3^{me} **année Licence Mathématiques**
Semestre : 5
Matière : Optimisation sans contraintes

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Examen final
Date : 19/01/2020
Durée : $1^h : 30^{Min}$

Exercice 1. (05 pts). Si les affirmations suivantes sont vraies, les justifier. Si elles sont fausses, fournir un contre-exemple.

1. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors l'ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$ est convexe.
2. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est strictement convexe **si et seulement si** $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Toute fonction continue et strictement convexe admet un unique point de minimum global.
4. Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et (x_k) la suite de la méthode du gradient à pas optimal. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\nabla f(x_k)$ est orthogonal sur $\nabla f(x_{k+1})$.

Exercice 2. (07 pts). On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x^2 - 15y^2 + 72x.$$

1. Étudier la coercivité de la fonction f.
2. Calculer le gradient et la matrice Hessienne de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. Déterminer tous les points critiques de f.
4. Préciser la nature de chaque point critique.
5. La fonction f admet elle un minimum global ? un maximum global ?

Exercice 3. (08 pts). On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle, \\ x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire Euclidien de $\mathbb{R}^n$, A est une matrice symétrique et définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit x^* le point de minimum global de f. Soient λ est la plus petite valeur propre de la matrice A et v le vecteur propre associe. Supposons que le point de départ de la méthode de gradient à pas optimal est donné par $x_0 = x^* + v$.

1. Quel type de problème (1) ?
2. Montrer que le gradient au point x_0 est $\nabla f(x_0) = \lambda v$.
3. Montrer que le pas optimal dans cette direction est $\rho_0 = 1/\lambda$.
4. Montrer que la méthode de gradient à pas optimal converge vers x^* avec une seule itération.
5. Soit $g_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction définie par :

$$g_\alpha(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha(xy + xz + yz),$$

   (a) Pour quelle valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction g_α est strictement convexe ?
   (b) Si g_α est strictement convexe, confirmer le résultat de la question 4. pour la fonction g_α avec un point de départ $u_0 = (1, 0, -1)^T$.

Corrigé d'exercice 1: Nous avons :

1. **Vrai**. Soient $(x, y), (x', y') \in E$ et $\lambda \in [0, 1]$, nous avons :

$$\begin{cases} (x, y) \in E \Rightarrow y \geq f(x), \\ (x', y') \in E \Rightarrow y' \geq f(x'). \end{cases}$$

D'autre part, on a :

$$f \text{ est convexe } \Rightarrow f[(1-\lambda)x + \lambda x'] \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(x') \leq (1-\lambda) y + \lambda y',$$

donc,

$$(1-\lambda)(x, y) + \lambda (x', y') = [(1-\lambda)x + \lambda x', (1-\lambda) y + \lambda y'] \in E \Rightarrow E \text{ est convexe.}$$

2. **Faux**. La fonction $f : x \mapsto x^4$ est strictement convexe et pourtant, $f''(0) = 0$.
3. **Faux**. La fonction $g : x \mapsto e^x$ est continue, strictement convexe, $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$ et pourtant, l'équation $e^x = 0$ n'a pas de solution. La fonction g n'admet pas un point de minimum sur $\mathbb{R}$.
4. **Vrai**. Soit φ une fonction définie par :

$$\varphi(\rho) = f(x_k - \rho \nabla f(x_k)).$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$, alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Nous avons :

$$\varphi'(\rho) = -\langle \nabla f(x_k - \rho \nabla f(x_k)), \nabla f(x_k) \rangle.$$

Mais ρ_k le point de minimum de φ, donc on a :

$$0 = \varphi'(\rho_k) = -\langle \nabla f(x_k - \rho_k \nabla f(x_k)), \nabla f(x_k) \rangle = -\langle \nabla f(x_{k+1}), \nabla f(x_k) \rangle,$$

d'où $\nabla f(x_k)$ est orthogonal sur $\nabla f(x_{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Corrigé d'exercice 2:

1. Nous avons :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = -\infty \Rightarrow f \text{ n'est pas coercive.}$$

2. Nous avons :

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 30x + 3y^2 + 72 \\ 6xy - 30y \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x - 30 & 6y \\ 6y & 6x - 30 \end{bmatrix}$$

3. Nous avons :

$$\begin{cases} 3x^2 - 30x + 3y^2 + 72 = 0, \\ 6xy - 30y = 0. \end{cases} \Rightarrow (x,y) \in \{(4,0),(6,0),(5,1),(5,-1)\}.$$

4. Nous avons :
   (a) Pour le point $(4,0)$, nous avons :

$$\nabla^2 f(4,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow det\left(\nabla^2 f(4,0)\right) = 36 \text{ et } tr\left(\nabla^2 f(4,0)\right) = -12$$
$$\Rightarrow (4,0) \text{ est un point de maximum local strict.}$$

   (b) Pour le point $(6,0)$, nous avons :

$$\nabla^2 f(6,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow det\left(\nabla^2 f(6,0)\right) = 36 \text{ et } tr\left(\nabla^2 f(6,0)\right) = 12$$
$$\Rightarrow (6,0) \text{ est un point de minimum local strict.}$$

   (c) Pour le point $(5,1)$, nous avons :

$$\nabla^2 f(5,1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det\left(\nabla^2 f(5,1)\right) = -12 \Rightarrow (5,1) \text{ est un point selle.}$$

   (d) Pour le point $(5,-1)$, nous avons :

$$\nabla^2 f(5,-1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow det\left(\nabla^2 f(5,-1)\right) = -12 \Rightarrow (5,-1) \text{ est un point selle.}$$

5. Nous avons :
   (a) Pour le point $(4,0)$, nous avons :

$$112 = f(4,0) < f(8,0) = 128 \Rightarrow (4,0) \text{ n'est pas un point de maximum global.}$$

   (b) Pour le point $(6,0)$, nous avons :

$$108 = f(6,0) > f(0,0) = 0 \Rightarrow (6,0) \text{ n'est pas un point de minimum global.}$$

Corrigé d'exercice 3:

1. Le problème (1) est un problème quadratique sans contraintes.
2. Nous avons :

$$\nabla f(x_0) = Ax_0 - b = Ax^* - b + Av = Av = \lambda v.$$

3. On pose $g_0 = \nabla f(x_0)$. Nous avons :

$$\rho_0 = \frac{\|g_0\|^2}{g_0^T A g_0} = \frac{\lambda^2 \|v\|^2}{\lambda^2 v^T A v} = \frac{\|v\|^2}{\lambda \|v\|^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

4. Nous avons :

$$x_1 = x_0 - \rho_0 g_0 = x^* + v - \frac{\lambda v}{\lambda} = x^*.$$

5. Nous avons :
   (a) Le gradient et la matrice hessienne de g_α sont donnés par :

$$\nabla g_\alpha(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x + \alpha(y+z) \\ 2y + \alpha(x+z) \\ 2z + \alpha(x+y) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla^2 g_\alpha(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 2 \end{bmatrix}$$

   Alors, on a :

$$g_\alpha \text{ fonction quadratique et strictement convexe } \Leftrightarrow \nabla^2 g_\alpha \text{ est définie positive}$$

$$\begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} = 4 - \alpha^2 > 0, \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 8 = 2(\alpha+1)(\alpha-2)^2 > 0. \end{cases}$$

   Donc, $\alpha \in \,]-1, 2[$.

   (b) On pose $A = \nabla^2 g_\alpha(x,y,z)$. Nous avons :

$$g_0 = \nabla g_\alpha(u_0) = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\alpha \\ 0 \\ \alpha - 2 \end{bmatrix}$$

$$\rho_0 = \frac{\|g_0\|^2}{g_0^T A g_0} = \frac{1}{2-\alpha}.$$

   Donc, on a :

$$u_1 = u_0 - \rho_0 g_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2-\alpha} \begin{bmatrix} 2-\alpha \\ 0 \\ \alpha-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Nous avons $\nabla g_\alpha(u_1) = 0$ et g_α est strictement convexe, alors u_1 est l'unique point de minimum global de g_α sur $\mathbb{R}^3$.