Université des Lagunes **Année Universitaire 2022-2023**
L3 Maths

TD d'Optimisation non linéaire sans contraintes

Exercice 1

1) Les fonctions suivantes sont-elles coercives ?
a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x^2 + 1$
b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a, x\rangle + b$ avec $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$
c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x_1^2 + x_2 - 1$
d) $f : R^2 \to R$ définie par $f(x) = 2x_1^2 + x_2^3 + 2x_2^2$
e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 10x_1 - 50$
e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$
2) On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ où $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive et $b \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est coercive.

Exercice 2

1) Déterminer les points critiques des fonctions réelles suivantes et préciser leur nature (minimum local, maximum local ou un point selle).
$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2^2 - 6x_1 - 8x_2$
$f(x, y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$
$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1 - 4x_2$
$f(x, y) = x^2 - 10xy + 9y^2 + 5x - 4y$
$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy + 6x + 2y + 6$
$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 24$
$f(x, y) = -3x^3 + 24xy - 12y^2 - 36x + 45y$
$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4$
$f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - xy + y^2$
$f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$
2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.
a) La fonction possède-t-elle un minimum et un maximum global dans $\mathbb{R}^2$?
b) Déterminer les points où f présente des extrema locaux dans $\mathbb{R}^2$.
3) Mêmes questions pour $f(x, y) = 7xy + 4(x^3 - y^3) + x - y$.
4) Soit la fonction $f(x, y, z) = 2xyz - 4xz - 2yz + x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z$.
a) Vérifier que les points suivants $(0, 3, 1)$, $(0, 1, -1)$, $(1, 2, 0)$, $(2, 1, 1)$ et $(2, 3, -1)$ sont les points stationnaires de f.
b) En utilisant les conditions d'optimalité du second ordre, déterminer leur nature.

Exercice 3

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$
a) Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$
b) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.
a) Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$
b) La fonction f possède-t-elle des extrema absolus sur $\mathbb{R}^2$?
3) Soit $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$.
a) Déterminer les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$
b) Montrer que $f(x, y) \leq 2r^2 - \frac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$.
En déduire que $f(x, y) \leq 4$.
c) Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.

d) Y a-t-il un minimum global ?

Exercice 4

On pose $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$.

1) Déterminer les points critiques de f.

2) Sans utiliser la matrice hessienne, déterminer si f a un minimum ou maximum local ou global en ces points.

3) Ecrire la matrice hessienne en un point critique. Quel est son déterminant ? Cela donne-t-il une information suffisante pour la recherche d'extrema ?

Exercice 5 On considère la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = xy\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

1) Etudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

2) Démontrer que $f(x, y)_{\|(x,y)\| \to +\infty} \to 0$.

3) Déduire de ce qui précède l'existence des extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5$$

a) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer les extrema de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $f_a : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y$.

a) Pour quelles valeurs de a, la fonction f_a est-elle convexe ? Strictement convexe ? coercive ?

b) Discuter en fonction des valeurs du paramètre a de l'existence de solutions au problème d'optimisation $\inf\{f_a(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

c) Résoudre le problème suivant les valeurs de a.

2) Déterminer les extrema globaux de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + y + z = 1$ en se ramenant à un problème d'optimisation sans contrainte dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale définie par

$$x = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to f(x, y) = (1 + y)^3\|x\|^2 + y^2$$

Montrer que $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est le seul point critique de f, qu'il est minimum local strict de f, mais qu'il n'est pas minimum global de f.

Exercice 9

Soit n un entier $n \geq 2$. On considère n points (a_i, b_i) de $\mathbb{R}^2$ pour $i = 1, \cdots, n$ où les a_i sont non tous égaux et la fonction f définie su $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_ix - y)^2.$$

a) Vérifier que f n'admet qu'un seul point $(\widehat{x}, \widehat{y})$ critique sur $\mathbb{R}^2$.

b) Exprimer $\widehat{y}$ en fonction de $\widehat{x}$. Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

La fonction de Rosenbrock est la fonction

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + \lambda(x_1^2 - x_2)^2$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Trouver les points stationnaires de f et discutez leur nature en fonction de λ.

Exercice 11

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y + 2y^2 - 2yz + 2z^2 - 4z + 5$.
a) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^3$.
b) Montrer que l'expression $f(x, y, z)$ peut s'écrire sous forme d'une somme de carrés.
c) En déduire les points de minimum de f sur $\mathbb{R}^3$.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
a) Déterminer les points critiques de g sur $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que l'expression $g(x, y) + 9$ peut s'écrire sous forme d'une somme de carrés.
c) En déduire les points de minimum de g sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12

Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$ deux fois continûment différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$m \|h\|^2 \leq \left\langle \nabla^2 f(x)h, h \right\rangle \leq M \|h\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n$$

où m, M sont des constantes strictement positives.
1) Montrer que

$$\min\{\langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{\alpha}{2} \|y - x\|^2\} = -\frac{1}{2\alpha} \|\nabla f(x)\|^2 \quad \forall \alpha > 0$$

2) Montrer que f a un minimum global unique x^* qui vérifie

$$\frac{1}{2M} \|\nabla f(x)\|^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2m} \|\nabla f(x)\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

et

$$\frac{m}{2} \|x - x^*\|^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{M}{2} \|x - x^*\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 13

Montrer que pour $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$, $(0, 0)$ est un point critique semi défini positif qui n'est pas un extremum local.

Exercice 14

On se propose de déterminer les dimensions d'un wagon rectangulaire non couvert telles que pour un volume donné V, la somme des aires des côtés et du plancher soit minimale.

Donner le modèle mathématique de ce problème, le ramener à un problème d'optimisation sans contraintes et le résoudre.

Exercice 15

On cherche les extrema locaux éventuels de la fonction V de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$V(x, y) = xy\frac{12 - xy}{2(x + y)}.$$

2) Une boîte sans couvercle a la forme d'un parallélépipède de côtés de dimensions x, y et z (largeur, profondeur et hauteur de la bpîte). Sachant que la surface latérale (somme des aires de ses cinq faces) vaut 12, quelles valeurs doivent avoir x, y et z pour que son volume soit maximum (Indication : on pourra éliminer l'inconnue z dans l'expression du volume de la bpîte).

Exercice 16

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$ et u une solution à ε près du problème de minimisation de f sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire vérifiant $f(u) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \varepsilon$. Etant donné $\lambda > 0$ on considère

$$g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto g(x) := f(x) + \tfrac{\varepsilon}{\lambda} \|x - u\|$$

1) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n$ minimisant g sur $\mathbb{R}^n$.

Montrer que ce point v vérifie les conditions ci-après :

i) $f(v) \leq f(u)$

ii) $\|v - u\| \leq \lambda$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(v) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - v\|$

2) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable et bornée inférieurement sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x_ε tel que $\|\nabla f(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$.

Exercice 17

Soit f définie sur $\mathbb{R}^n$ continûment différentiable.

On rappelle que f est fortement convexe de rapport a ($a > 0$) si

$$\forall t \in [0,\ 1],\ \forall x,\, y \in \mathbb{R}^n,\ \ f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \tfrac{a}{2}t(1-t)\|x - y\|^2$$

1) Montrer que si f est fortement convexe de rapport a ,

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}^n,\ \ f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x); y - x \rangle + \tfrac{a}{2}\|x - y\|^2$$

2) On considère le problème d'optimisation

$$\min[f(x) : x \in \mathbb{R}^n] \qquad (P)$$

On suppose que f est fortement convexe de rapport a.

Montrer que (P) admet une solution unique x^*

3) On considère l'algorithme du gradient à pas optimal appliqué à (P).

Soit $\{x^k\}$ la suite générée par cet algorithme.

a) Montrer que $\langle \nabla f(x^{k+1}); x^{k+1} - x^k \rangle = 0$

b) Montrer que $f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \frac{a}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2$

En déduire que la suite $\{f(x^k)\}$ est décroissante et qu'elle converge.

c) En déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|x^{k+1} - x^k\|^2 = 0$

4) Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)\| = 0$

En déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|\nabla f(x^k)\| = 0$

5) En utilisant la forte convexité de f montrer que $\|x^k - x^*\| \leq \frac{1}{a}\|\nabla f(x^k)\|$

En déduire que la suite $\{x^k\}$ converge vers x^*.

Exercice 18

Soit la fonction $f(x_1, x_2) = 2x_1^3 + 3x_1^2 + 12x_1x_2 + 3x_2^2 - 6x_2 + 54$. Trouvez les points stationnaires de cette fonction et déterminez leur nature. La fonction possède-t-elle un minimum global ? un maximum global ?

Exercice 19

On considère $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et $\|\cdot\|$ désigne la norme associée c'est-à-dire la norme euclidienne. Etant donné $a \neq 0$ fixé dans $\mathbb{R}^n$, on considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \langle a, x\rangle\, e^{-\|x\|^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

1) a) Démontrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et calculer le gradient $\nabla f(x)$ de f en tout $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Déterminer les points critiques de f.

2) a) Démontrer que f est deux fois différentiable en tout $x \in \mathbb{R}^n$ et calculer $\nabla^2 f(x)$.

b) Déterminer la nature des points critiques de f trouvés à la première question (maximum local, minimum local).

Exercice 20

Soit A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$. On considère le problème suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$.

1) Interpreter $(\mathcal{P})$ comme un problème de projection. En déduire que $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^n$. Discuter son unicité en fonction du rang de A.

2) Montrer que u est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si

$$A^T A u = A^T b.$$

3) On pose $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|^2$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x\|^2.$$

a) Montrer qu'il existe un unique $u_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)$.

b) Ecrire l'équation d'Euler satisfaite par u_ε.

c) Montrer que $\|u_\varepsilon\| \leq \|u\|$ pour tout u solution de $(\mathcal{P})$.

Exercice 21

On considère la fonction f_p définie sur $\mathbb{R}^3$ (p étant un paramètre réel).

$$f_p(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - p(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

1) Montrer que la fonction f_p est coercive. Endéduire que la proposition $(\mathcal{P})$ suivante est vraie :

$$\exists (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 : \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f_p(x_0, y_0, z_0) \leq f_p(x, y, z).$$

2) On s'interesse aux points critiques de f_p.

Montrer qu'il existe une valeur p_0 telle que

a) Pour $p \leq p_0$, f_p admet un seul point critique

b) Pour $p > p_0$, f_p admet 27 points critiques. On précisera la valeur de p_0 ainsi que celles des 27 points critiques.

3) Trouver les minima globaux de f_p lorsque $p \leq p_0$.

4) On suppose maintenant $p > p_0$.

Calculer le Hessien de f_p et étudier la nature des points critiques. En déduire que la fonction f_p admet 8 minima globaux que l'on précisera.

Exercice 22

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par :

$$f(x) = \|x\|^4 - \langle b, x\rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne et b un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x)$ et $\nabla^2 f(x)$.

2) Montrer que f est une fonction convexe.

3) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $f(x) \geq \|x\|^2 + \alpha$. En déduire l'existence d'au moins un point de minimum de f sur $\mathbb{R}^n$.

4) En résolvant l'équation d'Euler, trouver les points de minimum de f sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 23

La méthode de la plus grande pente est appliquée au problème de la minimisation de

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

au départ de $(2, 1)$. Montrez que les approximations successives sont données par $x^k = \frac{1}{3^k}(2, (-1)^k)$. Montrez que $f(x^{k+1}) = \frac{1}{9} f(x^k)$

Exercice 24

Utilisez la méthode de Newton pour trouver un point minimisant

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^4 + 6x_2^4 - 6x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 15x_1 - 7x_2 + 13.$$

Partez de $x^0 = (1, 1)$.

Exercice 25

Soit b un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

où Q est une matrice symétrique définie positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$. On considère le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

1) Montrer que $(\mathcal{P})$ admet une solution optimale unique.

L'algorithme du gradient de plus forte pente est défini par

$$x_{k+1} = x_k - \mu_k \nabla f(x_k), \quad x_k \in \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \cdots,$$

où μ_k minimise $f(x_k - \mu \nabla f(x_k))$ sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que

$$\mu_k = \frac{g_k^T g_k}{g_k^T Q g_k} \qquad \text{avec } g_k = \nabla f(x_k) = Qx_k - b.$$

Exercice 26

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\|Ax\|^2}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1) La fonction f est-elle coercive ?

2) Montrer que f admet un minimum que l'on déterminera.

3) On suppose que la matrice A est inversible, montrer que ce minimum est unique.

4) Écrire l'algorithme du gradient à pas optimal pour la recherche de ce minimum. [On demande de calculer à l'étape $k+1$ le pas de déplacement λ_k en fonction de A et de x^k.]