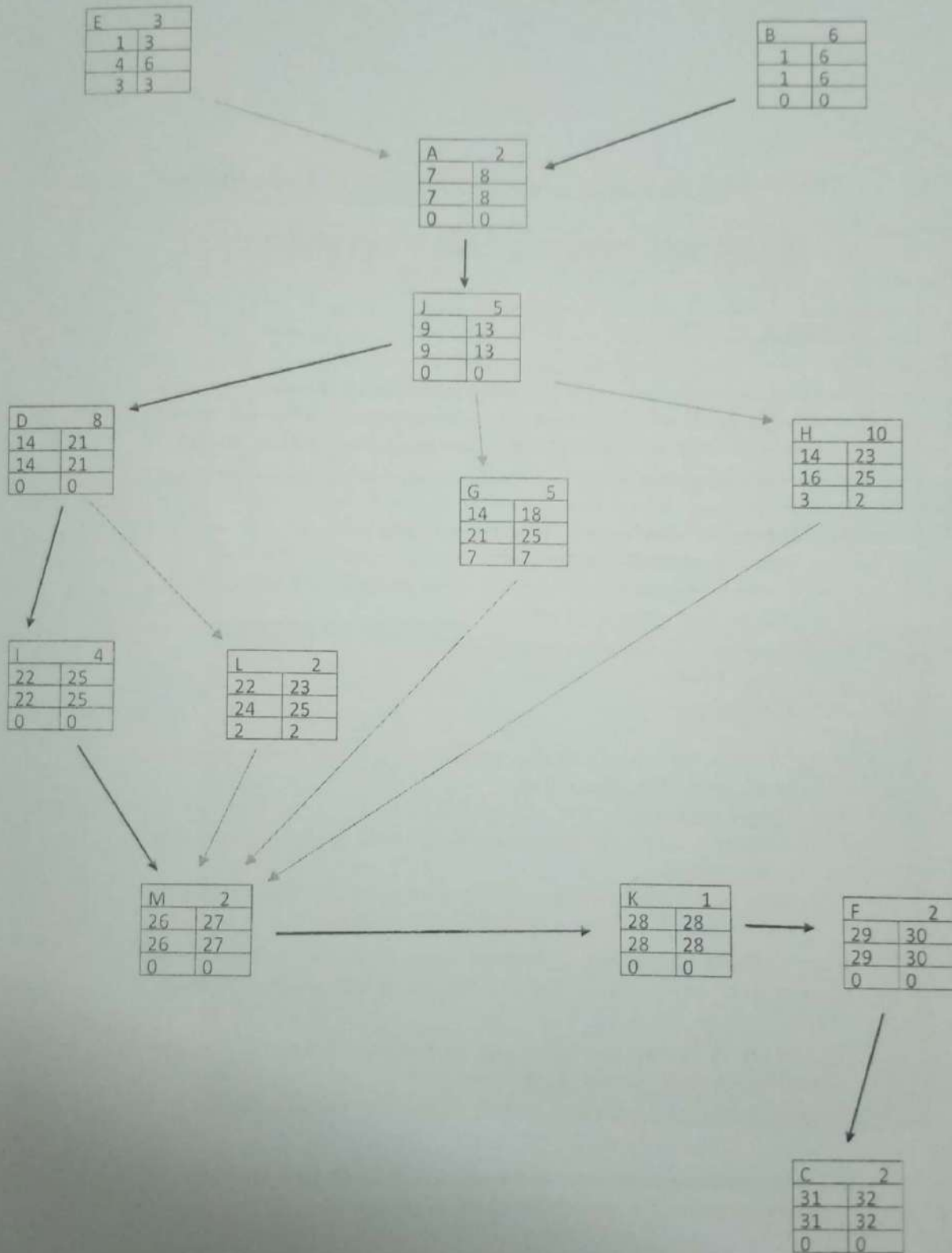


DIAGRAMME DE PERT (AVEC CHEMIN CRITIQUE EN GRAS)

UFR-MI :L3

Année 2017-2018

CORRECTION GESTION DE PROJET IERE SESSION

EXERCICE 1 : QCM

1. La gestion de projet : est le processus qui consiste à planifier , organiser et gerer les tâche et ressources d'un projet pour atteindre un objectif bien précis tout en respectant les contraintes de temps et de budget.
2. Les differents éléments qui permettent l'analyse du contours d'un projet sont :
 - Définir très clairement les objectifs du projet ;
 - Définir le perimetre fonctionnel ;
 - Analyser ses interactions avec les autres produits de l'entreprise ;
 - Degager l'importance du projet.
3. On peut un projet en deux critères :
 - Critère temporel et structurel :
 1. Critère temporel :
 - i. visibilité croissante par le chef de projet et le client eventuellement ;
 - ii. progression réelle des travaux.
 2. Critère structurel :
 - i. Maîtriser le projet : Un sous-ensemble cohérent de petites tailles plus facile à maîtriser ;
 - ii. Repartir les responsabilités : l'autonomie des modules permet de confier leurs realisations à differents responsables.
4. Les critères ou paramètres qui permettent de determiner la durée d'une tâche sont : Le nombre de personne alloués à la tâche et leur disponibilités
5. L'objectif de la planification est : de determiner à l'avance le plus precisement possible tout ce qui doit être fait.

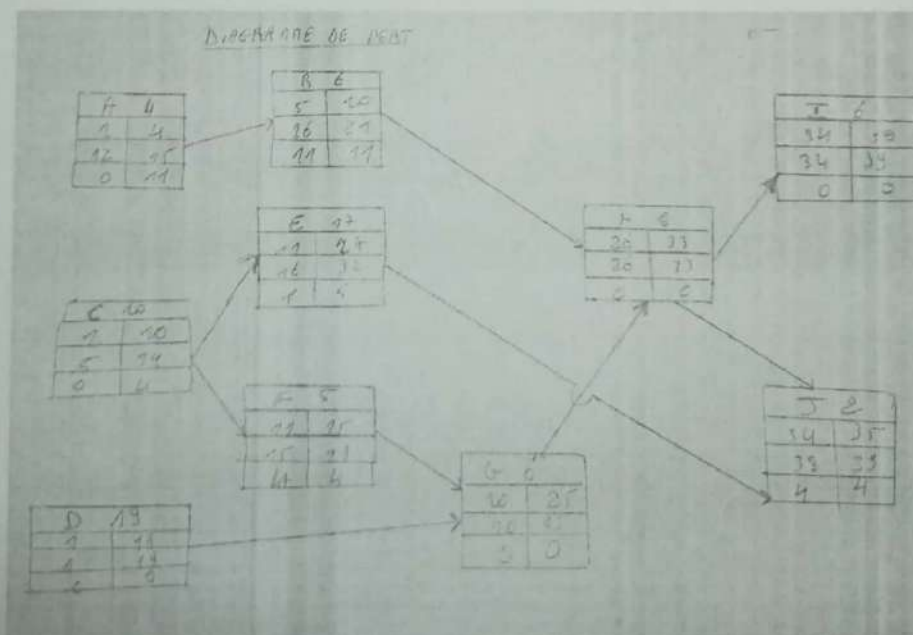
EXERCICE 2 :

1. Les tâches n'ayant pas l'antériorité sont : A, C, et D. Cela implique que ces tâches peuvent é réalisées en debut de projet.

2. Diagramme de PERT (Ne pas oublier les contraintes).

Tâches	Durée	Pre.	D+T ₀	F+T ₀	Suc.	D+T _a	F+T _a	d+t ₀ (SP)	M.L.	M.T.
A	4	-	1	4	B	12	15	5	0	11
B	6	A	5	10	H	16	21	26	11*	11
C	10	-	1	10	E, F	5	14	11	0	4
D	19	-	1	19	G	1	19	20	0	0
E	17	C	11	27	J	16	32	34	1*	5
F	5	C	11	15	G	15	19	20	4	4
G	6	D, F	20	25	H	20	25	26	0	0
H	8	B, G	26	33	I, J	26	33	34	0	0
I	6	H	34	39	-	34	39	-	0	0
J	2	E, H	34	35	-	38	39	-	4	4

Les traits en rouge représentent le chemin critique.



3. Quelles sont les tâches critiques du projet ?

2

Rappel : On dit qu'une tâche est critique lorsque sa marge totale est égale à zéro. Ainsi les tâches critiques sont : D, G, H et I .

4. Si la valeur de la contrainte entre E et J avait été négative ($FD = -5$), cela aurait signifié que : notre contrainte sera du type Debut-Fin.

5. A. Considerons la tâche E avec retard de 2 jours.

Alors la durée de E passe à 19 : $F+Tôt(E) = 27 + 2 = 29$

$D+Tôt(J) = \text{Sup}(F+Tôt(E, H)) + 1 = F+Tôt(E) = 34 + 1 = 35$

Car ne pas oublier la la contrainte qui est de 5 jours entre E et J

$F+Tôt(J) = D+Tôt(J) + \text{Durée}(J) - 1 = 35 + 2 - 1 = 36$.

Tant qu'on a un retard sur la tâche E supérieur à sa marge libre et inférieur à sa marge totale, cela n'a aucun impact sur la fin du projet car $F+\text{Tard}(J) > F+Tôt(J)$

B. Considerons la tâche E avec un retard de 6 jours. La durée de E passe à 23

$F+Tôt(E) = 27 + 26 = 33$; $D+Tôt(J) = 38 + 1 = 39$; $F+Tôt(J) = 39 + 2 - 1 = 40$

Tant que le retard sur la tâche E est supérieur à sa marge totale, cela impacte sur la fin du projet.

6. On considère que les durées des tâches sont calculées de façon que celles-ci soient réalisées par une seule personne.

A. Durée du projet = 39

B. IL faut 3 personnes au minimum pour réaliser le projet. (Voir annexe)

Gestion de projet 2018-2019

Exercice 2

Les dates au plus tôt

Code de tâche	Tâche antérieur	Durée	Début au plus tôt	Fin au plus tôt
A		6	1	6
B	A	10	7	16
C	B	5	17	21
D	B	7	17	23
E	B	6	17	22
F	E	4	23	26
G	C, D	8	24	31
H	G	4	32	35
I	G	5	32	36
J	H; I	6	37	42
K	F	9	27	35
L	K	2	36	37

Les dates au plus tard

Code de tâche	Durée	Successeur	Début au plus tard	Fin au plus tard
A	6	B	1	6
B	10	C, D, E	7	16
C	5	G	19	23
D	7	G	17	23
E	6	F	22	27
F	4	K	28	31
G	8	H, I	24	31
H	4	J	33	36
I	5	J	32	36
J	6		37	42
K	9	L	32	40
L	2		41	42

Marge totale

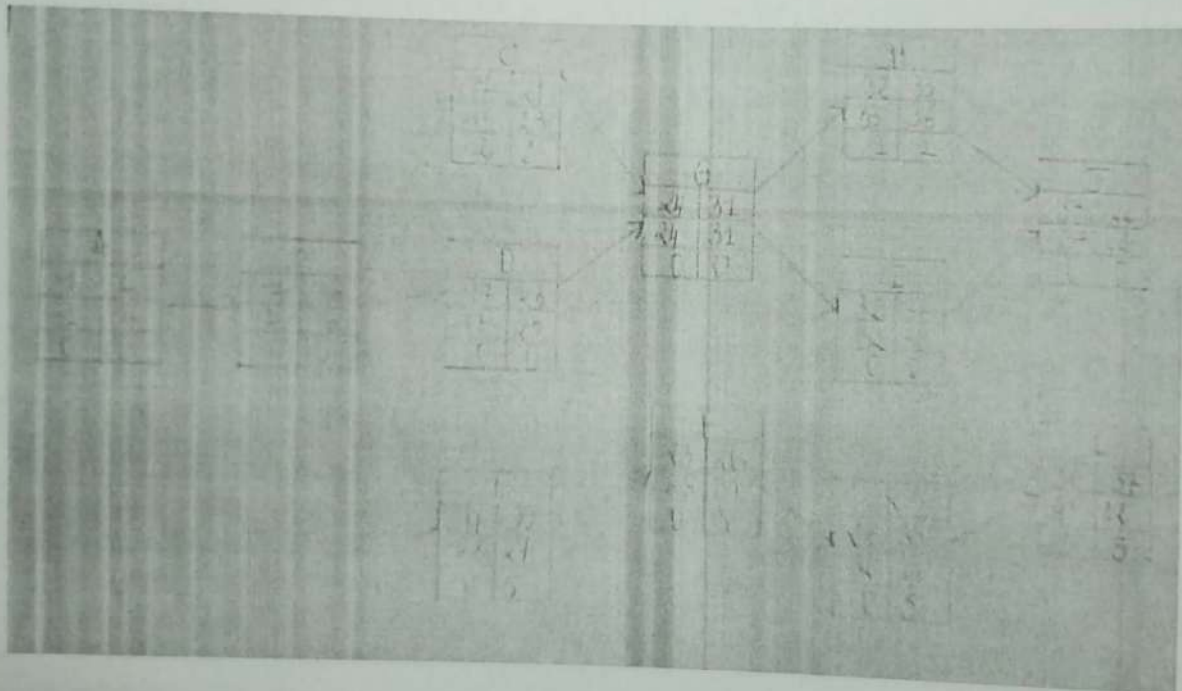
Code de tâche	Début au plus tard	Début au plus tôt	Marge totale
A	1	1	0
B	7	7	0
C	19	17	2
D	17	17	0
E	22	17	5
F	28	23	5
G	24	24	0
H	33	32	1
I	32	32	0
J	37	37	0
K	32	27	5
L	41	36	5

Marge libre

Code de tâche	Successeur le plus précoce	Début au plus tôt Du successeur	Fin au plus tôt de la tâche	Marge libre
A	B	7	6	0
B	C,D,E	17	16	0
C	G	24	21	2
D	G	24	23	0
E	F	23	22	0
F	K	27	26	0
G	H,I	32	31	0
H	J	37	35	1
I	J	37	36	0
J	-			0
K	L	36	35	0
L	-			5

Tracons le diagramme de PERT

1.



2. Les tâches critiques sont les tâches dont la marge totale est nulle. On a donc : A, B,D,G,I et J.
3. La durée minimale est la somme des durées des tâches critiques
Notons d_m : la durée minimale
On a donc : $d_m = 6 + 10 + 7 + 8 + 5 + 6 = 42$ jours
4. Il faut 3 personnes pour réaliser le projet.
5. a) Pour résoudre cela, nous allons retarder la tâche de 4 jours.
b) La date de fin des travaux ne sera pas affectée car la marge totale K n'est pas totalement consommée.
c) le nombre total de personne minimum pour réaliser ce projet ne changera pas, car la durée est indépendante du nombre de personnes et non le contraire.

EXAMEN DE TECHNIQUES DE RECHERCHE DOCUMENTAIRE(1^{ère} session 2016-2017)Exercice 1

1. Un document secondaire est un document issu d'un processus documentaire. Il contient des données analytiques ou signalétiques sur les documents primaires
2. Les différences essentielles entre un livre et un périodique sont :
 - * le périodique paraît régulièrement sous le même titre tandis que le livre est un document qui constitue une étude détaillée sur un sujet déterminé.
 - * le livre possède un numéro ISBN tandis que le périodique possède un numéro ISSN
3. Définition :
 - Littérature grise : documentation non commercialisée, diffusée de manière restreinte.
 - Bruit : ensemble des réponses non pertinentes obtenues à l'occasion d'une recherche documentaire.
 - La cote : ensemble de symboles (lettres, chiffres, signes) servant à identifier, classer, ranger et localiser un livre dans un fond de bibliothèque ou une série d'archives.
 - La troncature : méthode de recherche qui consiste à remplacer des lettres manquantes. Elle est utilisée pour raccourcir la frappe, sélectionner plusieurs termes ayant une racine commune ou pour rechercher à la fois le singulier et le pluriel d'un mot.

Exercice 2

1. L'index d'un livre est :
 - a Une liste alphabétique de termes qui permet de retrouver une information
 - b Une liste de termes employés dans l'ouvrage en question
2. Pour repérer les informations utiles dans un ouvrage, je me sers :
 - b De la table des matières
 - d De l'index
3. Vrai ou faux
 - a vrai

b faux

Exercice 3

1. pour vérifier la pertinence de l'information trouvée dans un livre, par rapport au sujet traité
a- je lis les résumés d'ouvrage sur la 4ème de couverture
2. Une bibliographie
c- liste des références de documents
3. En général l'opérateur booléen par défaut est le ET.
La recherche s'écrit :
« Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique » filetype :docx

EXAMEN DE TECHNIQUES DE RECHERCHE DOCUMENTAIRE

(2^e session 2016-2017)

Exercice 1

1. Un thésaurus est un type de langage documentaire qui consiste en une liste de termes sur un domaine de connaissances, reliés entre eux par des relations synonymiques, hiérarchiques et associatives. Il permet d'harmoniser sous un même descripteur les différents termes qui peuvent être employés pour décrire un même concept.
2. Définition :
 - Bibliographie analytique : bibliographie dans laquelle chaque notice comporte un résumé du document écrit
 - Biobibliographie : notice ou document renseignant sur la vie et l'œuvre d'une personne et comportant l'ensemble complet des références dont cette personne est l'auteur.
 - La cote : ensemble de symboles (lettres, chiffres, signes) servant à identifier, classer, ranger et localiser un livre dans un fond de bibliothèque ou une série d'archives.

Exercice 2

L'index d'un livre est :

- a Une liste alphabétique de termes qui permet de retrouver une information
- b Une liste de termes employés dans l'ouvrage en question

Exercice 3

Dans un site web un lien hypertexte permet :

- e de se diriger vers un autre site

Exercice 4

1. Le principe de la classification Dewey est thématique. Elle a pour but de regrouper sur un même rayonnage les ouvrages ou périodiques d'un domaine de connaissance. Son fonctionnement est décimal. L'ensemble des connaissances est subdivisé en 10 grandes classes avec pour chacune une couleur. Chaque classe est divisée en 10 domaines précis eux même subdivisés en 10 domaines encore plus précis.
2. Le domaine sciences a pour indice 500 et la couleur est le vert.
3. le classement des cotes dans l'ordre croissant est :
d-c-b-a

EXAMEN D'ENTREPRENARIAT 2016-2017 1^{ère} session

- 1-a faux
- b- faux
- c- vrai
- d- faux
- e- faux
- f- faux
- g- vrai

1. La franchise est un système de commercialisation de produits, services ou technologies reposant sur une étroite collaboration entre deux entreprises juridiquement et financièrement indépendantes l'une de l'autre. Pour le franchisé on relève ce qui suit :
 - * les avantages :
 - il bénéficie de la notoriété d'une marque connue, du savoir faire du franchiseur, ainsi que d'une formation adaptée.
 - il profite d'un contrôle et d'assistance permanente tout au long de son exploitation.
 - * les inconvénients
 - il n'est pas indépendant vis-à-vis du franchiseur et doit se plier à ses exigences
 - l'investissement de départ nécessite pour lui un fond propre conséquent.
2. La réflexion, l'élaboration et la mise en oeuvre
3. Une entreprise est une unité de répartition de richesses en ce sens qu'elle vend des produits pour ensuite distribuer les fruits de cette vente en rémunérant les facteurs de production, payant ses charges fiscales et sociales et réalisant un surplus pour sa survie.
4. Être capable d'influencer positivement les autres, avoir envie de relever des défis, avoir la volonté de travailler fort.

EXAMEN D'ENTREPRENARIAT 2016-2017 2^e session

1. Dans le cadre de l'entrepreneuriat le terme « Essaimage » désigne le soutien qu'une entreprise (Essaimeur) apporte à un ou plusieurs de ses salariés (Essaimés) pour la reprise ou la création d'une entreprise.

Comme avantages on peut citer :

* Pour l'essaimé :

- Il bénéficie d'un accompagnement méthodologique et technique
- Il quitte son entreprise dans une relation gagnant \ gagnant.

* Pour l'essaimeur :

- Il peut recruter des partenaires ayant un potentiel entrepreneurial
- Il valorise la prise d'initiative et donc fait évoluer la culture de son entreprise

2. Vrai ou faux

- a) faux
- b) vrai
- c) faux
- d) faux
- e) vrai
- f) faux
- g) faux
- h) faux
- i) vrai
- j) vrai

3. Les étapes d'un projet entrepreneurial : la réflexion, l'élaboration et la mise en oeuvre
4. Être persévérant, être déterminé, être solidaire, être débrouillard, être motivé, être responsable.

ENGLISH EXAMINATION 1st semester 1st session 2016-2017

I- Write the number sentence corresponding to each word problem and give the answer

Gerald traveled 432 miles by bus and 121 miles by train. How far did he go?

Gerald did go 553 miles

Lucy has two apples. Julie has five apples. How many fewer apples does Lucy have than Julie?

Lucy have three(3) few apples than Julie

Louise is three years older than her sister Laura. Laura was 34 two years ago. How old is Louise now?

Louise is 39 years old now

Zachary bakes 63 brownies and arranges them equally on 7 plates to give to 7 neighbors. How many brownies does each neighbor receive?

Each neighbor receive 9 brownies

All of the 121 fourth graders were in the gym. Mr Harold's class of children left. How many remained in the Gym?

Mrs West has 49 buttons to sew on shirts. She plan to sew 7 buttons on each shirt. She has enough buttons for how many shirts?

Mrs West has enough buttons for 7 shirts

A jet flies about 570 miles in one our. How far will it fly in 3 hours?

It will fly about 1710 miles

II- Read the figures or expressions

0.73 :(zero) point seven three

0.666 :(zero) point triple 6

$\frac{2}{3}$:two over three or two thirds

$\frac{1}{4}$: one over four or a quarter

$\frac{3}{4}$: three over four or three quarters

$\frac{2}{5}$: two over five or two fifths

5^2 : five squared

8^3 : eight cubed

6

7

$9^{\frac{1}{2}}$: nine to the half power

$\sqrt{2}$: the root of 2

$\sqrt[3]{2}$:the cubed root of 2

$\sqrt[n]{2}$:the n-th root of 2

- $\sqrt{a+b}$: the squaroot of a plus b
 $(x+y)^2$: the sum of x and y squared
 $x = 2y$: x equals twice(or two) y
 $x \equiv y$: x is congruent to y
 $0 < x < 1$: x is grater than 0 and is less than 1

III- Read these expressions or equations

- $ax^2 + bx + c = 0$: ax squared plus bx plus c equals 0
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$: x equals negative b plus or minus the squaroot of b squared minus 4ac over 2a
 $(2x+3)(x+1)$: the product of the quantity 2x plus 3 and the sum of x and 1
 $3^{x+1} = 81 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^4$: 3 to the power x plus 1 equals 81 implies 3 to the power x plus 1 equals 3 to the 4-th power
 $\log_a = b \iff x = a^b$

EXAMEN DE TECHNIQUE D'EXPRESSION 2016-2017Exercice 1

1. Tous les étudiants ont été reçu à leur examen final
2. La côte d'Ivoire et le mali ont des relations bilatérales dans le domaine militaire
3. Deux étudiants de licence 3 échangent pendant les épreuves
4. Les hommes d'affaires sont toujours à cheval sur deux avions
5. La foule est sortie en masse le long de la voirie pour ovationner le chef de l'Etat.

Exercice 2

Les phrases correctes sont celles que nous ne corrigeons pas ici :

P_3 On dit frémissements et non frémises

P_5 Les sécousses ne peuvent définir un chaos

P_8 Collusion(entente secrète entre des personnes) différent de collision(choc entre deux corps se rencontrant)

Exercice 3

1. Les garçons qui nous ont reçu(e)s sont sympathiques
2. Voici une chanson que j'ai entendue jouer pendant mon séjour à l'intérieur du pays
3. Les musiciens que nous avons vus jouer ce soir sont de véritables professionnels
4. Qui sont ces personnes qui se sont succédé sur la piste ?
5. La montre que j'ai fait(e) réparer coûte cher.

TD Calcul différentiel

Prof KOURDUMA

Exercice 1

1) f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur \mathbb{R}^2 .

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

$(x,y) \mapsto \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Car fonction rationnelle. Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car $f|_{(\mathbb{R}^2)^*}(x,y) = \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}$

* Dérivées partielles de f en $(0,0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\text{on a: } \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2 y^2 (x^2 + y^2) - 2x^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= x^2 y^2 \frac{(3x^2 + 3y^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= x^2 y^2 \frac{(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{De même } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^3 y (x^2 + y^2) - 2x^3 y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= 2x^3 y \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{Posons } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad r > 0, \theta \in [0, 2\pi[$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| = \left| \frac{r^6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta)}{r^4} \right| \leq 4r^2 \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| = \left| 2r^6 \cos^3 \theta \sin \theta \cdot \frac{\cos^2 \theta}{r^4} \right| \leq 2r^2 \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$$

donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$

Par conséquent $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$

Conclusion : f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

2.) $f|_{(\mathbb{R}^2)^*}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Donc f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}^2)^*$

D'où f est 2 fois différentiable sur $(\mathbb{R}^2)^*$

* dérivées partielles secondes de f

Soit $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[x^2 y^2 (x^2 + y^2)^{-2} (x^2 + 3y^2) \right] \\ &= y^2 \left[2x (x^2 + y^2)^{-2} (x^2 + 3y^2) - 4x^3 (x^2 + y^2)^{-3} (x^2 + 3y^2) \right. \\ &\quad \left. + 2x^3 (x^2 + y^2)^{-2} \right] \end{aligned}$$

$$= 2xy^2 (x^2 + y^2)^{-3} \left[(x^2 + y^2)(x^2 + 3y^2) - 2x^2(x^2 + 3y^2) + x^2(x^2 + y^2) \right]$$

$$= 2xy^2 (x^2 + y^2)^{-3} \left[x^4 + 4x^2 y^2 + 3y^4 - 2x^4 - 6x^2 y^2 + x^4 + x^2 y^2 \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2xy^4 (3y^2 - x^2) (x^2 + y^2)^{-3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[2x^5 y (x^2 + y^2)^{-2} \right]$$

$$= 2y \left[5x^4 (x^2 + y^2)^{-2} - 4x^6 (x^2 + y^2)^{-3} \right]$$

$$= 2x^4 y (x^2 + y^2)^{-3} \left[5(x^2 + y^2) - 4x^2 \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x^4 y (x^2 + y^2)^{-3} (x^2 + 5y^2)$$

* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$. D'après le théorème de Cauchy-Schwarz

(car f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}^2)^*$)

$$\begin{aligned} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[2x^5 \cdot y (x^2 + y^2)^{-2} \right] \\ &= 2x^5 \left[(x^2 + y^2)^{-2} - 4y^2 (x^2 + y^2)^{-3} \right] \\ &= 2x^5 (x^2 + y^2)^{-3} [x^2 + y^2 - 4y^2] \\ &= 2x^5 (x^2 - 3y^2) (x^2 + y^2)^{-3} \end{aligned}$$

Soit $x \neq 0$

$$\frac{1}{x} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right] = \frac{1}{x} (0 - 0) = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right] = 0$$

$$\frac{1}{x} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] = \frac{1}{x} (0 - 0) = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] = 0$$

* Soit $y \neq 0$

$$\frac{1}{y} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right] = \frac{1}{y} (0 - 0) = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right] = 0$$

$$\frac{1}{y} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right] = \frac{1}{y} (0 - 0) = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0$$

* continuité des dérivées partielles seconde en $(0, 0)$

$$\text{Posons } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

14.10.2020

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \right| = \left| 2r^5 \cos^4 \theta \sin^4 \theta \times r^6 \times r^2 (3 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right|$$

$$\leq 8r \rightarrow 0$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est continue en $(0, 0)$

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \right| = \left| 2r^5 \cos^5 \theta \times r^6 \times r^2 (\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta) \right| \leq 8r$$

$$\rightarrow 0$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est continue en $(0, 0)$

$$* \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right| = \left| 2r^5 r^{-6} r^2 \cos^4 \theta \sin^4 \theta (\cos^2 \theta + 5 \sin^2 \theta) \right|$$

$$\leq 12r \rightarrow 0$$

$$r \rightarrow 0$$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est continue en $(0, 0)$

Conclusion: Toutes les dérivées partielles secondes existent et sont continues sur \mathbb{R}^2

Donc f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2

D'où f est 2-fois différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 1

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1 - Montrons que f est de classe \mathcal{C}^1 i.e f différentiable et sa différentielle est continue.

* Différentiabilité

• Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; $(x, y) \mapsto \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}$ est différentiable, car fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

* Au point $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

$$\text{Posons } \mathcal{E}(h_1, h_2) = \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\|(h_1, h_2)\|}$$

$$\text{Donc } \mathcal{E}(h_1, h_2) = \frac{h_1^2 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$\text{en prenant } \|(h_1, h_2)\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\text{ona: } \begin{cases} |h_1| \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \\ |h_2| \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \|\mathcal{E}(h_1, h_2)\| \leq \frac{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2} (h_1^2 + h_2^2)}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}$$

$$\leq h_1^2 + h_2^2 \rightarrow 0 \text{ car } (h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)$$

Par conséquent $\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \mathcal{E}(h_1, h_2) = 0$

D'où f est différentiable en $(0,0)$

En conclusion f est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La fonction $(x,y) \mapsto \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

En particulier elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (*)

Au point voisinage de $(0,0)$

ona: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$;

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 y^2 \frac{(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3 y \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \right| &= \frac{|x|^2 |y|^2 |x^2 + 3y^2|}{|x^2 + y^2|^2} \\ &\leq \frac{(x^2 + y^2)^2 \times 4(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq 4(x^2 + y^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right| &= \frac{2|x|^5 |y|}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2 \frac{(x^2 + y^2)^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\leq 2(x^2 + y^2) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

En résumé $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $(0,0)$ (**)

D'après (*) et (**) on conclut que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 0$$

Soit $y \neq 0$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = 0$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = 0$$

$$\text{ona: } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$$

Finalement les dérivées partielles sont continues sur \mathbb{R}^2 .

Donc f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2

Bonc f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

2.) M. f 2 fois différentiable ?

f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est de classe C^∞ d'après (*)

En particulier elle est de classe C^2

Bonc elle est 2 fois différentiable.

$\forall a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \forall h, k \in \mathbb{R}^2$

$$(d^2 f(a))(h, k) = [d^2 f(a)] \left((h_1, h_2), (k_1, k_2) \right)$$

$$= \sum_{1 \leq i, j \leq 2} h_i k_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$$

$$= h_1 k_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + h_2 k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) +$$

$$+ h_1 k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + h_2 k_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

$$(d^2 f(a))(h, k) = h_1 k_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + h_2 k_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) + (h_1 k_2 + h_2 k_1) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$$

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$* \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left[x^2 y^2 \cdot \frac{x^2 + 3y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

$$= 2xy^4 \cdot \frac{3y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$* \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x^5 \cdot \frac{x^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$* \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x^4 y \cdot \frac{x^2 + 5y^2}{(x^2 + y^2)^3}$$

calcul en $(0,0)$

soit $x \neq 0$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = 0$$

14.10.2020

Pour f est admet une différentielle seconde ^{LMD/CSC} en
chaque point de \mathbb{R}^2 et $d^2 f(0,0) = 0$.

14.10.2020
Exercice 2

$$\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \int_a^b x[f(x)] dx$$

Montrons ϕ est différentiable.Soit $f, h \in E$

$$\phi(f+h) - \phi(f) = \int_a^b x[(f+h)(x)] dx - \int_a^b x[f(x)] dx$$

$$= \int_a^b (x[f(x) + h(x)] - x[f(x)]) dx$$

x étant de classe C^1 sur \mathbb{R} , d'après le théorème des accroissements finis, on a :

$$x[f(x) + h(x)] - x[f(x)] = h(x) x' [f(x) + \theta h(x)] \text{ où}$$

$$\theta(x) \in]0, 1[$$

$$\Rightarrow \phi(f+h) - \phi(f) = \int_a^b h(x) x' [f(x) + \theta(x) h(x)] dx$$

$$x' \text{ étant continue, } x' [f(x) + \theta(x) h(x)] \equiv x' [f(x)] + \varepsilon_x(h(x))$$

$$\text{où } \varepsilon_x(h(x)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\text{D'où}$$

$$\phi(f+h) - \phi(f) - \int_a^b x' [f(x)] h(x) dx = \int_a^b h(x) x' [f(x) + \theta(x) h(x)] dx - \int_a^b x' [f(x)] h(x) dx$$

$$= \int_a^b (x' [f(x) + \theta(x) h(x)] - x' [f(x)]) h(x) dx$$

$$\left| \phi(f+h) - \phi(f) - \int_a^b x' [f(x)] h(x) dx \right| \leq \|h\|_{\infty} \int_a^b |x' [f(x) + \theta(x) h(x)] - x' [f(x)]| dx$$

$$\frac{1}{\|h\|_{\infty}} \left| \phi(f+h) - \phi(f) - \int_a^b x' [f(x)] h(x) dx \right| \leq \int_a^b |x' [f(x) + \theta(x) h(x)] - x' [f(x)]| dx$$

f, h étant continue sur le compact $[a, b]$ alors elles sont bornées sur $[a, b]$.

Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}$ tq
 $\forall x \in [a, b], f(x), h(x), f(x) + \theta(x) h(x) \in K$

x' étant continue sur K , x' est uniformément continue.

$$f_1 \rightarrow 0 \text{ on } a, f_2 > 0, \exists \eta > 0 \text{ tq } \forall x \in [a, b]$$

$$|f(x) + \theta(x)h(x) - f(x)| < \eta \Rightarrow |\alpha'[f(x) + \theta(x)h(x)] - \alpha'[f(x)]| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow |\theta(x)h(x)| < \eta \Rightarrow |\alpha'[f(x) + \theta(x)h(x)] - \alpha'[f(x)]| < \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tq } \|h\|_\infty < \eta \Rightarrow |\alpha'[f(x) + \theta(x)h(x)] - \alpha'[f(x)]| < \epsilon$$

$$\forall x \in [a, b], \int_a^b |\alpha'[f(x) + \theta(x)h(x)] - \alpha'[f(x)]| dx < (b-a)\epsilon$$

Ainsi $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0$ tq $\|h\|_\infty < \eta$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\|h\|_\infty} \left| \phi(f+h) - \phi(f) - \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x) dx \right| < (b-a)\epsilon$$

d'où $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_\infty} \left| \phi(f+h) - \phi(f) - \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x) dx \right| = 0$

Posez $L(h) = \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x) dx$

$\forall h_1, h_2 \in E, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ on a:
 $L(\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) = \lambda_1 L(h_1) + \lambda_2 L(h_2)$ (car l'intégrale est linéaire)

donc L est linéaire.

• continuité

$$|L(h)| \leq \int_a^b |\alpha'[f(x)]| |h(x)| dx$$

$$\leq \int_a^b |\alpha'[f(x)]| \sup_{t \in [a, b]} |h(t)| dx \leq \|h\|_\infty \int_a^b |\alpha'[f(x)]| dx$$

$$|L(h)| \leq \|h\|_\infty \times C \text{ d'où } L \text{ est continue}$$

Finalement ϕ est différentiable et on a:

$$d\phi(f) \cdot h = \int_a^b \alpha'[f(x)] \cdot h(x) dx \text{ i.e. } \phi'(f)h = \int_a^b \alpha'[f(x)]h(x) dx$$

EXERCICE 3

$$1) \quad \phi : E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle u(x), x \rangle$$

Montrons que ϕ est différentiable sur E .

$$\text{soit } \phi_1 : E \rightarrow E \times E \quad \phi_2 : E \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (u(x), x) \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

- u est linéaire et continue donc différentiable
 - Id_E est linéaire continue donc différentiable
- donc ϕ_1 est linéaire différentiable car chacune de ses applications composantes est différentiable.

ϕ_2 est bilinéaire

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad |\phi_2(x, y)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

(inégalité de Schwarz)

donc ϕ_2 est bilinéaire continue d'où ϕ_2 est différentiable.

finalement $\phi = \phi_2 \circ \phi_1$ est différentiable

soit $a, h \in E$

$$\phi'(a) \cdot h = (\phi_2 \circ \phi_1)'(a) \cdot h = (\phi_2'(\phi_1(a))) \circ \phi_1'(a) \cdot h$$

$$\text{on a : } \phi_1'(a) \cdot h = (u(a), h, \text{Id}'(a) \cdot h)$$

$$\phi_2'(a) \cdot h = (u(h), h)$$

$$\phi_2'(x, y) \cdot (h, k) = \phi_2(x, k) + \phi_2(h, y)$$

$$\begin{aligned} \phi'(a) \cdot h &= \phi_2'(u(a), a) \cdot (u(h), h) \\ &= \phi_2(u(a), h) + \phi_2(u(h), a) \end{aligned}$$

$$\phi'(a) \cdot h = \langle u(a), h \rangle + \langle u(h), a \rangle$$

comme u est un endomorphisme symétrique

$$\text{on a : } \langle u(h), a \rangle = \langle h, u(a) \rangle$$

$$2) \quad \varphi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \langle u(x), x \rangle \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \varphi(0) = 0$$

étude de la différentiabilité de φ

$$\varphi(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\phi(x)}{\|x\|^2}$$

$$\text{Soit } f: x \mapsto \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

on obtient φ en posant $u = \text{Id}_{\mathbb{E}}$ dans l'expression de ϕ ; or $\text{Id}_{\mathbb{E}}$ est un endomorphisme continue et symétrique de \mathbb{E} . Donc ϕ est différentiable sur \mathbb{E} .

$$\text{De plus } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc $\varphi = \frac{\phi}{f}$ est différentiable sur $\mathbb{E} \setminus \{0\}$

De plus $f(x) \neq 0$

calcul de $\varphi'(x)$, $\forall x \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$

$$\varphi'(x) \cdot h = \frac{f(x) \phi'(x) \cdot h - \phi(x) f'(x) \cdot h}{f^2(x)}$$

$$= \frac{2 \|x\|^2 \langle u(x), h \rangle - 2 \langle u(x), x \rangle \langle x, h \rangle}{\|x\|^4}$$

* différentiabilité en 0

Si φ est différentiable en 0, alors φ admet une dérivée au point 0 suivant tout vecteur $v \in \mathbb{E}$

Soit $v \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(0+tv) - \varphi(0)}{t} &= \frac{\phi(tv)}{\|tv\|^2} = \frac{\langle u(tv), tv \rangle}{t^2 t \|v\|^2} \\ &= \frac{t^2 \langle u(v), v \rangle}{t^2 t \|v\|^2} = \frac{\langle u(v), v \rangle}{t \|v\|^2} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(0+tv) - \varphi(0)}{t} = \infty$$

14.10.2020

ψ n'admet pas de dérivée au point 0 suivant $\mathbb{R} \times \{0\}$
donc ψ n'est pas différentiable en 0.

exercice 5

E espace de Banach

$$f: Z(E) \times Z(E) \rightarrow Z(E)$$
$$(A, B) \mapsto B - \frac{1}{2}(\text{Id}_E - A + B^2)$$

1) * Montrons que f est continue

soit $f_1: Z(E) \times Z(E) \rightarrow Z(E)$
 $(A, B) \mapsto B$

$$f_2: Z(E) \times Z(E) \rightarrow Z(E)$$
$$(A, B) \mapsto \frac{1}{2}A$$

$$f_3: Z(E) \times Z(E) \rightarrow Z(E)$$
$$(A, B) \mapsto -\frac{1}{2}\text{Id}_E$$

$$f_4: Z(E) \times Z(E) \rightarrow Z(E)$$
$$(A, B) \mapsto -\frac{1}{2}B^2$$

• $f_1 = P_2$ la deuxième projection canonique de $Z(E) \times Z(E) \rightarrow Z(E)$
 P_2 linéaire continue donc différentiable

• $f_2 = \frac{1}{2}P_1$, donc f_2 est différentiable

• f_3 est une application constante donc f_3 est continue et différentiable.

• $f_4 = -\frac{1}{2} \circ \beta$ avec $\beta: Z(E) \times Z(E) \rightarrow Z(E) \times Z(E)$
 $(A, B) \mapsto (B, B)$

$$\alpha: Z(E) \times Z(E) \rightarrow Z(E)$$
$$(u, v) \mapsto uv$$

Les deux applications composantes de β sont égales à $f_1 = P_2$ qui est différentiable en

$\| \chi(u, v) \| = \| u \otimes v \| \leq \| u \| \| v \|$ donc χ est bilinéaire continue.

Donc f est différentiable par conséquent f est continue.

$$\ast \text{ on a: } f(\text{Id}_E, \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(E)}) = \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(E)} - \frac{1}{2} (\text{Id}_E - \text{Id}_E + \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(E)}^2) \\ = \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(E)}$$

$\ast f$ est différentiable donc elle admet des dérivées partielles en tout point (A, B)
soit $A \in \mathcal{Z}(E)$ fixe

$$f: \mathcal{Z}(E) \longrightarrow \mathcal{Z}(E)$$

$$B \longmapsto f(A, B) = B - \frac{1}{2} (\text{Id}_E - A + B^2)$$

$$\text{soit } g_1: \mathcal{Z}(E) \longrightarrow \mathcal{Z}(E)$$

$$B \longmapsto B$$

$$g_2: \mathcal{Z}(E) \longrightarrow \mathcal{Z}(E)$$

$$B \longmapsto -\frac{1}{2} (\text{Id}_E - A)$$

$$g_3: \mathcal{Z}(E) \longrightarrow \mathcal{Z}(E)$$

$$B \longmapsto B^2$$

$$g_1 = \text{Id}_{\mathcal{Z}(E)} \text{ alors } g_1' = g_1 = \text{Id}_{\mathcal{Z}(E)}$$

g_2 est une application constante.

$$\text{donc } g_2'(B) = \mathcal{O}_{\mathcal{Z}(E)}$$

$$g_3 = \alpha \circ \gamma \text{ avec } \gamma: \mathcal{Z}(E) \longrightarrow \mathcal{Z}(E) \times \mathcal{Z}(E) \\ B \longmapsto (B, B)$$

$$g_3'(B) \cdot h = (\alpha'(\gamma(B)) \circ \gamma'(B)) \cdot h$$

$$\gamma'(B) \cdot h = (\text{Id}(h), \text{Id}(h)) = (h, h)$$

$$\alpha'(\gamma(B)) \cdot (h, h) = \alpha(B, B)(h, h) \\ = \alpha(B, h) + \alpha(h, B)$$

Par suite

$$g'(B) \circ h = h - \frac{1}{2} (B \circ h + h \circ B)$$

donc $\frac{\partial f}{\partial B}(A, B) \circ h = h - \frac{1}{2} (B \circ h + h \circ B)$

on a donc $\left(\frac{\partial f}{\partial B}(A, B) - \frac{\partial f}{\partial B}(A_0, B_0) \right) \circ h$

$$T(h) = -\frac{1}{2} (B_0 \circ h + h \circ B) + \frac{1}{2} (B_0 \circ h + h \circ B_0)$$

$$= \frac{1}{2} (B_0 \circ h - B \circ h) + \frac{1}{2} (h \circ B_0 - h \circ B)$$

$$T(h) = \frac{1}{2} (B_0 - B) \circ h + \frac{1}{2} h \circ (B_0 - B)$$

$$\|T(h)\| \leq \frac{1}{2} \|B_0 - B\| \|h\| + \frac{1}{2} \|h\| \|B_0 - B\|$$

$$\|T(h)\| \leq \|h\| \|B_0 - B\|$$

$$\frac{\|T(h)\|}{\|h\|} \leq \|B_0 - B\|$$

$$\|T\| \leq \|B_0 - B\|$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial B}(A, B) - \frac{\partial f}{\partial B}(A_0, B_0) \right\| \leq \|B - B_0\| \xrightarrow{(A, B) \rightarrow (A_0, B_0)} 0$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial B}$ est continue

on a : $\frac{\partial f}{\partial B}(\text{Id}_E, \text{O}_{Z(E)}) \circ h = h$

Alors $\frac{\partial f}{\partial B}(\text{Id}_E, \text{O}_{Z(E)}) = \text{Id}_{Z(E)}$

or $\text{Id}_{Z(E)} \in \text{Isom}(Z(E), Z(E))$

Donc d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de Id_E , V de $\text{O}_{Z(E)}$

dans $Z(E)$ et une unique application $\phi: U \rightarrow V$

tel que $\phi(\text{Id}_E) = \text{O}_{Z(E)}$ et $\forall A \in U, \exists B \in V$

$$f(A, \phi(A)) = 0$$

$$\text{donc } f(A, \phi(A)) = \phi(A) - \frac{1}{2} (\text{Id}_E - A + \phi(A)) = 0$$

$$\phi(A) = \frac{1}{2} (\text{Id}_E - A + \phi(A)^2)$$

$$2\phi(A) = \text{Id}_E - A + \phi(A)^2$$

$$A = \text{Id}_E - 2\phi(A) + \phi(A)^2$$

$$A = \text{Id}_E - 2\phi(A) + \phi(A)^2$$

$$A = (\text{Id}_E - \phi(A))^2$$

2) Montrons que R définie par $R(A) = \text{Id}_E - \phi(A)$ est différentiable

Comme f est différentiable sur $\mathcal{Z}(E) \times \mathcal{Z}(E)$. Alors la fonction implicite ϕ est différentiable sur U , et

$$\text{on a : } \phi'(A) = - \left[\frac{\partial f}{\partial B}(A, \phi(A)) \right]^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial A}(A, \phi(A))$$

Soit $h \in \mathcal{Z}(E)$

$$\phi'(\text{Id}_E) \cdot h = \left[\frac{\partial f}{\partial B}(\text{Id}_E, \phi(\text{Id}_E)) \right]^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial A}(\text{Id}_E, \phi(\text{Id}_E)) \cdot h$$

$$\phi'(\text{Id}_E) \cdot h = - \left[\frac{\partial f}{\partial B}(\text{Id}_E, 0_{\mathcal{Z}(E)}) \right]^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial A}(\text{Id}_E, 0_{\mathcal{Z}(E)}) \cdot h$$

$$\frac{\partial f}{\partial B}(\text{Id}_E, 0_{\mathcal{Z}(E)}) = \text{Id}_{\mathcal{Z}(E)} \quad \text{Alors } \left[\frac{\partial f}{\partial B}(\text{Id}_E, 0_{\mathcal{Z}(E)}) \right]^{-1} = \text{Id}_{\mathcal{Z}(E)}$$

$$f(A, B) = B - \frac{1}{2} (\text{Id}_E - A + B^2)$$

Soit $B \in \mathcal{Z}(E)$ fixé

Soit $k : \mathcal{Z}(E) \rightarrow \mathcal{Z}(E)$

$$A \mapsto f(A, B) = B - \frac{1}{2} (\text{Id}_E - A + B^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial A}(A, B) = k(A)$$

Soit $k_1 : \mathcal{Z}(E) \rightarrow \mathcal{Z}(E)$

$$k_1(A) = B - \frac{1}{2} \text{Id}_E - \frac{1}{2} B^2$$

14.10.2020

$$k_2: Z(\mathbb{E}) \rightarrow Z(\mathbb{E})$$

$$A \mapsto A$$

* k_1 est une application constante, donc elle est différentiable
et $k_1'(A) = 0_{Z(\mathbb{E})} \quad \forall A \in Z(\mathbb{E})$.

* $k_2 = \text{Id}_{Z(\mathbb{E})}$ linéaire continue, donc différentiable
et $k_2'(A) = \text{Id}_{Z(\mathbb{E})} \quad \forall A \in Z(\mathbb{E})$

Donc k est différentiable et $k'(A) = \frac{1}{2} \text{Id}_{Z(\mathbb{E})}$

$$\text{Donc } k'(A) \cdot h_1 = \frac{1}{2} \text{Id}_{Z(\mathbb{E})}(h_1) = \frac{1}{2} h_1$$

$$\text{Alors } \phi'(A) \cdot h_1 = -\text{Id}_{Z(\mathbb{E})} \cdot \frac{1}{2} h_1$$

$$\boxed{\phi'(A) \cdot h_1 = -\frac{1}{2} h_1}$$

$$R(A) = \text{Id}_{\mathbb{E}} - \phi(A)$$

$$\text{Soit } R_1: U \rightarrow Z(\mathbb{E})$$

$$A \mapsto \text{Id}_{\mathbb{E}}$$

$$R_2 = \phi$$

R_1 est une application constante $R_1'(A) = 0, \forall A \in U$

$$\text{Donc } R'(A) = -\phi'(A)$$

$$\boxed{R'(A) \cdot h_1 = \frac{1}{2} h_1, \forall h_1 \in Z(\mathbb{E})}$$

Soit $\phi : E \rightarrow F$
 $y \mapsto y'' + ay'y' + by^2$

1) Soit $\phi_1 : E \rightarrow F$ $\phi_2 : E \rightarrow F$ $\phi_3 : E \rightarrow F$
 $y \mapsto y''$ $y \mapsto ay'y'$ $y \mapsto y^2$

ϕ_1 est une application linéaire.

$$\forall y \in E, \|\phi_1(y)\|_F = \|y''\|_F$$

$$\text{or } \forall t \in [0,1], |y''(t)| \leq |y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|$$

$$\sup_{t \in [0,1]} |y''(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} (|y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|)$$

$$\|y''\|_F \leq \|y\|_E$$

Alors $\|\phi_1(y)\|_F \leq \|y\|_E$ donc ϕ_1 est une application linéaire continue

et $\phi_2'(y) = \phi_2, \forall y \in E$ (re voir le cours)

$$\forall y \in E, \forall h \in E, \phi_1'(y) \cdot h = \phi_1(h) = h''$$

$$\phi_2 : \alpha \circ \beta \text{ où } \beta : E \rightarrow F \times F$$

$$y \mapsto (y, y')$$

$$\alpha : F \times F \rightarrow F$$

$$(u, v) \mapsto u \cdot v$$

Les applications composantes de β sont :

$$\beta_1 : E \rightarrow F \quad \beta_2 : E \rightarrow F$$

$$y \mapsto y \quad y \mapsto y'$$

β_1 et β_2 sont des applications linéaires

$$\|\beta_1(y)\|_F = \|y\|_F \text{ or } \forall t \in [0,1], |y(t)| \leq |y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|$$

$$\sup_{t \in [0,1]} |y(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} (|y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|)$$

$$\|y\|_F \leq \|y\|_E$$

$\Rightarrow \|\beta_1(y)\|_F \leq \|y\|_E$ donc β_1 est continue

$$\|\beta_2(y)\|_F = \|y\|_F$$

$\forall t \in [0,1], |y'(t)| \leq |y''(t)| + |y'(t)| + |y(t)|$

$$\Rightarrow \|y'\|_F \leq \|y\|_E \text{ donc } \beta_2 \text{ est continue}$$

α est bilinéaire

$$\|\alpha(u,v)\|_F = \|uv\|_F = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)v(t)|$$

$$\text{or } |u(t)v(t)| = |u(t)| |v(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |u(t)| \sup_{t \in [0,1]} |v(t)|$$

$$\sup_{t \in [0,1]} |u(t)v(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |u(t)| \sup_{t \in [0,1]} |v(t)|$$

$$\Rightarrow \|\alpha(u,v)\|_F \leq \|u\|_F \|v\|_F$$

donc α est une application continue.

Par conséquent ϕ_2 est différentiable et $\phi_2'(y)$

$$\phi_2'(y) \cdot h = (\alpha \circ \beta)'(y) \cdot h$$

$$= \alpha'(\beta(y)) \circ \beta'(y) \cdot h$$

$$\text{or } \beta'(y) \cdot h = (h, h')$$

$$\Rightarrow \phi_2'(y) \cdot h = \alpha'((y, y')) \cdot (h, h')$$

$$= \alpha'(y, h') + \alpha'(h, y')$$

$$\phi_2'(y) \cdot h = y h' + h y'$$

$$\phi_3: E \rightarrow F$$

$$y \mapsto y^2$$

$$\phi_3 = \alpha \circ \gamma \text{ or } \gamma: E \rightarrow F \times F$$

$$y \mapsto (y, y')$$

Les applications composantes de γ sont β_1 donc γ est différentiable

$$\begin{aligned} \phi_3 \text{ est différentiable et } \phi_3'(y) \cdot h &= (\alpha \circ \gamma)'(y) \cdot h \\ &= \alpha'(\gamma(y)) \circ \gamma'(y) \cdot h \\ &= \alpha'((y, y)) \cdot (h, h) \\ &= \alpha(y, h) + \alpha(h, y) \end{aligned}$$

$$\phi_3'(y) \cdot h = yh + hy = 2yh$$

finalment ϕ est différentiable sur E et on a :

$$\forall y, h \in E; \phi'(y) \cdot h = h'' + a(yh' + hy') + 2byh.$$

$$\begin{aligned} \phi' : E &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ y &\mapsto \phi'(y) \end{aligned}$$

Soit $y_1, y_2 \in E, \forall h \in E,$

$$\|\phi'(y_1) - \phi'(y_2)\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{h \in E, \|h\|_E=1} \frac{\|(\phi'(y_1) - \phi'(y_2))h\|}{\|h\|_E}$$

$$\begin{aligned} (\phi'(y_1) - \phi'(y_2)) \cdot h &= a[y_1 h' + h y_1'] + 2by_1 h - a[y_2 h' + h y_2'] \\ &\quad - 2by_2 h \\ &= a[(y_1 - y_2)h' + h(y_1' - y_2')] + 2bh(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(\phi'(y_1) - \phi'(y_2))h\| &\leq \|a[(y_1 - y_2)h']\|_F + \|a h(y_1' - y_2')\|_F \\ &\quad + \|2bh(y_1 - y_2)\|_F \end{aligned}$$

$$\forall t \in [0, 1]; |a(t)(y_1(t) - y_2(t)) \cdot h'(t)| = |a(t)| |y_1(t) - y_2(t)| |h'|$$

$$|a(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |a(t)|, \quad |y_1(t) - y_2(t)| \leq |(y_1 - y_2)'(t)| + |(y_1 - y_2)(t)|$$

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \|y_1 - y_2\|_E$$

$$\text{De même } |h'(t)| \leq \|h\|_E \text{ et } |b(t)| \leq \sup_{t \in [0, 1]} |b(t)|$$

$$|h(t)| \leq \|h\|_E \text{ et}$$

$$|h(t)| \leq \|h\|_E$$

14.10.2020

$$\text{donc } |\phi(t)(y_1 - y_2)(t) \cdot h'(t)| \leq \|a\|_E \|y_1 - y_2\|_E \|h\|_E$$

$$\Rightarrow \|a(y_1 - y_2)h'\|_F \leq \|a\|_E \|y_1 - y_2\|_E \|h\|_E$$

$$\text{De même } \|ah(y_1' - y_2')\|_F \leq \|a\|_E \|h\|_E \|y_1' - y_2'\|_E$$

$$\& \|bh(y_1 - y_2)\|_F \leq 2 \|b\|_E \|h\|_E \|y_1 - y_2\|_E$$

$$\text{Alors } \|(\phi'(y_1) - \phi'(y_2))h\|_F \leq \|a\|_E \|y_1 - y_2\|_E \|h\|_E + \|a\|_E \|h\|_E \|y_1' - y_2'\|_E + 2 \|b\|_E \|h\|_E \|y_1 - y_2\|_E$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|h\|_E} (\|(\phi'(y_1) - \phi'(y_2))h\|_F \leq 2(\|a\|_E + \|b\|_E) \|y_1 - y_2\|_E$$

$$\Rightarrow \|\phi'(y_1) - \phi'(y_2)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq 2(\|a\|_E + \|b\|_E) \|y_1 - y_2\|_E$$

Donc ϕ' est Lipschitzienne donc ϕ' est continue.

Par conséquent ϕ est de classe C^1 sur E .

$$* \phi'(0) \circ h = h''$$

$$\text{Posons } u(h) = h'' \quad u \text{ linéaire } u(h) = 0 \Leftrightarrow h'' = 0$$

$$\Leftrightarrow h'(t) = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\Leftrightarrow h(t) = c_1 t + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{on a: } \begin{cases} h(0) = 0 \\ h(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

finallement ϕ est différentiable sur E et on a :

$$\forall y, h \in E, \quad \phi'(y) \cdot h = h'' + a(yh' + hy') + 2byh$$

$\Rightarrow h = 0$ donc u est injective.

u est-elle surjective ?

Soit $f \in F$, existe-t-il $h \in E$ tq $u(h) = f \Leftrightarrow h'' = f$

$$\Leftrightarrow h'(t) = \int^t f(s) ds + c_3, \quad c_3 \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0, 1]$$

14.10.2020) = $\int_0^t \left(\int_0^s f(x) dx \right) ds + c_3 t + c_4, c_4 \in \mathbb{R}$ LMD/CSC

$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_4 = 0 \\ \int_0^1 \left(\int_0^s f(x) dx \right) ds + c_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow h(t) = \int_0^t \left(\int_0^s f(x) dx \right) ds - t \int_0^1 \left(\int_0^s f(x) dx \right) ds$

$h'' = f \in F \Rightarrow h$ est de classe C^2

$h(0) = 0$ et $h(1) = 0$ donc $h \in E$

Ainsi $\exists h \in E$ tq $u(h) = f$

Donc u est surjective.

Finalement u est bijective i.e $\phi'(0)$ est bijective

2) ϕ est de classe C^1 et $\phi'(0)$ est bijective alors d'après le théorème d'inversion locale, comme $\phi(0) = 0$, il existe un voisinage ouvert U de O_E , un voisinage ouvert V de O_F tq $\phi|_U$ est un C^1 difféomorphisme de U sur V .

Donc $\forall f \in V, \exists ! y \in U$ tq $\phi(y) = f$

Comme V est un voisinage ouvert de O_F , il existe

$r > 0$ tq $B(0, r) \subset V$

Alors $\forall f \in B(0, r), \exists ! y \in U$ tq $\phi(y) = f$

Ainsi $\exists r > 0$ tq si $\|f\| < r, \exists ! y \in U$ tq $\phi(y) = f$

3) $\forall y \in E, \phi'(y) \cdot h = h'' + a(yh' + hy') + 2byh$
Soit $h \in E$ fixé

Soit $\psi(y) = h'' + a(yh' + hy') + 2byh$

$\psi = \psi_1 + \psi_2$ avec $\psi_1(y) = h''$ et $\psi_2(y) = a(yh' + hy') + 2byh$

$\psi_2(y) = a(yh' + hy') + 2byh$

ψ est une application constante donc ψ_1 est différentiable et $\psi_1'(y) \cdot k = 0_F$

ψ_2 est linéaire continue (à montrer)

Donc ψ_2 est différentiable et $\psi_2'(y) \cdot k = \psi_2'(k) = a(kh_1' + h_1k') + 2bkh_1$

$$\psi_2'(y) \cdot k = \psi_2(k) = a$$

Finalement ψ est différentiable et $\psi'(y) \cdot k = a(kh_1' + h_1k') + 2bkh_1$

donc ϕ est 2 fois différentiable et

$$\boxed{\phi'(y)(h_1, k) = a(kh_1' + h_1k') + 2bkh_1}$$

TD Equations différentielles Ordinaires

28-11-201

Exercice 1

on considère l'équation différentielle

$$(E) \quad (1+t^2)y''(t) + t^2 y(t) y'(t) + e^{-t} y(t)^2 = 0$$

1) Posons $u(t) = y(t)$ et $v(t) = y'(t)$

$$(E_1) : \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{t^2}{1+t^2} u(t)v(t) - \frac{1}{1+t^2} e^{-t} u(t)^2 \end{cases}$$

Montrons que y solution de (E) soit (u, v) solution de (E_1) Supposons que y solution de (E)

$$(E) \Leftrightarrow y''(t) = -\frac{t^2}{1+t^2} y(t) y'(t) - \frac{e^{-t}}{(1+t^2)} y(t)^2$$

Comme $u(t) = y(t)$ et $v(t) = y'(t)$

$$\text{Alors } u'(t) = y'(t) = v(t)$$

$$\text{Ainsi } v'(t) = y''(t) = -\frac{t^2}{1+t^2} u(t)v(t) - \frac{e^{-t}}{1+t^2} u(t)^2$$

donc (u, v) est solution de (E_1) Réciproquement, on suppose que (u, v) est solution de (E_1) .

$$\text{on a : } \begin{cases} y(t) = u(t) \\ y'(t) = v(t) \\ y''(t) = v'(t) = -\frac{t^2}{1+t^2} u(t)v(t) - \frac{1}{1+t^2} e^{-t} u(t)^2 \end{cases}$$

Montrons

$$\begin{aligned} &= -\frac{t^2}{1+t^2} y(t) y'(t) - \frac{e^{-t}}{1+t^2} y(t)^2 \\ \text{on obtient } &y''(t) + \frac{t^2}{1+t^2} y'(t) y(t) + \frac{e^{-t}}{1+t^2} y(t)^2 = 0 \end{aligned}$$

Donc y est solution de (E)

$$2) (E_1): \begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\frac{t^2}{1+t^2} u(t)v(t) - \frac{e^{-t}}{1+t^2} u(t)^2 \end{cases}$$

$$\text{Soit } f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, (u, v)) \longmapsto \left(v, -\frac{t^2}{1+t^2} uv - \frac{e^{-t}}{1+t^2} u^2 \right)$$

\mathbb{R}^2 est un espace vectoriel de dimension finie

* justifions que f est continue.

$$\text{Soient } f_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, (u, v)) \longmapsto v$$

$$f_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, (u, v)) \longmapsto -\frac{t^2}{1+t^2} uv - \frac{e^{-t}}{1+t^2} u^2$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$$

f_2 est la 3^{e} composante canonique, donc

f_2 est continue.

L'application $(t, (u, v)) \longmapsto -\frac{t^2}{1+t^2} uv$ est une fonction rationnelle.

Aussi l'application $(t, (u, v)) \longmapsto -\frac{u^2}{1+t^2}$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.

La fonction $(t, (u, v)) \longmapsto e^{-t}$ est la composée de

l'application $(t, (u, v)) \longmapsto -t$ qui est une fonction polynôme et de l'application $\theta \longmapsto e^\theta$ qui est continue sur \mathbb{R} .

donc elle est continue.

Finalement les 2 composantes de f sont continues

D'après le théorème de Peano, (E_1) admet des solutions théoriques.

3) L'unicité des solutions de E_2 ?

\mathbb{R}^2 est un espace de Banach.

f est continue vérifions si f est lipschitzienne par rapport à la deuxième variable.

Soient (u_1, v_1) et $(u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(t, (u_1, v_1)) - f(t, (u_2, v_2)) = \left(v_1 - v_2, \frac{-t^2}{t^2+1} (u_1 v_1 - u_2 v_2) - \frac{e^{-t}}{1+t^2} (u_1^2 - u_2^2) \right)$$

$$\|v_1 - v_2\| \leq \max \{ |u_1 - u_2|, |v_1 - v_2| \} = \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_\infty$$

$$\left| \frac{-t^2}{1+t^2} (u_1 v_1 - u_2 v_2) \right| = \left| \frac{-t^2}{1+t^2} \right| |u_1 v_1 - u_2 v_2| \leq |u_1 v_1 - u_2 v_2|$$

$$u_1 v_1 - u_2 v_2 = v_1 (u_1 - u_2) + u_2 (v_1 - v_2)$$

$$\Rightarrow |u_1 v_1 - u_2 v_2| \leq |v_1 (u_1 - u_2)| + |u_2 (v_1 - v_2)|$$

$$\text{on a: } u_2 = (u_2 - u_1) + u_1 \Rightarrow |u_2| \leq |u_2 - u_1| + |u_1|$$

$$\text{donc } |u_1 v_1 - u_2 v_2| \leq |v_1| |u_1 - u_2| + (|u_1 - u_2| + |u_1|) |v_1 - v_2|$$

$$\leq (|v_1| + |u_1 - u_2| + |u_1|) \max \{ |u_1 - u_2|, |v_1 - v_2| \}$$

$$|u_1 v_1 - u_2 v_2| \leq (|v_1| + |u_1 - u_2| + |u_1|) \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|$$

$$\left| \frac{-e^{-t}}{1+t^2} (u_1^2 - u_2^2) \right| = \left| \frac{-e^{-t}}{1+t^2} \right| |u_1^2 - u_2^2| \leq |u_1^2 - u_2^2|$$

$$|u_1^2 - u_2^2| = |(u_1 - u_2)| |(u_1 + u_2)| \leq |u_1 - u_2| (|u_1| + |u_2|)$$

$$|u_1^2 - u_2^2| \leq |u_1 - u_2| [|u_1| + |u_1 - u_2| + |u_1|]$$

$$\leq (2|u_1| + |u_1 - u_2|) \max \{ |u_1 - u_2|, |v_1 - v_2| \}$$

$$|u_1^2 - u_2^2| \leq (2|u_1| + |u_1 - u_2|) \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_\infty$$

$$\text{Alors } \|f(t, (u_1, v_1)) - f(t, (u_2, v_2))\|_\infty \leq [1 + |v_1| + |u_1| + |u_1 - u_2| +$$

$$2|u_1| + |u_1 - u_2|] \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_\infty \quad \text{voir 312}$$

4) Théorème des solutions partout définie
 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach. Et I un intervalle de \mathbb{R} et bornée. $f: I \times E \rightarrow E$ continue. S'il existe $M > 0$ tq $\|f(t, x) - f(t, y)\|_E \leq M \|x - y\|_E, \forall t \in I$

$$\forall (x, y) \in E^2.$$

Alors il existe $u: I \rightarrow E$ qui vérifie

$$u'(t) = f(t, u(t)), \forall t \in I$$

$$f(t, (u, v)) = \left(v, -\frac{t^2}{1+t^2} uv - \frac{e^{-t}}{1+t^2} u^2 \right)$$

f n'est pas bornée par rapport à v . Donc f n'est pas borné. Par conséquent le théorème des solutions partout définie ne s'applique pas à f .

EXERCICE 2

on considère l'équation différentielle :

$$(E) \begin{cases} x' = -2y + 3 \\ y' = x + 3y - t^2 \\ z' = -x - y + 3z \end{cases}$$

1) Montrons que (E) est linéaire.

$$\text{Posons } x'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}; \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } x'(t) = Ax(t) + B(t)$$

Donc (E) est équation différentielle linéaire

14/10/2020 L'application $t \mapsto A$ est constante donc continue sur \mathbb{R} LMD/CS9

L'application $t \mapsto B(t)$ est continue sur \mathbb{R} car ses composantes sont des fonctions polynômes.

Donc (E) admet des solutions sur \mathbb{R} .

3.) Jordanisation de A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (2-\lambda)^3 \quad E_2 = \ker(A - 2I)$$

$$(A - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = -y \quad z = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \text{vect}(-1, -1, 0)$$

$$\dim E_2 = 1 \neq 3$$

Donc A n'est pas diagonalisable.

une réduite de Jordan de A est $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Calcul d'une base correspondante à J.

Soit (v_1, v_2, v_3) cette base.

$$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_2$$

$$Av_2 = v_2 + 2v_2$$

$$(A - 2I)v_2 = v_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + z = 1 \\ x + y = -1 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$z = -1$$

$$x + y = -1$$

$$x = -1 - y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-y \\ y \\ -1 \end{pmatrix} \text{ pour } y=0$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AV_3 = V_2 + 2V_3$$

$$\text{RACB } (A - 2I) V_3 = V_2$$

$$\begin{cases} -2x - 2y + z = -1 \\ x + y = 0 \\ -x - y + z = -1 \end{cases}$$

$$z = -1$$

$$x = -y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour $y=0$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de passage est : $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\text{Donc } A = PJP^{-1}$$

Déterminons la résolvante $R(t, t_0)$

$$R(t, t_0) = \exp((t - t_0)A)$$

$$\text{en particulier } R(t, 0) = \exp(tA)$$

$$\exp(tA) = \exp(t(PJP^{-1}))$$

$$\exp(tA) = P \exp(tJ) P^{-1}$$

$$J = D + N \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on vérifie que $DN = ND$

$$\text{Alors } \exp(D+N) = \exp(D) \exp(N)$$

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} I$$

$$\exp(tN) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n N^n$$

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Ainsi } \exp(tN) = I + tN + \frac{1}{2} t^2 N^2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2} t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \exp(tJ) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2} t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(tA) = e^{2t} P \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2} t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\exp(tA) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & -2t + \frac{1}{2} t^2 & +2t + \frac{1}{2} t^2 \\ t - \frac{1}{2} t^2 & 1 + t - \frac{1}{2} t^2 & \frac{1}{2} t^2 \\ -t & -t & 1 + t \end{pmatrix}$$

Pour la vérification on pose $t=0$, et on obtient $\exp(0) = I_3$.

$$R(t, t_0) = e^{2(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 & -2(t-t_0) + \frac{1}{2}(t-t_0)^2 & (t-t_0) - \frac{1}{2}(t-t_0)^2 \\ (t-t_0) - \frac{1}{2}(t-t_0)^2 & 1 + (t-t_0) - \frac{1}{2}(t-t_0)^2 & \frac{1}{2}(t-t_0)^2 \\ t_0 - t & t_0 - t & 1 + t - t_0 \end{pmatrix}$$

$$4) \quad u(t) = R(t, t_0) u(t_0) + \int_{t_0}^t R(t, s) B(s) ds$$

Pour $t_0=0$

$$u(t) = R(t, 0) u(0) + \int_0^t R(t, s) B(s) ds.$$

$$\|f(t, (u_1, v_1)) - f(t, (u_2, v_2))\|_\infty \leq (1 + |v_1| + 3|u_1| + 2|u_1 - u_2|)$$

considérons $B((u_1, v_1), r)$ pour $\| \cdot \|_\infty$
 si $(u_2, v_2) \in B((u_1, v_1), r)$

$$\text{alors } |u_1 - u_2| \leq \|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_\infty \leq r$$

$$\|f(t, (u_1, v_1)) - f(t, (u_2, v_2))\|_\infty \leq (1 + |v_1| + 3|u_1| + 2r)$$

$$\|(u_1, v_1) - (u_2, v_2)\|_\infty$$

Soient (u_2, v_2) et $(u_3, v_3) \in B((u_1, v_1), r)$

~~$$\|f(t, (u_2, v_2)) - f(t, (u_3, v_3))\|_\infty \leq (1 + |v_2| + 3|u_2| + 2|u_2 - u_3|)$$~~

$$\|f(t, (u_2, v_2)) - f(t, (u_3, v_3))\|_\infty \leq (1 + |v_2| + 3|u_2| + 2|u_2 - u_3|)$$

$$\times \|(u_2, v_2) - (u_3, v_3)\|_\infty$$

$$\text{or } v_2 = v_2 - v_1 + v_1$$

$$|v_2| \leq |v_2 - v_1| + |v_1| \leq \max\{|u_2 - u_1|, |v_2 - v_1|\} + |v_1|$$

$$\leq r + |v_1|$$

$$u_2 = u_2 - u_1 + u_1$$

$$|u_2| \leq |u_2 - u_1| + |u_1| \leq r + |u_1|$$

$$u_2 - u_3 = u_2 - u_1 + u_1 - u_3$$

$$\|u_2 - u_3\| \leq \|u_2 - u_1\| + \|u_1 - u_3\| \leq 2r$$

$$\text{Donc } \|f(t, (u_2, v_2)) - f(t, (u_3, v_3))\|_\infty \leq$$

$$(1 + r + |v_1| + 3r + 3|u_1| + 4r) \|(u_2, v_2) - (u_3, v_3)\|_\infty$$

$$\leq (1 + 8r + |v_1| + 3|u_1|) \|(u_2, v_2) - (u_3, v_3)\|$$

Alors $f: \mathbb{R} \times B((u_1, v_1), r)$ est lipschitzienne
 par rapport à la deuxième variable.

Donc f est localement lipschitzienne par rapport

à la deuxième variable.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a unicité des solutions de (E_1)

mise de l'exercice 2

$$5) \quad U(t) = R(t, 0) U(0) + \int_0^t R(t, s) B(s) ds$$

$$\text{on a: } R(t, 0) U(0) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & -2t + \frac{1}{2}t^2 & t - \frac{1}{2}t^2 \\ t - \frac{t^2}{2} & 1 + t - \frac{t^2}{2} & \frac{1}{2}t^2 \\ -t & -t & 1 + t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(t, 0) U(0) = e^{2t} \left(2t - \frac{t^2}{2}, -1 - t + \frac{t^2}{2}, t \right)$$

$$R(t, s) B(s) = e^{2(t-s)} \begin{pmatrix} 1 & -2(t-s) + \frac{(t-s)^2}{2} & (t-s) - \frac{(t-s)^2}{2} \\ t-s - \frac{(t-s)^2}{2} & 1 + (t-s) - \frac{(t-s)^2}{2} & \frac{(t-s)^2}{2} \\ -t+s & -t+s & 1+t-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(t, s) B(s) = -s^2 e^{2(t-s)} \left(-2(t-s) + \frac{(t-s)^2}{2}, 1 + (t-s) - \frac{(t-s)^2}{2}, -t+s \right)$$

$$x(t) = e^{2t} \left(2t - \frac{1}{2}t^2 \right) + \int_0^t -s^2 e^{2(t-s)} \left(-2(t-s) - \frac{(t-s)^2}{2} \right) ds$$

$$y(t) = e^{2t} \left(-1 - t + \frac{t^2}{2} \right) + \int_0^t -s^2 e^{2(t-s)} \left(1 + (t-s) - \frac{(t-s)^2}{2} \right) ds$$

$$z(t) = t e^{2t} + \int_0^t -s^2 e^{2(t-s)} (-t+s) ds.$$

Une autre étape est de calculer chaque intégrale pour terminer la question.

TD Probabilité Avancée

Prof ELOUHAFLIN
Dr
0WD
22/11/2016

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire de densité f définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & \text{si } -e \leq x < -1 \\ x+1-a & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est un nombre réel.

- 1) Calculer a et déterminer la fonction de répartition F_X de X
- 2) Calculer l'espérance de la variable X .

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite. Préciser dans chacun des cas ci-dessous, la loi de probabilité de la variable Y définie en fonction de X .

1) $Y = X^3$

2) $Y = F(X)$ où F est la fonction de répartition de la variable X .

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire réelle uniforme sur $[0, 1]$.

Montrer que la relation $Y = -\frac{1}{\alpha} \ln(1-X)$ où α est un paramètre réel strictement positif, définit presque-sûrement une variable aléatoire réelle.

Quelle est la loi de la variable aléatoire Y .

Exercice 4

- 1) Montrons que si X et Y sont deux variables aléatoires réelles presque-sûrement égales, alors elles sont la même loi. Montrer.
- 2) Montrer que la réciproque est fautive.

Exercice 5

Soit $X \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Pour tout réel $a > 0$ on pose

$$X_a := X \mathbb{1}_{\{|X| \leq a\}} - X \mathbb{1}_{\{|X| > a\}}$$

- 1) Vérifier que pour tout réel $a > 0$ et toute application h de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $h(X_a) = h(X) \mathbb{1}_{[0, a]}(X) + h(-X) \mathbb{1}_{]a, +\infty[}(X)$
- 2) En déduire que, pour tout réel positif a , la variable aléatoire réelle X_a suit la loi normale centrée réduite.

Solutions

Exercice 1

$$f_X(x) = \frac{a}{x} X_{[-e, -1]}(x) + (x+1-a) X_{[-1, 0]}(x)$$

- 1) on a les conditions suivantes sur f_X :

$$\begin{cases} f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{x} X_{[-e, -1]}(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} (x+1-a) X_{[-1, 0]}(x) dx \\ = 1 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-e}^{-1} \frac{a}{x} X_{[-e, -1]}(x) dx +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_{-e}^{-1} \frac{a}{x} dx + \int_{-1}^0 (x+1-a) dx$$

$$= [a \ln|x|]_{-e}^{-1} + \left[\frac{1}{2} x^2 + (1-a)x \right]_{-1}^0$$

$$= -a - \frac{1}{2} + 1 - a$$

$$= -2a + \frac{1}{2}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \Rightarrow -2a + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$

- 2) Soit X une variable aléatoire

Déterminons F_X la fonction de répartition

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

* Si $x < -e$

$$F_X(x) = 0$$

* $-e \leq x < -1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-e}^x f(t) dt = -\frac{1}{4} (\ln|x| - 1)$$

* Si $-1 \leq x < 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-e}^{-1} f(t) dt + \int_{-1}^x f(t) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x + 1$$

* Si $x \geq 0$

$$F_X(x) = 1$$

$$\text{DMC } F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -e \\ -\frac{1}{4} (\ln|x| - 1) & \text{si } -e \leq x < -1 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2) Espérance de X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-e}^{-1} x \left(\frac{1}{4x}\right) dx + \int_{-1}^0 x \left(x + \frac{5}{4}\right) dx$$

$$E(X) = -\frac{1}{24} - \frac{e}{4}$$

$$1) Y = X^3 \quad X \rightarrow N(0, 1)$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x)$$

Soit h une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(h(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) f_Y(y) dy$$

$$E(h(X^3)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x^3) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x^3) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

quand $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$
 $x \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow +\infty$

$$dx = \frac{1}{3} (y)^{-\frac{2}{3}} dy$$

$$E(h(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2}} \cdot \frac{1}{3} y^{-\frac{2}{3}} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) \cdot \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2}} dy$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{y^{\frac{3}{2}}}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(y)$$

2) $Y = F(X)$ où F est la fonction de répartition

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

le support de Y est $[0, 1]$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

$$\text{si } y < 0 \quad F_Y(y) = 0$$

$$\text{si } y > 1 \quad F_Y(y) = 1$$

$$\text{si } y \in [0, 1] \quad F_Y(y) = P(F(X) < y) = P(X < F^{-1}(y))$$

$$= F(F^{-1}(y))$$

$$= y$$

14.10.2020

car F réalise une bijection réciproque $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

LMD/CSC

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } y \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

Donc $Y \sim U([0, 1])$

$$X \sim U([0, 1])$$

$Y = -\frac{1}{\alpha} \ln(1-X)$, $\alpha > 0$. Montrons que Y définit presque sûrement une variable aléatoire.

Déterminer la loi de Y .

$$X: (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \quad X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}$$

Dire que Y définit presque sûrement une variable aléatoire s'il existe un ensemble $N \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(N) = 0$ et $\forall \omega \notin N$, Y est bien définie.

$$\text{On a: } Y = -\frac{1}{\alpha} \ln(1-X)$$

$$\text{Soit } f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto -\frac{1}{\alpha} \ln(1-t) \text{ avec } t \in [0, 1]$$

$$D_f = [0, 1[$$

$$f^{-1}(\{1\}) = N$$

Il suffit de prendre $N = f^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = 1\}$

Car $\mathbb{P}(f^{-1}(\{1\})) = 0$ puisque X est une variable à densité continue. Par conséquent Y définit presque sûrement une variable aléatoire.

Déterminons la loi de Y

$$0 \leq X < 1$$

$$0 < 1-X \leq 1$$

$$-\infty < \ln(1-X) \leq 0$$

$$0 \leq Y < +\infty \text{ presque sûrement.}$$

$$\text{On a: } F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\alpha} \ln(1-X) \leq y\right) \\ = \mathbb{P}(-\ln(1-X) \leq \alpha y)$$

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= 1 - P(F_X(1-X) \leq y) \\
 &= 1 - P(1-X < e^{-\alpha y}) \\
 &= 1 - P(-X < e^{-\alpha y} - 1) \\
 &= 1 - P(X > 1 - e^{-\alpha y}) \\
 &= P(X < 1 - e^{-\alpha y})
 \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = F_X(1 - e^{-\alpha y})$$

$$\frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = f_Y(y) = \frac{\partial F_X(1 - e^{-\alpha y})}{\partial y} = \alpha e^{-\alpha y} f_X(1 - e^{-\alpha y})$$

$$f_Y(y) = \alpha e^{-\alpha y}$$

verifions que $1 - e^{-\alpha y} \in [0, 1]$

$$0 < e^{-\alpha y} < 1, \forall y \in \mathbb{R}_+$$

$$0 > -e^{-\alpha y} > -1$$

$$1 > 1 - e^{-\alpha y} > 0, \forall y \in \mathbb{R}_+$$

Y suit la loi exponentielle de paramètre α .

Enoncé Exercice 6

Soit X de densité $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$Y = X^2 = \varphi(X)$ (détermination de loi)

Enoncé Exercice 7

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables iid tq

$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X_k = -1) = q$ et $P(X_k = 1) = p$ où

$p \in]0, 1[$ avec $p + q = 1$

on pose $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k, n \in \mathbb{N}^*$

a) Déterminer la fonction caractéristique de Y_n ^{LMD/CSC}

b) en déduire la loi de Y_n

$$\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto E(e^{itx})$$

Fonction génératrice

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$$

$$G_x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto E(s^x)$$

Exercice 4 solution

1) Montrons que si X et Y sont des variables aléatoires réelles, presque sûrement égales alors elle est la même.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilité

$$X = Y \text{ p.s.} \Leftrightarrow \exists N \subset \Omega \text{ tq } N = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\}$$

$$\text{et } \mathbb{P}(N) = 0$$

montrons que $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}^Y$.

$$\text{on a : } \Omega = \Omega \setminus N \cup N$$

soit $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^X(-\infty, a] &= \mathbb{P}(X^{-1}(-\infty, a]) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \setminus N \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\} \cup \{\omega \in N \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^X(-\infty, a] &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \setminus N \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\}) + \mathbb{P}(\{\omega \in N \mid X(\omega) \in (-\infty, a]\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \setminus N \mid Y(\omega) \in (-\infty, a]\}) + 0 \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \setminus N \mid Y(\omega) \in (-\infty, a]\}) + \mathbb{P}(\{\omega \in N \mid Y(\omega) \in (-\infty, a]\}) \\ &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \in (-\infty, a]\}) \\ &= \mathbb{P}^Y(-\infty, a] \end{aligned}$$

comme a quelconque - Alors $\mathbb{P}^X = \mathbb{P}^Y$. D'où X et Y ont la même loi

$$\text{Soit } X \sim U([0, 1])$$

$$Y = 1 - X$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } E(h(Y)) &= E(h(1-X)) = \int_{\mathbb{R}} h(1-x) f_X(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(1-x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) dx \\ &= \int_0^1 h(1-x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Posons } y = 1-x \quad dy = -dx$$

$$E(h(Y)) = -\int_1^0 h(y) dy = \int_0^1 h(y) dy = \int_{\mathbb{R}} h(y) \mathbb{1}_{[0,1]}(y) dy$$

$$\text{D'où } f_Y(y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

$$Y \sim U([0, 1])$$

$$X \sim U([0, 1])$$

Exercice 5

$$X \sim N(0, 1), \forall a > 0, X_a := X \mathbb{1}_{\{|X| \leq a\}} - X \mathbb{1}_{\{|X| > a\}}$$

1. Vérifions que $\forall a > 0$ et pour toute application $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

$$h(X_a) = h(X) \mathbb{1}_{[0,a]}(X) + h(-X) \mathbb{1}_{]a,+\infty]}(X)$$

$$\text{on a: } X_a = X \mathbb{1}_{\{-a \leq X \leq a\}} - X \mathbb{1}_{\{X < -a \text{ ou } X > a\}}$$

$$X_a = X \mathbb{1}_{\{X \in [-a, 0[\cup]0, a]\}} - X \mathbb{1}_{\{X \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty]\}}$$

$$X_a = X \mathbb{1}_{[-a, 0[}(X) + X \mathbb{1}_{]0, a]}(X) - X \mathbb{1}_{]-\infty, -a[}(X) - X \mathbb{1}_{]a, +\infty]}(X)$$

Soit h une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} $X \sim N(0, 1)$

Déterminons $h(X_a)$

$$h(X_a) = \begin{cases} h(X) & \text{si } X \in [-a, 0[\\ h(X) & \text{si } X \in]0, a] \\ h(-X) & \text{si } X \in]-\infty, -a[\\ h(-X) & \text{si } X \in]a, +\infty[\end{cases}$$

$$h(x_a) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [a, a] \\ h(-x) & \text{si } x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[\end{cases}$$

$$h(x_a) = \begin{cases} h(x) & \text{si } |x| \leq a \\ h(-x) & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

Donc $h(x_a) = h(x) \mathbb{1}_{\{|x| \leq a\}} + h(-x) \mathbb{1}_{\{|x| > a\}}$

2) En deduire que $\forall a > 0, X_a \xrightarrow{d} N(0, 1)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X_a)) &= \mathbb{E}(h(x) \mathbb{1}_{\{|x| \leq a\}}) + \mathbb{E}(h(-x) \mathbb{1}_{\{|x| > a\}}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x) \mathbb{1}_{\{|x| \leq a\}} f_x(x) dx + \int_{\mathbb{R}} h(-x) \mathbb{1}_{\{|x| > a\}} f_x(x) dx \\ \mathbb{E}(h(X_a)) &= \int_{-a}^a h(x) f_x(x) dx + \int_{-\infty}^{-a} h(-x) f_x(x) dx + \int_a^{+\infty} h(-x) f_x(x) dx \end{aligned}$$

Posez $y = -x \quad dy = -dx$

$$\begin{aligned} * \int_{-\infty}^{-a} h(-x) f_x(x) dx &= \int_{+\infty}^{-a} -h(y) f_x(-y) dy \\ &= \int_a^{+\infty} h(y) f_x(y) dy \quad \text{car la fonction densité } f_x \text{ est pair} \\ &= \int_a^{+\infty} h(x) f_x(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \int_a^{+\infty} h(-x) f_x(x) dx &= \int_{-\infty}^{-a} -h(y) f_x(-y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{-a} h(y) f_x(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{-a} h(x) f_x(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \mathbb{E}(h(X_a)) &= \int_{-a}^a h(x) f_x(x) dx + \int_a^{+\infty} h(x) f_x(x) dx + \\ &\quad \int_{-\infty}^{-a} h(x) f_x(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x) f_x(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \end{aligned}$$

D'où $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

14.10.2020
 D'où $f_{X_a}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ 1

Donc $X_a \sim N(0,1)$

Exercice 7

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variable aléatoire iid tq
 $\forall k \in \mathbb{N}, P(X_k = -1) = q$ et $P(X_k = 1) = p$ où $p \in]0,1[$
 avec $p+q=1$

1) On pose $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k, n \in \mathbb{N}^*$

a) fonction caractéristique de Y_n

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{itY_n}), \forall t \in \mathbb{R} \\ &= \mathbb{E}\left(e^{it \sum_{k=1}^n X_k}\right) = \mathbb{E}\left(e^{itX_1} \times e^{itX_2} \times \dots \times e^{itX_n}\right) \\ &= \mathbb{E}(e^{itX_1}) \mathbb{E}(e^{itX_2}) \dots \mathbb{E}(e^{itX_n}) \text{ car les } X_i \text{ sont indépendantes} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_n}(t) &= \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{itX_k}) \\ &= \left(\mathbb{E}(e^{itX_1})\right)^n \text{ car les } X_i \text{ sont identiquement distribués.} \end{aligned}$$

$$\varphi_{Y_n}(t) = \left(\varphi_{X_1}(t)\right)^n$$

$$\varphi_{X_1}(t) = \mathbb{E}(e^{itX_1})$$

$$= e^{it} P(X_1=1) + e^{-it} P(X_1=-1)$$

$$\varphi_{X_1}(t) = pe^{it} + qe^{-it}$$

Par conséquent $\varphi_{Y_n}(t) = [pe^{it} + qe^{-it}]^n$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^{it})^k (qe^{-it})^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{itk} e^{-it(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{i(k-n)t} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} e^{i(2k-n)t} \end{aligned}$$

$$\varphi_X(H) = \mathbb{E}(e^{itx}) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{itx} P(X=x)$$

Posons $x = 2k - n$

Si n est pair $\Rightarrow x$ est pair

$$\varphi_{Y_n}(H) = \sum_{\substack{x=-n \\ \text{pair}}}^n C_n^{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} q^{\frac{n-x}{2}} e^{itx}$$

$$X(\Omega) = \{-n, -n+1, \dots, n\}$$

$$P(X=x) = C_n^{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} q^{\frac{n-x}{2}} \text{ avec } x \in X(\Omega)$$

Si n est impair $\Rightarrow x$ est impair

$$\varphi_{Y_n}(H) = \sum_{\substack{x=-n \\ \text{impair}}}^n C_n^{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} q^{\frac{x-n}{2}} e^{itx}$$

$$P(X=x) = C_n^{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} q^{\frac{x-n}{2}} \text{ avec } x \in X(\Omega)$$

$$Y_n(\Omega) = \{2k - n \text{ avec } k \in \overline{0, n}\} \text{ est}$$

$$\forall x \in Y_n(\Omega), P(X=x) = C_n^{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} q^{\frac{x-n}{2}}$$

Fiche 2: Indépendance stochastique, Vecteurs gaussiens

29-11-16

Exercice 1

$$f(x, y) = \alpha(1-x^2) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) y e^{-3y} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Déterminez α 2) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) 3) Calculer $P(0 \leq X \leq 1, Y \geq 1)$ 4) Calculer la matrice de dispersion D de (X, Y)

Résolution

1) Déterminons α $f(x, y)$ est une fonction de densité, donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(1-x^2) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) y e^{-3y} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y) dx dy \\ &= \alpha \left[\left(\int_0^1 (1-x^2) dx \right) \left(\int_0^{+\infty} y e^{-3y} dy \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{on a: } \int_0^1 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^t y e^{-3y} dy = ? , t > 0 \quad \text{Posons } \begin{cases} u(y) = y \\ v(y) = e^{-3y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(y) = 1 \\ v'(y) = -3e^{-3y} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \int_0^t y e^{-3y} dy = \left[-\frac{y e^{-3y}}{3} \right]_0^t + \int_0^t \frac{e^{-3y}}{3} dy$$

$$\int_0^t y e^{-3y} dy = -\frac{t e^{-3t}}{3} - \frac{1}{9} [e^{-3y}]_0^t$$

$$= -\frac{t e^{-3t}}{3} - \frac{1}{9} e^{-3t} + \frac{1}{9}$$

$$\int_0^{+\infty} y e^{-3y} dy = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{t e^{-3t}}{3} - \frac{1}{9} e^{-3t} + \frac{1}{9} \right] = \frac{1}{9}$$

$$\text{En somme } \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \frac{2\alpha}{27} = 1$$

$$\text{Donc } \alpha = \frac{27}{2}$$

La fonction de densité est donc $f(x,y) = \frac{27}{2}(1-x^2) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y) e^{-3y}$

2.) lois marginales du couple (X, Y)

• loi de x

$$\begin{aligned} f_x(x) &= \int_0^{+\infty} f(x,y) dy \\ &= \left[\int_0^{+\infty} \frac{27}{2}(1-x^2) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) y e^{-3y} dy \right] \\ &= \frac{27}{2}(1-x^2) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \int_0^{+\infty} y e^{-3y} dy \\ &= \frac{27}{2} \times \frac{1}{9} (1-x^2) \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \end{aligned}$$

$$f_x(x) = \frac{3}{2}(1-x^2) \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

• loi de y

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \int_0^1 f(x,y) dx \\ &= \int_0^1 \frac{27}{2}(1-x^2) y e^{-3y} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y) dx \\ &= \frac{27}{2} y e^{-3y} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y) \int_0^1 (1-x^2) dx \\ &= \frac{27}{2} \times \frac{2}{3} y e^{-3y} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y) \end{aligned}$$

$$f_y(y) = 9y e^{-3y} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(y)$$

3.) Les variables x et y étant indépendantes,

$$\begin{aligned} P(0 \leq x \leq 2, Y \geq 1) &= P^X([0,2]) P^Y([1,+\infty[) \\ &= \left[\int_0^1 \frac{3}{2}(1-x^2) dx \right] \left[\int_1^{+\infty} 9y e^{-3y} dy \right] \\ &= \frac{3}{2} \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 \times 9 \left(\frac{e^{-3}}{9} + \frac{e^{-3}}{3} \right) \end{aligned}$$

$$P(0 \leq x \leq 2, Y \geq 1) = 4 e^{-3}$$

4) la matrice de distance D

$$D = \begin{bmatrix} \text{Var}(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \text{Var}(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Var} X & 0 \\ 0 & \text{Var} Y \end{bmatrix}$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$\text{On a: } \mathbb{E}(X) = \int_0^1 x f_X(x) dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Donc } \text{Var} X = \frac{1}{5} - \frac{9}{64} = \frac{64 - 45}{320} = \frac{19}{320}$$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{+\infty} 9y \times y e^{-3y} dy$$

$$= 9 \int_0^{+\infty} y^2 e^{-3y} dy$$

$$= 9 \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t y^2 e^{-3y} dy$$

$$\int_0^t y^2 e^{-3y} dy = ?$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u(y) = y^2 \\ v'(y) = e^{-3y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(y) = 2y \\ v(y) = -\frac{1}{3} e^{-3y} \end{cases}$$

$$\int_0^t y^2 e^{-3y} dy = \left[-\frac{1}{3} y^2 e^{-3y} \right]_0^t + \frac{2}{3} \int_0^t y e^{-3y} dy$$

$$= -\frac{1}{3} t^2 e^{-3t} + \frac{2}{3} \left[-\frac{t e^{-3t}}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{9} \right]$$

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_0^{+\infty} 9y^2 \times y \bar{e}^{-3y} dy = 9 \int_0^{+\infty} y^3 \bar{e}^{-3y} dy \\ &= 9 \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t y^3 \bar{e}^{-3y} dy \end{aligned}$$

$$\int_0^t y^3 \bar{e}^{-3y} dy = ?$$

$$\begin{cases} u(y) = y^3 \\ v'(y) = \bar{e}^{-3y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(y) = 3y^2 \\ v(y) = -\frac{1}{3} \bar{e}^{-3y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^t y^3 \bar{e}^{-3y} dy &= \left[-\frac{1}{3} y^3 \bar{e}^{-3y} \right]_0^t + \int_0^t y^2 \bar{e}^{-3y} dy \\ &= -\frac{1}{3} t^3 \bar{e}^{-3t} + \int_0^t y^2 \bar{e}^{-3y} dy \end{aligned}$$

$$E(Y^2) = 9 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{19}{320} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

Exercice 2

Calcul de $P(X=Y)$

$$(X=Y) = \bigcup_{k=0}^{n \wedge m} (X=k, Y=k)$$

Supposons que $n \wedge m$

$$P(X=Y) = P\left(\bigcup_{k=0}^{n \wedge m} (X=k, Y=k)\right)$$

Pour $j \neq i$ on a: $(X=i, Y=i) \neq (X=j, Y=j)$

$$\text{donc } P(X=Y) = \sum_{k=0}^n P(X=k, Y=k)$$

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^n P(X=k) P(Y=k)$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot C_m^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}$$

$$\begin{aligned}
 P(X=Y) &= \sum_{k=0}^n C_n^k C_m^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m-2k} \\
 &= \sum_{k=0}^n C_n^k C_m^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} \sum_{k=0}^n C_n^{n-k} C_m^k \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+m} C_{m+n}^n
 \end{aligned}$$

exercice 3

$(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite indépendante de v.a.r.

$X_k \sim B(p)$ ($0 < p < 1$) (Ω, \mathcal{F}, P) espace de probabilité

$$T(\omega) := \inf \{ n \in \mathbb{N} / X_n(\omega) = 1 \}$$

$$T_r(\omega) := \inf \{ n \in \mathbb{N}^* / X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega) = r \}$$

$$\theta_r(\omega) := \inf \{ n \in \mathbb{N}^* / X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_{n+r}(\omega) = r \}$$

avec $\inf(\emptyset) = +\infty$

↳ Montrons que T est une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}^*}$

EXERCICES

$$X \sim N(0,1) \quad \varepsilon \sim \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$$

1- Montrons que $Y = \varepsilon X \sim N(0,1)$

$$F(y) = P(Y < y)$$

$$= P(\varepsilon X < y) = P(\varepsilon = 1, X < y) + P(\varepsilon = -1, X < y)$$

$$= P(\varepsilon = 1) \times P(X < y) + P(\varepsilon = -1) \times P(X > -y)$$

$$= \frac{1}{2} \varphi_X(y) + \frac{1}{2} \varphi_X(-y)$$

$$= \varphi_X(y) \quad \text{car} \quad \varphi_X(-y) = 1 - \varphi_X(y)$$

$$\text{Donc} \quad Y \sim N(0,1)$$

$$\mathbb{E}(h(X)) = \mathbb{E}(h(\varepsilon X))$$

$$= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\varepsilon=1\}} h(X) + \mathbb{1}_{\{\varepsilon=-1\}} h(-X)\right)$$

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\varepsilon=1\}} h(X)\right)$$

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{\varepsilon=1\}}\right) \mathbb{E}(h(X))$$

feuille 3 : Fonctions caractéristique, convergence

exercice 1

$f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée

$X_n(\Omega) \subset \mathbb{R}^d, X(\Omega) \subset \mathbb{R}^d \quad X_n: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$X_n \xrightarrow{P.S} X \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P.S} f(X)$$

$$S_n^2 = \tilde{X}_n + \tilde{Y}_n \quad f(x, y) = x + y \text{ continue}$$

$$S_n^2 = f(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n) \xrightarrow{P.S} f(X, Y) = X + Y$$

l'on cherche à montrer que $X \sim N(0, 1)$ alors $X^2 \sim \chi^2(1)$
 Plus généralement $X \sim N(m, \sigma^2)$ alors $\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0, 1)$
 $\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$

1. Montrons que la variable aléatoire X_1^2 suit la loi $\chi^2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(1)$

on sait que: $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ et $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$

où $X_i \sim N(0, 1)$

utilisons le théorème de transfert

$$E(f(X_1^2)) = \int_{\mathbb{R}} f(x^2) f_{X_1}(x) dx$$

f est une fonction numérique, continue et bornée

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

$x \mapsto f(x^2) \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ est paire.

donc $E(f(X_1^2)) = 2 \int_{\mathbb{R}^+} f(x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$

$$y = x^2, \forall x > 0 \quad \left| \quad x = \sqrt{y}\right.$$

$$dy = 2x dx \quad \left| \quad dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}\right.$$

quand $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$
 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$

$$\text{D'où } E(h(x_1^2)) = 2 \int_{\mathbb{R}^+} h(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2\sqrt{y}} \exp(-\frac{1}{2}y) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} h(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}y) y^{-1/2} dy$$

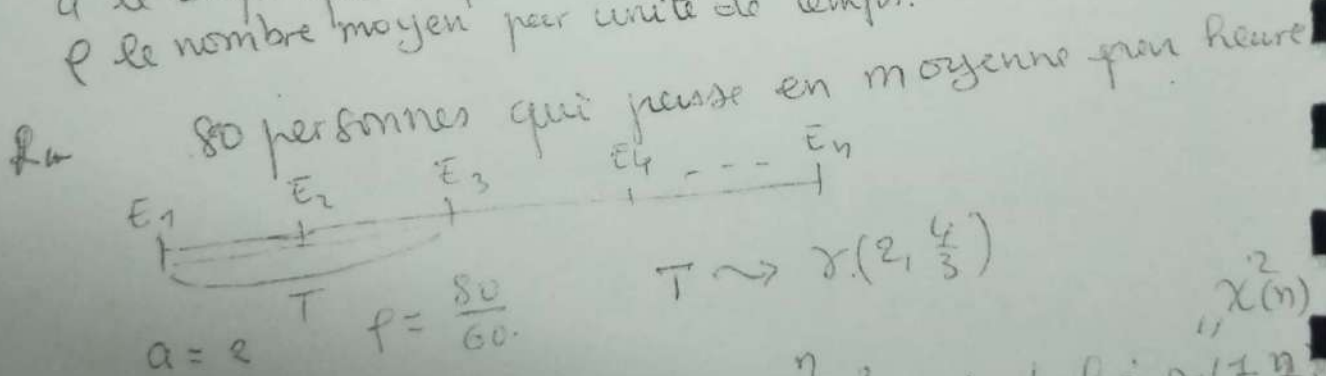
$$\text{donc } f_{X_1^2}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y} y^{-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$$

$$= \frac{(\frac{1}{2})^{1/2 - \frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)$$

Par suite $X_1^2 \rightsquigarrow \gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(1)$

Rappel: Pour la loi Gamma: $f_X(x) = \frac{p^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-px} \mathbb{1}_{x>0}$

a le temps qui separe 2 réalisations consécutives
 p le nombre moyen par unité de temps.



2- Montrons Deduisons que $\sum_{k=1}^n X_k^2$ est de loi $\gamma(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})$
 utilisons la fonction caractéristique des lois Gamma.

La fonction caractéristique de la loi $\gamma(a, p)$

$$X \sim \gamma(a, p) \Rightarrow \varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto \mathbb{E}(e^{itX})$$

$$\varphi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{p}\right)^{-a}$$

Les X_k sont indépendants

Donc les X_k^2 sont indépendants.

$$\text{D'où } \varphi_{\sum_{k=1}^n X_k^2}(t) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{itX_k^2})$$

Aussi les X_k^2 sont indépendamment distribués

$$\text{Donc } \varphi_{\sum_{k=1}^n X_k^2}(t) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{itX_1})$$

$$= \left(1 - \frac{it}{p}\right)^{-an}$$

$$= (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$$

Par conséquent $\sum_{k=1}^n X_k^2 \rightsquigarrow \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(n)$

3) Montrons que $S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2$

$$\text{Or on a: } S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_k^2 - 2X_k \bar{X}_n + \bar{X}_n^2)$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum X_k^2 - \frac{2\bar{X}_n}{n-1} \sum X_k + \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum X_k^2 - \frac{2n}{n-1} \bar{X}_n^2 + \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum X_k^2 - \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2$$

Suite exercice 1

4) En utilisant la loi forte des grands nombres, étudions les convergences presque-sûre des suites \bar{X}_n et S_n^2 .

Comme les X_k sont iid. D'après la loi forte des grands nombres P.S. \rightarrow P. \rightarrow loi

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{P.S.}} E(X_1) = 0$$

$$\text{Or on a: } S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2$$

$$\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_k^2 = \frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2$$

Les X_k^2 étant iid. D'après la loi forte des grands nombres.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 \xrightarrow{\text{P.S.}} E(X_1^2) = \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{D'autre part } \frac{n}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

$$\text{donc } \frac{n}{n-1} \xrightarrow{\text{P.S.}} 1$$

$$\text{Alors } \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_k^2 \xrightarrow{\text{P.S.}} 1$$

$$\text{D'autre part } \bar{X}_n \xrightarrow{\text{P.S.}} 0$$

$$\text{Posons } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

Comme g est continue.

$$\text{Donc } g(\bar{X}_n) \xrightarrow{\text{P.S.}} g(0) = 0$$

Par conséquent $S_n^2 \xrightarrow{\text{P.S.}}$

$$\text{de plus } \frac{n}{n-1} \xrightarrow{\text{P.S.}} 1$$

$$\text{donc } \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2 \xrightarrow{\text{P.S.}} 0$$

$$\text{finalement } S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{n}{n-1} \bar{X}_n^2 \xrightarrow{\text{P.S.}} 1$$

Exercice 2

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \Leftrightarrow \mathbb{E}(|X_n - X|^p) \rightarrow 0 \quad \begin{array}{l} X \in L^p \\ \mathbb{E}(|X|^p) < \infty \end{array}$$

1- Montrons que $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ converge dans L^2 vers

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\lambda}$$

* Montrons que $\bar{X}_n \in L^2$

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = \mathbb{E}\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)^2\right)$$

$$\text{Posons } Y = \sum_{k=1}^n X_k$$

$$\text{ona: } X_k \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$$

Comme les variables aléatoires sont indépendantes
alors $Y \rightsquigarrow \Gamma(n, \lambda)$

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n^2) = \frac{1}{n^2} \mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y) dy$$

$$= \frac{1}{n^2} \int_{\mathbb{R}} y^2 \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{y>0} dy$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} y^{n+1} e^{-\lambda y} dy$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n+2)}{\lambda^{n+2}}$$

$$= \frac{1}{n^2 \lambda} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-1)!}$$

donc $\bar{X}_n^2 \in L^2$

Calculons $E(\bar{X}_n)$

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} Y\right) = \frac{1}{n} E(Y) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

* $\bar{X}_n \xrightarrow{L^2} \frac{1}{\lambda}$ revient à montrer que $E\left(|\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}|^2\right) \rightarrow 0$

$$\text{On a: } E\left(|\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}|^2\right) = E\left(|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)|^2\right) \\ = \text{Var}(\bar{X}_n)$$

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum X_k\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{\lambda} \\ = \frac{1}{n\lambda} \xrightarrow{+\infty} 0$$

$$\text{Donc } E\left(|\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}|^2\right) \xrightarrow{+\infty} 0$$

$$\text{D'où } \bar{X}_n \xrightarrow{L^2} \frac{1}{\lambda}$$

$$2. \text{ on pose } Y_n := \sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right)$$

Montrons que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} N(m, \sigma^2)$ (on détermine m et σ^2)

Les (X_k) ^{de variable a.} sont i.i.d tel que $E(|X_1|^2) < \infty$

D'après le T.C.L on a:

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - E(X_1)) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \text{Var}(X_1))$$

$$\text{donc } Y_n = \sqrt{n} \left(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0, \text{Var}(X_1) = \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

Exercice 3

$(U_n)_{n \geq 1}$ une suite de variable aléatoire indépendantes de loi uniforme sur $[0, \theta]$ où $\theta > 0$

$$\text{on pose } \forall n \geq 1 \quad X_n := \max_{1 \leq i \leq n} U_i$$

Rappel: $X_n \xrightarrow{p.s.} x \Leftrightarrow \exists N \text{ tq } \mathbb{P}(N) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega, X_n(\omega) \rightarrow x$

$$X_n \rightarrow x(\omega) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Montrons que X_n converge p.s et déterminons LMD/cse

$$\text{ona: } P(|X_n - \theta| > \varepsilon) = 1 - P(|X_n - \theta| < \varepsilon)$$

$$\begin{aligned} P(|X_n - \theta| < \varepsilon) &= P(-\varepsilon < X_n - \theta < \varepsilon) \\ &= P(\theta - \varepsilon < X_n < \theta + \varepsilon) \\ &= F_{X_n}(\theta + \varepsilon) - F_{X_n}(\theta - \varepsilon) \end{aligned}$$

Déterminons $F_{X_n}(x)$

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P(X_n < x) \\ &= P\left(\max_{1 \leq i \leq n} U_i < x\right) \end{aligned}$$

$$= P(U_1 < x, \dots, U_n < x) \quad \text{comme les } U_i \text{ sont indépendantes bien}$$

$$\text{alors } F_{X_n}(x) = \prod_{i=1}^n P(U_i < x) \quad \text{comme les } U_i \text{ sont identiques}$$

$$\text{ainsi } F_{X_n}(x) = [P(U_1 < x)]^n$$

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

• si $0 < \varepsilon < \theta$

$$\text{ona: } \theta < \varepsilon + \theta < 2\theta$$

$$\text{donc } F_{X_n}(\varepsilon + \theta) = 1$$

$$0 < \theta - \varepsilon < \theta$$

$$\text{donc } F_{X_n}(\theta - \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n$$

$$\left. \begin{aligned} &\Rightarrow P(|X_n - \theta| < \varepsilon) = 1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \\ &P(|X_n - \theta| > \varepsilon) = \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \end{aligned} \right\}$$

• si $0 < \theta < \varepsilon$

$$\text{ona: } \theta < 2\theta < \theta + \varepsilon$$

$$\text{ona: } \theta - \varepsilon < 0$$

$$\text{donc } F_{X_n}(\varepsilon + \theta) = 1$$

$$\text{donc } F_{X_n}(\theta - \varepsilon) = 0$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(|X_n - \theta| < \varepsilon) = 1$ et donc $\mathbb{P}(|X_n - \theta| > \varepsilon) = 0$ LMD/CSC

$$\text{Donc } \mathbb{P}(|X_n - \theta| > \varepsilon) = \begin{cases} (1 - \frac{\varepsilon}{\theta})^n & \text{si } \varepsilon < \theta \\ 0 & \text{si } \varepsilon > \theta \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbb{P}(|X_n - \theta| > \varepsilon)$ converge.

Pour $\varepsilon > 0$, considérons $\sum_{n \geq 1} (1 - \frac{\varepsilon}{\theta})^n = S$

S converge lorsque $|1 - \frac{\varepsilon}{\theta}| < 1$

Ainsi, quelque soit $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbb{P}(|X_n - \theta| > \varepsilon)$ converge.

Par conséquent $X_n \xrightarrow{P.S.} \theta$

2) Étudions la convergence en loi de la suite $(n(\theta - X_n))$, $n \geq 1$

Posons $Y_n = n(\theta - X_n)$

$$F_{Y_n}(y) = \mathbb{P}(Y_n < y)$$

$$\text{on a: } \begin{array}{ll} 0 \leq X_n \leq \theta & 0 \leq \theta - X_n \leq \theta \\ -\theta \leq -X_n \leq 0 & 0 \leq Y_n \leq n\theta \end{array}$$

Donc $F_{Y_n}(y) = 0$ si $y < 0$

Pour $0 \leq y \leq n\theta$

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(y) &= \mathbb{P}(Y_n < y) = \mathbb{P}(n(\theta - X_n) < y) \\ &= \mathbb{P}(-X_n < \frac{y}{n} - \theta) \\ &= \mathbb{P}(X_n > \theta - \frac{y}{n}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_n \leq \theta - \frac{y}{n}) \end{aligned}$$

$$\text{On a: } \theta > \theta - \frac{y}{n} \geq 0$$

$$\text{Donc } F_{Y_n}(y) = 1 - \frac{(e - \frac{y}{n})^n}{e} = 1 - \left(1 - \frac{y}{ne}\right)^n$$

• si $y \geq n$

$$\text{alors } F_{Y_n}(y) = 1$$

$$\text{on a donc } F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{y}{ne}\right)^n, & \text{si } 0 \leq y \leq ne \\ 1 & \text{si } y > ne \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{e}} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

$$\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-a}$$

$$\text{Donc } Y_n \xrightarrow{L} \dots$$

EXERCICE 4

$$E\left(f\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right)\right) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

$$E f_X(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{1}_{[0,1]^n}(x_1, \dots, x_n)$$

$$E\left(f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)\right) = \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n$$

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}_n \xrightarrow{P} E(X_1) = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) \xrightarrow{P} f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$3- \sum_{k=1}^n \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$E\left(f\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}\right)\right)$$

$$\rightarrow f(z) = f(\alpha)$$

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \frac{Y}{\sqrt{2}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$Y \sim \mathcal{N}(0, 2) \Rightarrow \frac{Y}{\sqrt{2}} \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 3) \Rightarrow \frac{Z}{\sqrt{3}} \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$U = \begin{matrix} AX \\ (1, 2, -3) \end{matrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$V(U) = A \Sigma A^t$$

$$\mathcal{N}\left(1, \frac{1}{2}\right) = \chi^2(2)$$

$$E(U) =$$

$$\text{Var}(U) =$$

UFR-MI :L3

Année 2016-2017

PROBABILITES AVANCEES

FICHE 1 : Modèle probabiliste, Loi d'un vecteur aléatoire, Moment d'un vecteur aléatoire

EXERCICE 1

1. Démontrons que \mathbb{P}_h est une probabilité

$$h : \Omega \rightarrow \Omega'$$

$$\forall A' \in \mathcal{P}(\Omega');$$

$$\mathbb{P}_h(A') = \mathbb{P}(h^{-1}(A'))$$

$$h^{-1}(A') = \{x \in \Omega / h(x) \in A'\}$$

$h^{-1}(A') \in \mathcal{P}(\Omega)$ donc \mathbb{P}_h est bien définie.

$\forall A' \in \mathcal{P}(\Omega); h^{-1}(A') \in \mathcal{P}(\Omega)$ et comme \mathbb{P} est une probabilité $\mathbb{P}(h^{-1}(A')) \geq 0$.

a) $\mathbb{P}_h(\emptyset) = 0$

b) Soit $(A'_n)_{n \geq 0}$ disjoint de $\mathcal{P}(\Omega')$

$\mathbb{P}_h(\cup_{n \geq 0} A'_n) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_h(A'_n)$; pour le faire il faut unifier que $h^{-1}(\cup_{n \geq 0} A'_n) = \cup_{n \geq 0} h^{-1}(A'_n)$ et que $h^{-1}(A'_n)_{n \geq 0}$ est disjointe deux à deux.

c) On a : $h^{-1}(\Omega') = \Omega$

Ainsi ; $\mathbb{P}_h(\Omega') = \mathbb{P}(h^{-1}(\Omega')) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ car \mathbb{P} est une probabilité.

a),b) et c) $\Leftrightarrow \mathbb{P}_h$ est une probabilité sur Ω'

2. Déterminons la loi de X

$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \varphi(\mathbb{E}(X))$. On suppose que $\varphi(x) = x^2$, alors

$$\mathbb{E}(X^2) = (\mathbb{E}(X))^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = 0 \\ \Leftrightarrow X &= \mathbb{E}(X) \text{ P-presque sûrement.} \end{aligned}$$

EXERCICE 3

1. $\forall (i, j) \in \{1, \dots, 6\}^2$, $\{X = j/D = i\}$ signifie que le lancer du dé a donné le numéro i et ensuite on a obtenu j fois pile au cours des i lancers. Cela revient à révéler i comme une expérience de Bernoulli de paramètre p de façon indépendante.

Ainsi, $\{X = j/D = i\}$ est une variable qui suit une loi binomiale de paramètres i, p .

$$\mathbb{P}(X = j/D = i) = C_i^j p^j q^{i-j}; j \leq i$$

2. Calculons $\mathbb{P}(X = 6)$

$$\mathbb{P}(X = 6) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(X = 6/D = i) \times \mathbb{P}(D = i)$$

(d'après le théorème des probabilités totale)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 6) &= \mathbb{P}(X = 6/D = 6) \times \mathbb{P}(D = 6) \\ &= C_6^6 p^6 q^{6-6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} p^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 4) &= \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(X = 4/D = i) \times \mathbb{P}(D = i) \\ &= \mathbb{P}(X = 4/D = 1) \times \mathbb{P}(D = 4) + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 4/D = 5) \times \mathbb{P}(D = 5) + \\ &\quad \mathbb{P}(X = 4/D = 6) \times \mathbb{P}(D = 6) \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{6} p^4 (1 + 5q + 15q^2)$$

3. Montrons que $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{q}{6} \left(\frac{1 - q^6}{1 - q} \right)$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X = 0) &= \sum_{i=1}^6 \mathbb{P}(X = 0/D = i) \times \mathbb{P}(D = i) \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 C_5^0 p^0 q^i \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 q^i \\
 &= \frac{q}{6} \left(\frac{1 - q^6}{1 - q} \right)
 \end{aligned}$$

4. $\mathbb{P}(D = 1/X = 0)$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(D = 1/X = 0) &= \frac{\mathbb{P}(D = 1, X = 0)}{\mathbb{P}(X = 0)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(X = 0/D = 1) \times \mathbb{P}(D = 1)}{\mathbb{P}(X = 0)} \\
 &= \frac{2^5}{2^6 - 1}
 \end{aligned}$$

EXERCICE 5

1. Déterminons la loi de $Y = F_X(X) = F(X)$ où $F_X = F$ est la fonction de répartition de X

On a :

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto F(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Soit F_Y la fonction de répartition de Y .

Soit $y \in \mathbb{R}$.

$$\{Y \leq y\} = \{F(X) \leq y\}$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F(x) \leq 1$ donc Y prend ses valeurs dans $[0, 1]$.

. Si $y < 0$, $\mathbb{P}(\{Y \leq y\}) = 0 = F_Y(y)$

Car $\{Y \leq y\} = \{F(X) \leq y\} = \emptyset$

. Si $0 \leq y \leq 1$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(F(X) \leq y)$$

* Montrons que F est bijective

F est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} à valeur dans $[0, 1]$ donc F réalise une bijection de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ alors :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(y)) \\ &= F(F^{-1}(y)) \\ &= y \end{aligned}$$

. Si $y > 1$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(F(X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(F(X) \leq 1) + \mathbb{P}(1 < F(X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(1)) = F(F^{-1}(1)) = 1 \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

$$Y \rightsquigarrow \mathcal{U}([0, 1])$$

2. a) Montrons que X symétrique si et seulement si $f(x) = f(-x)$

* (\Leftarrow) $f(x) = f(-x)$ et montrons que $-X$ à même loi que X .

Soit \mathbb{P}_X la loi de X .

$\forall h$ continue positive à support compact. D'après le T.T, on a :

$$\mathbb{E}(h(-X)) = \int_{\mathbb{R}} h(-x)f(x) dx$$

Posons $u = -x$; $dx = -du$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(-X)) &= \int_{+\infty}^{-\infty} h(u)f(-u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u)f(u) du \\ &= \mathbb{E}(h(X)) \quad \forall h \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}$.

(\Rightarrow) Supposons que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}$

Montrons que $f(x) = f(-x)$.

Soit h une fonction continue à support compact.

$$\mathbb{E}(h(X)) = \mathbb{E}(h(-X))$$

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} h(-x)f(x) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)h(u) du = \int_{\mathbb{R}} h(u)f(-u) du$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} h(u) (f(u) - f(-u)) du = 0$$

$$h(u) (f(u) - f(-u)) = 0$$

\mathbb{P} presque x

$$\Rightarrow f(u) - f(-u) = 0$$

$$\Rightarrow f(u) = f(-u)$$

b) Exemple de loi symétrique

$$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f(x) = f(-x) \text{ et } -X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

c) Montrons que X symétrique si et seulement si $\mathbb{E}(e^{iuX}) \in \mathbb{R}$

(\Rightarrow) X symétrique

$$\mathbb{E}(e^{iuX}) = \mathbb{E}(e^{-iuX})$$

En prenant $h(x) = e^{iuX}$

$$\mathbb{E}(e^{iuX}) - \mathbb{E}(e^{-iuX}) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(e^{iuX} - e^{-iuX}) = 0$$

$$\mathbb{E}(2i \sin(uX)) = 0$$

$$2i\mathbb{E}(\sin(uX)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(\sin(uX)) = 0$$

$$\mathbb{E}(e^{iuX}) = \mathbb{E}(\cos(uX) + i \sin(uX))$$

$$\mathbb{E}(e^{iuX}) = \mathbb{E}(\cos(uX)) + i\mathbb{E}(\sin(uX))$$

$$\text{Donc } \mathbb{E}(e^{iuX}) = \mathbb{E}(\cos(uX)) = \overline{\mathbb{E}(e^{-iuX})}$$

Par suite, $\mathbb{E}(e^{iuX}) \in \mathbb{R}$

(\Leftarrow) $\mathbb{E}(e^{iuX}) \in \mathbb{R}$: Montrons que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}$

$$\overline{\mathbb{E}(e^{iuX})} = \mathbb{E}(e^{iuX})$$

$$= \mathbb{E}(e^{-iuX})$$

Donc $\phi_X(u) = \overline{\phi_X(u)}$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

Par suite, $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{-X}$

EXERCICE 6

$$\varepsilon(\varphi(\gamma)) = \int \varphi(y)g(y)dy$$

$$\gamma \sim g(y)$$

$$\varepsilon(\varphi(\gamma)) = \int_0^{+\infty} \varphi(\sqrt{x})f(x)dx$$

$$u = \sqrt{x} ; u' = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{u}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\varphi(\gamma)) &= \lambda \int_0^{\infty} \varphi(u) 2u e^{-\lambda u^2} du \\ &= \int_0^{\infty} \varphi(u) 2u e^{-\lambda u^2} du \end{aligned}$$

On a : $X \sim \varepsilon(\lambda)$

La densité de X est : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x)$

a) Déterminons la loi de $Y = \sqrt{X}$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y), \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leq y)$$

Si $y < 0$ alors $\{\sqrt{X} \leq y\} = \emptyset$ et on a : $F_Y(y) = 0$.

Si $y \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(\sqrt{X} \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq y^2) = F_X(y^2) \\ &= \int_{-\infty}^{y^2} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{y^2} f(x) dx \\ &= \int_0^{y^2} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{y^2} \\ &= 1 - e^{-\lambda y^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y^2} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

b) Soit F_X la fonction de repartition de la variable aléatoire X

$$X \sim \varepsilon(\lambda) \text{ alors } F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $Y = X^2$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t)$$

$$t \leq 0, \{X^2 \leq t\} = \emptyset$$

$$\Rightarrow F_Y(t) = 0$$

$t \geq 0$, On a :

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(|X| \leq t^{\frac{1}{2}}) = \mathbb{P}(X \leq \sqrt{t}) \text{ car le support de } X \text{ est } \mathbb{R}_+. \text{ D'où } F_Y(t) = F_X(\sqrt{t}).$$

$$\Rightarrow F_Y(t) = 1 - e^{-\lambda \sqrt{t}}. \text{ En résumé } f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \sqrt{t}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2.$$

$$\mathbb{E}(\varphi(y)) = \int_0^{-\infty} \varphi(y) f_Y(y) dy$$

c) On pose $Y = X^3$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(X^3 \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t^{\frac{1}{3}}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$a) F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

* si $t < -\ln 2$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^t 0 dt = 0$$

* si $-\ln 2 \leq t \leq 0$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^{-\ln 2} f(x) dx + \int_{-\ln 2}^t f(x) dx$$

$$= 0 + \int_{-\ln 2}^t e^{-(-x)} dx = e^t - \frac{1}{2}$$

* si $0 \leq t \leq \ln 2$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_{-\infty}^{-\ln 2} f(x) dx + \int_{-\ln 2}^0 f(x) dx + \int_0^t f(x) dx$$

$$= 0 + [e^x]_{-\ln 2}^0 + [-e^{-x}]_0^t$$

$$= \frac{3}{2} - e^{-t}$$

* si $t \geq \ln 2$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{-\ln 2} f(x) dx = \int_{-\ln 2}^0 f(x) dx + \int_0^{\ln 2} f(x)_0 dx + \int_0^t f(x) dx$$

$$= 0 + [e^x]_{-\ln 2}^0 + [-e^{-x}]_0^{\ln 2}$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1$$

$$\text{D'où, On a : } F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -\ln 2 \\ e^t - \frac{1}{2} & \text{si } -\ln 2 \leq t \leq 0 \\ \frac{3}{2} - e^{-t} & \text{si } 0 \leq t \leq \ln 2 \\ 1 & \text{si } t > \ln 2. \end{cases}$$

b) On pose : $Y = |X|$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(|X| \leq t)$$

. si $t < 0$, $F_Y(t) = 0$

. si $0 \leq t \leq \ln 2$

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(-t \leq X \leq t)$$

$$= F_X(t) - F_X(-t)$$

$$= \frac{3}{2} - e^{-t} - (e^{-t} - \frac{1}{2})$$

$$= 2(1 - e^{-t})$$

. si $t > \ln 2$, $F_Y(t) = 1 - 0 = 1$

$$F_x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2(1 - e^{-t}) & \text{si } t \in [0; \ln 2] \\ 1 & \text{si } t > \ln 2. \end{cases}$$

Méthode 1

F_y est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \ln 2\}$.

Donc Y est une variable aléatoire à densité donné par :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^{-x} & \text{si } x \in [0; \ln 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Méthode 2

Soit ϕ une fonction continue positive ou bornée.

$$\mathbb{E}(\phi(Y)) = \mathbb{E}(\phi(|X|))$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi(|x|) f(x) dx$$

$$= \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \phi(|x|) e^{-|x|} dx$$

$$= 2 \int_0^{\ln 2} \phi(x) e^{-x} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) (2e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \ln 2]}(x)) dx$$

Par conséquent Y est une variable à densité. Et a pour densité :

$$g(x) = \begin{cases} 2e^{-x} & \text{si } x \in [0; \ln 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3) $Y = [X]$

a) Déterminons la loi de Y .

Méthode 1

Soit ϕ une fonction continue positive ou bornée.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\phi(y)] &= \mathbb{E}[\phi(\lfloor X \rfloor)] \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} \phi(\lfloor x \rfloor) f(x) dx \\
&= \int_{x \in \bigcup_{k=0}^{+\infty} [k, k+1[} \phi(\lfloor x \rfloor) f(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} \phi(\lfloor x \rfloor) f(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} \phi(k) f(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \phi(k) \int_k^{k+1} f(x) dx
\end{aligned}$$

Donc Y a pour loi $P_Y(k) = \int_k^{k+1} f(x) dx \forall k \in \mathbb{N}$

Méthode 2

$\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k) \\
&= \mathbb{P}(k \leq X < k+1) \\
&= \int_k^{k+1} f(x) dx
\end{aligned}$$

$$P_Y(Y = k) = \int_k^{k+1} f(x) dx$$

b) On suppose que $\mathbb{E}(Y)$ existe

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{\mathbb{R}^+} x f(x) dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} x f(x) dx
\end{aligned}$$

On a : $x < k+1 \Rightarrow x f(x) < (k+1) f(x)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_k^{k+1} (k+1) f(x) dx \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_k^{k+1} k f(x) dx + \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_k^{k+1} f(x) dx \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} k \int_k^{k+1} f(x) dx + 1 \\
&\leq \mathbb{E}(Y) + 1 < +\infty
\end{aligned}$$

(\Leftarrow) On suppose que $\mathbb{E}(X)$ existe.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} k \int_k^{k+1} f(x) dx \\
x \in [k, k+1[&\Rightarrow k < x \\
\Rightarrow k f(x) &\leq x f(x) \text{ Par conséquent, on a :}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_k^{k+1} x f(x) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^+} x f(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &\leq \mathbb{E}(X) < +\infty \\
\Rightarrow \mathbb{E}(Y) &< +\infty \text{ ou} \\
Y &= [X] \\
\Rightarrow Y &< X + 1. \\
\Rightarrow \mathbb{E}(Y) &< \mathbb{E}(X) + 1 < +\infty
\end{aligned}$$

c) D'après b) on a $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y) + 1$ et $\mathbb{E}(Y) < \mathbb{E}(X)$
Donc $\mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y) + 1$

EXERCICE 8

1. Y est une u.v.r.la densité $f_Y(y) = \frac{1}{\pi}$

Montrons que $f_{\frac{1}{Y}} = f_Y$

Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et bornée.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(\frac{1}{Y})) &= \int_{\mathbb{R}} h(\frac{1}{y}) f_Y(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\frac{1}{y}) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^0 h(\frac{1}{y}) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy + \int_0^{+\infty} h(\frac{1}{y}) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy \end{aligned}$$

* Pour $y < 0$ posons $t = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{t} \Rightarrow dy = -\frac{dt}{t^2}$

$$\begin{cases} \text{quand } y \rightarrow -\infty, t \rightarrow 0 \\ \text{quand } y \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty \end{cases}$$

* Pour $y > 0$ posons $u = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{u} \Rightarrow dy = -\frac{du}{u^2}$

$$\begin{cases} \text{quand } y \rightarrow +\infty, u \rightarrow 0 \\ \text{quand } y \rightarrow 0, u \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 h(\frac{1}{y}) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy &= \int_0^{-\infty} h(t) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) \\ &= \int_{-\infty}^0 h(\frac{1}{y}) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy = \int_{-\infty}^0 h(t) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ \int_0^{+\infty} h(\frac{1}{y}) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy &= \int_{+\infty}^0 h(u) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_0^{+\infty} h(u) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+u^2} du \\ \mathbb{E}(h(\frac{1}{Y})) &= \int_{-\infty}^0 h(t) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} h(t) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(h(\frac{1}{Y})) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt$$

Alors la densité de $\frac{1}{Y}$ est $t \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ par conséquent $\frac{1}{Y}$ a la même loi que Y .

2. (X, Y) un couple de u.a de densité $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{1 + (1 + x^2)^2 y^2}$
Calculons la loi de X .

Soit $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et bornée.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(X)) &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(x) \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

Alors la densité de X est $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi^2} \frac{dy}{1 + (1 + x^2)^2 y^2}$$

Posons $t = (1 + x^2)y$

$$\Rightarrow dt = (1 + x^2) dy \Leftrightarrow dy = \frac{dt}{1 + x^2}$$

$$\begin{cases} \text{quand } y \rightarrow 0, t \rightarrow 0 \\ \text{quand } y \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dt \\ &= \frac{2}{\pi^2(1+x^2)} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ \text{or } \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

X est une variable de Cauchy.

3. (X, Y) un couple de u.a de densité $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

Calculons la loi de $\frac{X}{Y}$.

Soit $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue et bornée. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(h\left(\frac{X}{Y}\right)\right) &= \int_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{x}{y}\right) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h\left(\frac{x}{y}\right) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy\end{aligned}$$

Posons $u = \frac{x}{y}$ et $v = y$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{x}{v} \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = v \end{cases}$$

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(h\left(\frac{X}{Y}\right)\right) &= \int_{\mathbb{R}^2} h(u) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} |v| du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(u) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}v^2(u^2+1)} |v| du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} |v| e^{-\frac{1}{2}v^2(u^2+1)} dv \right) du\end{aligned}$$

D'après Fubini.

$$\begin{aligned}f_{\frac{X}{Y}}(u) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} |v| e^{-\frac{1}{2}v^2(u^2+1)} dv \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi} v e^{-\frac{1}{2}v^2(u^2+1)} dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{u^2+1} e^{-\frac{1}{2}v^2(u^2+1)} \right)' dv \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{u^2+1} e^{-\frac{1}{2}v^2(u^2+1)} \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{u^2+1}\end{aligned}$$

Donc $\frac{X}{Y}$ suit une loi de Cauchy.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|\frac{X}{Y}\right|\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |u| f_{\frac{X}{Y}}(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |u| \frac{1}{\pi} \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{u}{u^2 + 1} du\end{aligned}$$

$\frac{u}{u^2 + 1} \sim \frac{1}{u}$ or $u \mapsto \frac{1}{u}$ n'est pas intégrable donc $\frac{X}{Y}$ n'est pas intégrable.

1.) Soit A et B 2 parties non vides de \mathbb{R}^n . Montrons que

$$\text{conv}(A+B) = \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$$

$$\bullet \text{conv}(A+B) \subset \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$$

$$\text{On a : } A+B = \left\{ x+y \mid x \in A \text{ et } y \in B \right\} \subset \left\{ x+y \mid \begin{array}{l} x \in \text{conv}(A) \\ y \in \text{conv}(B) \end{array} \right\}$$

$$\text{Car } A \subset \text{conv}(A) \text{ et } B \subset \text{conv}(B)$$

$$\text{d'où } A+B \subset \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$$

$\text{conv}(A) + \text{conv}(B)$ est convexe car combinaison linéaire de convexes. (Somme de 2 convexes)

$$\text{dnc } \text{conv}(A+B) \subset \text{conv}(\text{conv}(A) + \text{conv}(B)) = \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$$

$$\text{conv}(A+B) \subset \text{conv}(A) + \text{conv}(B)$$

Montrons $\text{conv}(A) + \text{conv}(B) \subset \text{conv}(A+B)$

Soient u et v ($u \in \text{conv}(A)$ et $v \in \text{conv}(B)$)

$$\text{alors } \exists \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R} \mid u = \sum \lambda_i a_i \text{ et } v = \sum \mu_j b_j$$

$$\text{on a : } u+v = \sum \lambda_i a_i + \sum \mu_j b_j = \sum \lambda_i \mu_j (a_i + b_j)$$

$$= \sum \lambda_i (\sum \mu_j) a_i + \sum \mu_j (\sum \lambda_i) b_j \text{ puisque}$$

$$\sum \mu_j = 1 \text{ et } \sum \lambda_i = 1$$

$$a_i + b_j \in A+B \text{ et } \sum \lambda_i \mu_j = 1 = (\sum \lambda_i) (\sum \mu_j)$$

$$\text{Donc } \text{conv}(A) + \text{conv}(B) \subset \text{conv}(A+B)$$

①

TD Analyse convexe

25-11-2016

Exercice 2

1) Soit A, B deux parties non vides de \mathbb{R}^n .

Montrons que $\text{conv}(A \times B) = \text{conv} A \times \text{conv} B$.

$$\left. \begin{array}{l} A \subset \text{conv}(A) \\ B \subset \text{conv}(B) \end{array} \right\} \text{Dmc } A \times B \subset \text{conv}(A) \times \text{conv}(B)$$

or $\text{conv}(A) \times \text{conv}(B)$ est convexe.

Par suite $\text{conv}(A \times B) \subset \text{conv}(A) \times \text{conv}(B)$

Soit $u \in \text{conv}(A)$ et $v \in \text{conv}(B)$

Alors on a: $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i x^i, k \in \mathbb{N}^*, x^i \in A$ et $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, i = \overline{1, k}$

$v = \sum_{j=1}^n \beta_j y^j, n \in \mathbb{N}^*, y^j \in B$ et $\sum_{j=1}^n \beta_j = 1, \beta_j \geq 0 \forall j = \overline{1, n}$

$$u = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j x^i \text{ et } v = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \beta_j \alpha_i y^j$$

$$(u, v) = \left(\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j x^i, \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_j y^j \right)$$

$$= \sum \sum \alpha_i \beta_j (x^i, y^j). \quad (x^i, y^j) \in A \times B$$

Pour $\sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_{ij} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j = 1$. Dmc $(u, v) \in \text{conv}(A \times B)$

Par suite $\text{conv}(A) \times \text{conv}(B) \subset \text{conv}(A \times B)$

2) $P = \bigcup_{i=1}^k C_i$ où C_i sont convexes de \mathbb{R}^n

Montrons que $\text{conv}(P) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0, x_i \in C_i, \forall i = \overline{1, k}, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$

Supposons $k=2$

$$\text{conv}(P) = \text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^2 C_i \right) = \text{conv}(C_1 \cup C_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Avec } \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \text{et } x_1 \in C_1, x_2 \in C_2 \end{array} \right\}$$

②

À t.m. $\text{conv}(P) = A_2$?

A_2 est un convexe contenant C_1 et C_2 .

Donc $\text{conv}(P) \subset A_2$.

verifions que $A_2 \subset \text{conv}(P)$

soit $x \in A_2 \Rightarrow x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ et $(x_1, x_2) \in C_1 \cup C_2$

Ainsi $x \in \text{conv}(C_1 \cup C_2)$ donc $A_2 \subset \text{conv}(P)$.

Supposons la propriété vraie à l'ordre $k-1$, $k \geq 2$
c'est-à-dire $\text{conv}(P) = A_{k-1}$

Montrons que $\text{conv}(P) = A_k$

Soit $x \in A_k \Rightarrow x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \lambda_k x_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i$

Posons $\alpha := \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i$ ($\alpha \neq 0$) on a : $x = \lambda_k x_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\alpha} \alpha x_i$
 $= (1-\alpha) x_k + \alpha \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_i$

$$\beta_i = \frac{\lambda_i}{\alpha} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i = 1$$

Posons $y = \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_i \in A_{k-1}$. Par suite

$x = (1-\alpha) x_k + \alpha y \in \text{conv}(P)$. Donc $x \in \text{conv}(P)$

Donc $A_k \subset \text{conv}(P)$

A_k est un convexe contenant C_1, C_2, \dots, C_k .

donc contient $\text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^k C_i\right)$ ($A_k \supset \text{conv}\left(\bigcup_{i=1}^k C_i\right)$)

$\alpha = 0$ Alors, on a :

$x = x_k \in C_k$ car $\lambda_k = 1$. Par suite

$A_k \subset \text{conv}(P)$

Conclusion : $\text{conv}(P) = A_k$, $\forall k \geq 2$

③

$$C = \text{conv}(S)$$

$$x \text{ extrémal} \stackrel{\text{def}}{\iff} x = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2, \quad \alpha \in [0,1], \quad (x_1, x_2) \in C,$$

$$\Rightarrow x = x_1 = x_2$$

Supposons x point extrémal de C

$$\text{Si } x \notin S \text{ alors } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \text{ avec } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, x_i \in S$$

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i + \lambda_n x_n$$

$$\text{Si } \alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \neq 0, \quad x = \alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i \right) + (1-\alpha)x_n$$

$$= \alpha y + (1-\alpha)x_n$$

$$y = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i \in \text{conv}(S) = C \text{ avec } y \neq x_n$$

Contradiction

$$\text{Si } \alpha = 0 \text{ alors } x = x_n \in S \text{ (inclus)}$$

Exercice 6

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^m x_i A_i$$

$$\text{Posons } \varphi(x) = A_0(x) + \sum_{i=1}^m x_i A_i(x) \text{ fonction affine.}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) \text{ est semi-définie positive}\}$$

$\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ est un convexe fermé (ensemble des matrices semi-définies positives)

$$\text{on a: } C = \varphi^{-1}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) \text{ convexe.}$$

(4)

1) $f \in C^2$, f'' est continue et atteint ses bornes sur tout compact d'où l'existence de $M = \sup_{x \in [a, b]} |f''|$

$$2) g(x) = f(x) - \frac{M(x-a)(b-x)}{2}$$

$$h(x) = f(x) + \frac{M(x-a)(b-x)}{2}$$

$$g, h \in C^2$$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{M}{2}(b-x + (a-x))$$

$$= f'(x) - \frac{M}{2}(b+a-2x)$$

$$g''(x) = f''(x) + M = f''(x) + \sup_{a \leq x \leq b} \|f''\| \geq 0$$

Donc g est convexe.

$$h'(x) = f'(x) + \frac{M}{2}(b-x - x + a)$$

$$h''(x) = f''(x) - M \leq 0$$

Donc h est concave.

3) Montrons que $|f(x)| \leq \frac{M(x-a)(b-x)}{2}$

g convexe donc Γ_g est en dessous de la corde qui relie le point $(a, g(a))$ et $(b, g(b))$

$$\text{Donc } g(x) \leq \frac{(g(b) - g(a))(x-a)}{b-a} + g(a)$$

$$\text{on a : } g(a) = g(b) = 0$$

$$(*) f(x) = \frac{M(x-a)(b-x)}{2} \leq 0$$

$$f(x) \leq \frac{M(x-a)(b-x)}{2}$$

On a: f convexe. Donc \mathcal{C}_f est au dessous de la corde qui relie les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$

$$\text{Donc } f(x) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

$$\text{On a: } f(b) = f(a) = 0$$

$$\text{Donc } \frac{f(x) + M(x-a)(b-x)}{e} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq - \frac{M(x-a)(b-x)}{2} \quad (**)$$

De (*) et (**) on conclut que $|f(x)| \leq \frac{M(x-a)(b-x)}{2}$

EXERCICE 13

+ f est convexe de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$

Donc \mathcal{C}_f est au dessous de la corde qui relie les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$

$$f(x) \leq \frac{(f(b) - f(a))(x - a) + f(a)}{b - a}$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \right] dx$$

$$\leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \int_a^b (x - a) dx + f(a) \int_a^b dx$$

$$\leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left[\frac{x^2}{2} - ax \right]_a^b + f(a)(b - a)$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \left[\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2 \right] + f(a)(b - a)$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{2} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a)^2 + f(a)(b - a)$$

$$\leq (b - a) \left(\frac{f(b) - f(a)}{2} + f(a) \right)$$

$$\text{④ } \int_a^b f(x) dx \leq (b - a) \frac{f(b) + f(a)}{2}$$

+ \mathcal{C}_f est au dessous de la tangente au point $\frac{a+b}{2}$

14.10/2020

$$\textcircled{6} \int_a^b f(x) dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx + f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \quad \text{LMD/CSC}$$

On a: $f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$

Donc $(**)$ $\int_a^b f(x) dx \geq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

De $(*)$ et $(**)$ on conclut que

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \frac{f(b)+f(a)}{2}$$

Exercice 14

$$f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \ln x$$

1) f est 2 fois dérivable sur $]0, +\infty[$

f est convexe soit $f''(x) > 0$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ donc } f \text{ est convexe et même}$$

strictement convexe.

deduisons que: $\forall (a, b, x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$,

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{a+b}$$

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} = a \left(\frac{x}{a} \ln \frac{x}{a} \right) + b \left(\frac{y}{b} \ln \frac{y}{b} \right)$$

$$= a f\left(\frac{x}{a}\right) + b f\left(\frac{y}{b}\right)$$

$$= (a+b) \left(\frac{a}{a+b} f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} f\left(\frac{y}{b}\right) \right)$$

$$\geq (a+b) \left[f\left(\frac{x}{a} \times \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \frac{y}{b} \right) \right]$$

$$\geq (a+b) \left[f\left(\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a+b} \right) \right]$$

$$\geq (a+b) f\left(\frac{x+y}{a+b} \right)$$

$$\geq (a+b) \frac{x+y}{a+b} \ln \left(\frac{x+y}{a+b} \right)$$

2) f est 2 fois différentiable
 f est convexessi $f'' \geq 0$



$$f'(x) = \frac{1}{\ln x} \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x \ln x}$$

$$f''(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2 \ln^2 x} > 0 \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

Donc f est convexe.

Deduisons que $\forall (x, y) \in]1, +\infty[^2$

$$\text{ona: } \ln \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{\ln x \ln y}$$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) \\ \leq -\frac{1}{2} (\ln(\ln x) + \ln(\ln y))$$

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geq \frac{1}{2} \ln(\ln x \ln y)$$

$$\ln\left(\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \geq \ln\left((\ln x \ln y)^{1/2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$$

exercice 15

1) La composée de 2 fonctions est-elle convexe.

contre-exemple: $f(x) = -x$, $g(x) = x^2$ sur \mathbb{R}

$(f \circ g)(x) = -x^2$ n'est pas convexe.

2) $f_1(x) = -\ln x$

$f_1''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ donc f_1 est convexe et strictement convexe.

ona: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1'(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}_+^* \mid \forall x > M$

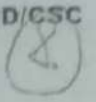
ona: $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$

Donc on ne peut pas trouver un $x > 0$ tel que $\frac{1}{x^2} > \varepsilon$

14.10.2020

Donc f_1 n'est pas fortement convexe.

LMD/CSC



$$f_2(x) = x^4$$

$f_2''(x) = 12x^2 > 0$ donc f_2 est convexe et strictement convexe sur \mathbb{R}^*

Exercice 2

a) Trouvons les minima et les maxima locaux de la fonction
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + \frac{1}{6} x_2^3$
 f est une fonction polynôme sur \mathbb{R}^2 donc f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 . (x_1, x_2) est un point critique ssi $\nabla f(x_1, x_2) = 0$

$$\text{On a: } \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ -x_1 + \frac{1}{2}(2x_1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ -x_1 + 2x_1^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_1(2x_1 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Les points critiques sont $A(0, 0)$ et $B(\frac{1}{2}, 1)$

* Etude de la nature des points A et B.

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & x_2 \end{pmatrix}$$

Au point A.

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

14.10.2020

$$|\nabla^2 f(0,0) - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 1 \text{ LMD/CSC}$$

$$|\nabla^2 f(0,0) - \lambda I_2| = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

$\frac{\Delta}{4} = \Delta' = 9$, $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$
 $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$. Donc $\nabla^2 f(0,0)$ n'est ni définie
 positive ni définie négative.

Par conséquent A n'est ni un minimum ni un
 maximum.

Au point B.

$$\nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, 1\right) - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 1$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$$\Delta' = 9 - 4 = 5$$

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

$$\text{et } \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} > 0$$

Donc $\nabla^2 f\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ est définie positive. D'où
 B est un minimum local.

$$f) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2 - \ln(x_1^2 + x_2^2)$$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$
 $(x_1, x_2) \mapsto \ln(x_1^2 + x_2^2)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Donc $(x_1, x_2) \mapsto \ln(x_1^2 + x_2^2)$ est de classe C^∞ sur

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Par suite f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (car

$(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

14.10.2020 (x_1, x_2) est un point critiquessi $\nabla f(x_1, x_2) = 0$ LMD/CSC

$$\text{on a: } \nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 - \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ x_1 - \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} = 0 \\ x_1 - \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - \frac{2x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} \\ x_2 x_1 - \frac{2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ 1 - \frac{2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = 0 \end{cases} (*)$$

$$(*) \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 2x_2^2 \quad \&$$

$$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ ou } x_1 = -x_2$$

$$\bullet \text{ si } x_1 = x_2 \text{ alors } x_1 x_2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \text{ ou} \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 1$$

$$\bullet \text{ si } x_1 = -x_2 \text{ alors } x_1 x_2 = -x_1^2 = 1 \text{ impossible}$$

D'où les points critiques sont A(-1, -1), B(1, 1)

la matrice hessienne de f

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2x_1^2 + 2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & 1 + \frac{4x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ 1 + \frac{4x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} & -\frac{2x_2^2 + 2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{pmatrix}$$

la nature du point critique A(-1, -1)

$$\nabla^2 f(-1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\nabla^2 f(-1, -1) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

(14.10.2020) A n'est ni "maximum", ni un minimum. LMD/CSC

De même, le point B (1,1) n'est pas ni un minimum, ni un maximum local. Car $\nabla^2 f(1,1) = \nabla^2 f(-1,-1)$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par

$$f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5$$

a.) Points critiques de f sur \mathbb{R}^3 .

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5$$

f est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^3 car une fonction polynôme admet des points critiques, où $\nabla f(x, y, z) = 0$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4xy \\ -2x^2 + 4y - 2z \\ -2y + 4z - 4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4xy = 0 \\ -2x^2 + 4y - 2z = 0 \\ -2y + 4z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 4y-2z=0 \\ -2y+4z-4=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2=y \\ -2x^2+4y-2z=0 \\ -2y+4z-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=2y \\ -2y+8y-4=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=x^2 \\ -2x^2+4x^2-2z=0 \\ -2x^2+4z-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=2y \\ 6y=4 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=x^2 \\ z=x^2 \\ -2x^2+4x^2-4=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{2}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=x^2 \\ z^2=x^2 \\ x^2=2 \end{cases}$$

Exercice 7

Soit $n \geq 2$ et $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(x) = (1+x_n) \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2$

La fonction est polynomiale donc, elle est 2 fois différentiable.

f possède des points critiques ssi $\nabla f(x) = 0$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2(1+x_n)^3 x_1 \\ 2(1+x_n)^3 x_2 \\ \vdots \\ 3(1+x_n) \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 2x_n \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2(1+x_n)^3 x_1 = 0 & L1 \\ 2(1+x_n)^3 x_2 = 0 \\ \vdots \\ 3(1+x_n) \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 2x_n = 0 \end{cases}$$

La ligne $L1 \Rightarrow 1+x_n = 0$ ou $x_1 = 0$

Si $x_n = -1$ alors en remplaçant dans la ligne L_n on aurait $-2 = 0$ ce qui est impossible

Donc $x_1 = 0$. Par suite on a: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

D'où $\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et l'unique point

* Montrer que le point $0 \in \mathbb{R}^n$ est un minimum local strict

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2(1+x_n)^3 & 0 & \dots & 0 & 6(1+x_n)^2 x_1 \\ 0 & 2(1+x_n)^3 & & & 6(1+x_n)^2 x_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 2(1+x_n)^3 & 6(1+x_n)^2 x_{n-1} \\ 6(1+x_n)^2 x_1 & 6(1+x_n)^2 x_2 & \dots & 6(1+x_n)^2 x_{n-1} & 6 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 (1+x_n) + 2 \end{pmatrix}$$

$\nabla^2 f(0) = \text{diag}(2, \dots, 2)$
 La matrice $\nabla^2 f(0)$ est définie positive donc 0 est un minimum local strict

Prendons le point $x^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

alors $f(x^*) = -11 < f(0) = 0$

Donc 0 n'est pas un minimum global

Exercice 20

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = \langle a, x \rangle e^{-\|x\|^2}$ $a \in \mathbb{R}^n$ fixé

1) a) Démontrer que f est différentiable sur \mathbb{R}^n et calculons $\nabla f(x)$

$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \langle a, x \rangle$ est affine, donc linéaire

Continue d'où différentiable

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ donc différentiable.
 $x \mapsto e^x$

$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 donc différentiable.
 $x \mapsto \|x\|^2$

TD Anova.

Prof YUDE

EXERCICE 3

Soit X le facteur "examen" à 3 niveaux: ^{Kouke, Kossi,} _{Adou}
 Soit Y la variable aléatoire qui à chaque individu
 attribut sa note.

Y_{ij} est la note obtenue sur l'individu j
 du niveau i .

$$i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2, \dots, n_i \quad n_1 = 6, n_2 = 8, n_3 = 7$$

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ iid}$$

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad \Rightarrow Y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$$

$$\sum_{i=1}^3 n_i \alpha_i = 0$$

Moyenne des niveaux

$$\bar{y}_1 = 12 \quad \bar{y}_2 = 13 \quad \bar{y}_3 = 18$$

Répondre à la question sachant à résoudre le problème
 de test d'hypothèses suivant

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

$$H_1: \exists i \in \{1, 2, 3\} / \alpha_i \neq 0$$

la région critique du test est: $SM = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_i - \bar{y}_{..})^2$

$$W = \left\{ \begin{array}{l} SM/2 > f_{2,18; 0,95} \\ SR/18 \end{array} \right\}$$

$$SR = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

où $f_{2,18; 0,95}$ est la quantile d'ordre $1-\alpha$ de

la loi de Fisher à $(2, 18)$ degrés de liberté

$$f_{2,18; 0,95} = 3,55$$

$$SM = 12,95$$

$$\frac{SM/2}{SR/18} = 1,19 \quad \text{on a } 1,19 < 3,55$$

$$SR = 98$$

donc H_0 est accepté

Exercice 4

Soit X le facteur "formation initiale" à 3 niveaux :
Licence, Master, Doctorat.

Soit Y indique le salaire annuel brut

Y_{ij} indique le salaire de l'individu j du niveau i .

le modèle d'ANOVA à un facteur s'écrit :

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \text{ avec } \varepsilon_{ij} \text{ iid } \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$i = 1, 2, 3, \quad j = 1, \dots, n_i \quad \text{or } n: \quad n_1 = n_2 = n_3 = 11.$$

Les moyennes des niveaux :

$$\bar{Y}_{1.} = 27,92 \quad \bar{Y}_{2.} = 31,43 \quad \text{et} \quad \bar{Y}_{3.} = 37,44$$

Repondre à cette question, revient à résoudre un
problème de test d'hypothèse

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad \text{contre } H_1: \exists i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ tq. } \mu_i \neq \mu_j$$

la région critique est :

$$W = \left\{ \begin{array}{l} \frac{SM}{SR} > f_{2,30;0,95} \\ SR/30 \end{array} \right\} \quad \text{or} \quad SM = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..})^2$$

$$SR = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \bar{Y}_{i.})^2$$

et $f_{2,30;0,95}$ est la quantile d'ordre 0,95
de la loi de Fisher à (2, 30) degré de liberté.

? AOV
LM

TP avec R (ANOVA)

exercice 3

examinateur = c("kouko", "kouff",

exami = c(rep("kouko", 6), rep("kouff", 8), rep("Adou", 7))

exami = as.factor(exami)

notes = c(10, 11, 11, 12, 13, 15, 8, 11, 11, 13, 14, 15, 16, 16, 10, 13, 14, 14, 15, 16, 16)

length(exami) Pour l'examinateur l'exécution

result 1

resultats = aov(notes ~ exami)

summary(resultats)

Cela donne le tableau de l'analyse de la variance.

k le nombre de niveaux alors $k-1 = 2$

$12.35 / 2 = 6.175$ Mean sq carré moyen

$P_r(>F) : 0.327$ représente la P-valeur

on accepte H_0 aussi si $0.327 > 0.05$

result 2

resultats = lm(notes ~ exami)

Anova(resultats)

D = data.frame(exami, notes)

lm permet de faire et ANOVA et la aov permet de faire ANOVA

Analyse of variance table

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value
Calorie	1	4324.5	4324.5	50.0614
Vitamine	1	210.1	210.1	2.4325
Calorie: vitamine	1	312.5	312.5	3.6176
Residuals	28	2415.5	86.4	
				Pr(>F)
Calorie				1.07e-07
Vitamine				0.13008
Calorie: vitamine				0.06751
Residuals				

Summary (res1)

3_ Les estimations des paramètres du modèle sont: α, β

β intercept

σ std. error

in a α avant la p. value

TD Analyse des données

Prof MONSANT VINCENT

ACP normé c'est quand on divise les observations par les écarts types. revient à prendre comme métrique $i \in \frac{d_{ij}}{s_j}$ $D_{1/2}$

1- c'est normé
La somme des valeurs propres ^{proche} (inertie totale) ^{base de la méthode de concentration}

2- Quel est le pourcentage expliqué par le premier principal ?

3- Coordonnée de Kouao selon le premier axe

$$C_e = Y M a_2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{172 - 169,80}{5,31} \\ \frac{75 - 66,90}{5,15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,56 \\ 0,58 \\ 0,59 \end{pmatrix}$$

Contribution de Koffi selon le deuxième axe ^(l'axe 2. prin.)

$$ctr_{Koffi}^2 = \frac{q_1(-0,82)^2}{0,61}$$

qualité de représentation de api selon troisième axe

$$qual_{api}^3 = \frac{(C_{api}^3)^2}{(C_{api}^1)^2 + (C_{api}^2)^2 + (C_{api}^3)^2}$$

C_{api}^i la VALEUR LMD: Conseils Examens & TD - Corrections l'axe i

4) Représentation des individus sur le plan principal
le plan principal est celui ^(euclidien) contenant des ^{premiers} axes.

5)

-	+
Alse' (-2,94)	Konan (9,80)
Ahou (-1,16)	Yao (1,19)

Les âges ont

AFC : permet de voir la liaison entre 2 variables qualitatives

ACP : indice des données, le poids, d'une métrique

ACM : Description de liaison entre plusieurs variables qualitatives

Faire une partition de l'ensemble de sorte que les éléments de chaque partition s'orientent le plus proche possible.

* méthode non hiérarchiques

une partition sera meilleur si l'inertie intra est faible.

- si chaque individu forme une classe l'inertie intra sera donc égale à zéro qu

la meilleure partition

* méthode hiérarchique = méthode de partitionnement

Questions de cours

→ Méthode des centres mobiles.

Faire une partition de 3 classes

on cherche les axes de séparation de ces 3 groupes

14.10.2020

les méthodes hiérarchiques sont très rapides car le nombre d'itération est peu nombreux.

la classification hiérarchique
 $d(a, b, c) = \min(d(a, c), d(b, c))$

calculer la distance entre 2 groupes

* méthode d'agrégation

$$d(a-b, c) = \min(d(a, c), d(b, c))$$

$$d(a, b-c) = \max(d(a, c), d(b, c))$$

les méthodes mixtes qui est la combinaison des 2 techniques (des 2 méthodes)

classification automatique
 classification non supervisée

x_1	x_2
3	-2
3	2
0	-1
4	-3
0	-1

mean : 2 -0,6

$\frac{1}{5} y^T$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3-2 & 3-2 & 0-2 & 4-2 & 0-2 \\ -2+0,6 & 2+0,6 & -1+0,6 & 0+0,6 & -1+0,6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2,6 \\ 1 & 2,6 \\ -2 & -0,4 \\ -2 & -0,4 \\ -2 & -0,4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -14 & -8 \\ -8 & 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,8 \\ 7,6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ -1,4 & 2,6 & -0,4 & 0,6 & -0,4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1,4 \\ 1 & 2,6 \\ -2 & -0,4 \\ 2 & -0,6 \\ -2 & -0,4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

Bibliography

- [1] ENSEIGNANTS DE UFRMI, proposition de sujets d'examens ou de corrections
- [2] LE VALIDEUR LMD LICENCE 3 EDITION 2019, *sur les anciens sujets de licence 3 de mathématique et Application*
- [3] mathematiques-statistiques-et-probabilites
- [4] algebre SALIOU TOURE
- [5] analyse edmond fedida
- [6] <http://www.les-mathematiques.net>
- [7] <http://www.sesamath.net>
- [8] Algebre et Geometrie PC-PSI-PT
- [9] les grandes classques de mathématique -algebre et geometrie
- [10] Precis MP complet
- [11] Les LM360
- [12] Klub prepa
- [13] H-prepa Analyse pc
- [14] H-PREPAS mathematiques-1re-annee-mpsi-tout-en-un
- [15] LA PHYSIQUE EN FAC
- [16] jean marie monier les-m-ethodes-et-exercices-de-math-matiques-mpsi