Réponses aux exercices du chapitre 7

Numéro 1. Faire trois itérations avec $h = 0{,}1$ des méthodes d'Euler explicite, d'Euler modifiée, du point milieu et de Runge-Kutta d'ordre 4 pour les équations différentielles suivantes :

a) $y\prime(t) = tsin(y(t)) \qquad (y(0) = 2)$
b) $y\prime(t) = t^2 + (y(t))^2 + 1 \qquad (y(1) = 0)$
c) $y\prime(t) = y(t)e^t \qquad (y(0) = 2)$

Solution

a) On a $y' = t\sin(y(t))$, $y(0) = 2$ et $h = 0{,}1$. On a donc que $t_0 = 0$, que $y_0 = 2$ et que $f(t_n, y_n) = t_n \sin(y_n)$.

Euler : $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$

- $y_0 = 2$
- $y_1 = 2 + 0{,}1 \times 0 \times \sin 2 = 2$
- $y_2 = 2 + 0{,}1 \times 0{,}1 \sin 2 = 2{,}009\,0929$
- $y_3 = 2{,}009\,0929 + 0{,}1 \times 0{,}2 \times \sin 2{,}009\,0929 = 2{,}027\,202\,49$

Euler modifiée : $\begin{cases} \hat{y} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \hat{y})] \end{cases}$

$$\begin{aligned} - \quad f(t_0, y_0) &= f(0\,,2) = 0 \\ \hat{y} &= y_0 + h \times f(t_0, y_0) = 2 + h \times 0 = 2 \\ y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}[f(t_0, y_0) + f(t_0 + h, \hat{y})] = 2 + 0{,}05[0 + 0{,}1 \times \sin(2)] = 2{,}004\,546\,487 \\ - \quad f(t_1, y_1) &= 0{,}1 \times \sin(2{,}004\,546\,487) = 0{,}090\,7396 \\ \hat{y} &= 2{,}004\,546\,487 + 0{,}1 \times 0{,}090\,7396 = 2{,}013\,620\,44 \\ f(t_2, \hat{y}) &= 0{,}2 \times \sin(2{,}013\,620\,44) = 0{,}180\,709\,03 \\ y_2 &= 2{,}004\,546\,487 + 0{,}05[0{,}090\,7396 + 0{,}180\,709\,03] = 2{,}018\,118\,919 \end{aligned}$$

- De même, on a que $y_3 = 2{,}0405\,399\,39$.

Runge-Kutta d'ordre 4 : $\begin{cases} k_1 = hf(t_n, y_n) \\ k_2 = hf(t_n + h/2, y_n + k_1/2) \\ k_3 = hf(t_n + h/2, y_n + k_2/2) \\ k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k + 4) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$

On a que $h = 0{,}1$, $t_0 = 0$, $y_0 = 2$ et que $f(t_n, y_n) = t_n \sin(y_n)$.

– Pour la première itération, on obtient :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_0, y_0) = 0{,}1 \times 0 \times \sin 2 = 0 \\
k_2 &= hf\left(0 + 0{,}05, 2 + \tfrac{0}{2}\right) = 0{,}1 f(0{,}05\ ,\ 2) = 0{,}1 \times 0{,}05 \times \sin 2 = 0{,}004\,546\,487 \\
k_3 &= 0{,}1 f\,(0{,}05, 2 + 0{,}004\,546\,487/2) = 0{,}1 f(0{,}05\ ,\ 2{,}002\,273\,244) \\
&= 0{,}1 \times 0{,}05 \times \sin(2{,}002\,273\,244) = 0{,}004\,541\,745 \\
k_4 &= 0{,}1 f(0{,}1\ ,\ 2{,}004541745) = 0{,}009\,073\,98
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow y_1 = 2 + \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2{,}004\,541\,741.$

De même, on trouve que :

– Deuxième itération :

$k_1 = 0{,}009\,074 \quad k_2 = 0{,}013\,582 \quad k_3 = 0{,}013\,568 \quad k_4 = 0{,}018\,032$

$y_2 = 2{,}018\,109\,47$

– Troisième itération :

$k_1 = 0{,}018\,032 \quad k_2 = 0{,}022\,442 \quad k_3 = 0{,}022\,418 \quad k_4 = 0{,}026\,751$

$y_2 = 2{,}040\,526\,45$

b) On a $y'(t) = t^2 + (y(t))^2 + 1$, $y(1) = 0$ et $h = 0{,}1$. Donc, on a également que $t_0 = 1$, $y_0 = 0$ et que $f(t_n, y_n) = t_n^2 + (y_n)^2 + 1$.

Euler :

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hf(t_0, y_0) = 0 + 0{,}1 \times (1^2 + 0 + 1) \\
y_1 &= 0{,}2 \quad t_1 = 1{,}1 \\
y_2 &= y_1 + hf(t_1, y_1) = 0{,}2 + 0{,}1 \times (1{,}1^2 + 0{,}2^2 + 1) \\
y_2 &= 0{,}425 \quad t_2 = 1{,}2 \\
y_3 &= y_2 + hf(t_2, y_2) = 0{,}425 + 0{,}1 \times (1{,}2^2 + 0{,}425^2 + 1) \\
y_3 &= 0{,}687\,0625 \quad t_3 = 1{,}3
\end{aligned}
$$

Euler modifiée :

– Première itération

$$
\begin{aligned}
\hat{y} &= y_0 + hf(t_0, y_0) = 0 + 0{,}1 \times f(1\ ,\ 0) = 0{,}2 \\
y_1 &= y_0 + h/2(f(t_0, y_0) + f(t_0 + h, \hat{y})) = 0 + 0{,}05 \times (f(1\ ,\ 0) + f(1{,}1\ ,\ 0{,}2)) = 0{,}2125 \\
t_1 &= 1{,}1
\end{aligned}
$$

– Deuxième itération

$$
\begin{aligned}
\hat{y} &= y_1 + hf(t_1, y_1) = 0{,}2125 + 0{,}1 \times f(1{,}1\ ,\ 0{,}2125) = 0{,}438\,0156 \\
y_2 &= y_1 + h/2(f(t_1, y_1) + f(t_1 + h, \hat{y})) \\
y_2 &= 0{,}2125 + 0{,}05 \times (f(1{,}1\ ,\ 0{,}2125) + f(1{,}2\ ,\ 0{,}438\,0156)) = 0{,}456\,850\,69 \\
t_2 &= 1{,}2
\end{aligned}
$$

– Troisième itération

$$
\begin{aligned}
\hat{y} &= y_2 + hf(t_2, y_2) = 0{,}456\,850\,69 + 0{,}1 \times f(1{,}2\ ,\ 0{,}456\,850\,69) = 0{,}721\,7219 \\
y_3 &= y_2 + h/2(f(t_2, y_2) + f(t_2 + h, \hat{y})) \\
y_3 &= 0{,}456\,850\,69 + 0{,}05 \times (f(1{,}2\ ,\ 0{,}456\,850\,69) + f(1{,}3\ ,\ 0{,}721\,7219)) = 0{,}749\,830\,45 \\
t_3 &= 1{,}3
\end{aligned}
$$

Runge-Kutta $O(h^4)$:

– Première itération

$k_1 = 0{,}2 \qquad k_2 = 0{,}211\,250 \quad k_3 = 0{,}211\,366 \quad k_4 = 0{,}225\,468$

$y_1 = 0{,}211\,7831$

- Deuxième itération

  $k_1 = 0{,}225\,485 \qquad k_2 = 0{,}242\,782 \quad k_3 = 0{,}243\,351 \quad k_4 = 0{,}264\,715$

  $y_2 = 0{,}455\,527\,18$

- Troisième itération

  $k_1 = 0{,}264\,751 \quad k_2 = 0{,}290\,813 \quad k_3 = 0{,}292\,362 \quad k_4 = 0{,}420\,788$

  $y_3 = 0{,}748\,199$

c) On a $y'(t) = y(t)e^t$, $y(0) = 2$ et $h = 0{,}1$. Donc, on a également que $t_0 = 0$, $y_0 = 2$ et que $f(t_n, y_n) = y_n e^{t_n}$.

Euler : $y_1 = 2{,}2$
$y_2 = 2{,}443\,1376$
$y_3 = 2{,}741\,543$

Euler modifiée : $\hat{y} = 2{,}2 \quad \Rightarrow y_1 = 2{,}221\,5688$
$\hat{y} = 2{,}467\,0901 \quad \Rightarrow y_2 = 2{,}494\,994$
$\hat{y} = 2{,}799\,7344 \quad \Rightarrow y_3 = 2{,}836\,326$

Runge-Kutta $O(h^4)$:

- Première itération :

  $k_1 = 0{,}2 \qquad k_2 = 0{,}220\,767 \quad k_3 = 0{,}221\,859 \quad k_4 = 0{,}245\,553$

  $y_2 = 2{,}221\,8007$

- Deuxième itération :

  $k_1 = 0{,}245\,547 \quad k_2 = 0{,}272401 \quad k_3 = 0{,}273961 \quad k_4 = 0{,}304833$

  $y_2 = 2{,}495651$

- Troisième itération :

  $k_1 = 0{,}304820 \qquad k_2 = 0{,}340\,018 \quad k_3 = 0{,}342\,278 \quad k_4 = 0{,}383\,080$

  $y_2 = 2{,}837\,7328$

Numéro 2. L'équation différentielle :

$$y\prime(t) = y(t) + e^{2t} \qquad (y(0) = 2)$$

possède la solution analytique $y(t) = e^t + e^{2t}$.

a) En prenant $h = 0{,}1$, faire 3 itérations de la méthode d'Euler modifiée et calculer l'erreur commise sur y_3 en comparant les résultats avec la solution analytique $y(0, 3)$.

b) En prenant $h = 0{,}05$, faire 6 itérations de la méthode d'Euler modifiée et calculer l'erreur commise sur y_6 en comparant les résultats avec la solution analytique $y(0, 3)$.

c) Faire le rapport des erreurs commises en a) et en b) et commenter le résultat en fonction de l'erreur de troncature locale liée à la méthode utilisée.

d) Utiliser l'extrapolation de Richardson pour obtenir une meilleure approximation de $y(0, 3)$.

Solution
Comme $y(t) = e^t + e^{2t}$, alors $y(0{,}3) = 3{,}171\,977\,608$. Aussi, on a que $f(t_n, y_n) = y_n + e^{2t_n}$, que $y(0) = 2$ et donc que $y_0 = 2$ et que $t_0 = 0$.

a) On fait 3 itérations avec $h = 0{,}1$ et avec la méthode d'Euler modifiée.

$$\begin{array}{ll} \hat{y} \;= 2{,}3 & \Rightarrow y_1 = 2{,}221\,5688 \\ \hat{y} \;= 2{,}680\,817\,43 & \Rightarrow y_2 = 2{,}712\,075\,889 \\ \hat{y} \;= 3{,}132\,465\,948 & \Rightarrow y_3 = 3{,}170\,000\,1557 \end{array}$$

L'erreur est alors donnée par :
$|y(0{,}3) - y_3| = |3{,}171\,977\,608 - 3{,}170\,000\,1557| = 0{,}001\,977\,45$.

b) On fait 6 itérations avec $h = 0{,}05$ et avec la méthode d'Euler modifiée.

$$\begin{array}{ll} \hat{y} \;= 2{,}15 & \Rightarrow y_1 = 2{,}156\,3793 \\ \hat{y} \;= 2{,}319\,4568 & \Rightarrow y_2 = 2{,}326\,4395 \\ \hat{y} \;= 2{,}503\,8316 & \Rightarrow y_3 = 2{,}511\,4778 \\ \hat{y} \;= 2{,}704\,5447 & \Rightarrow y_4 = 2{,}712\,9205 \\ \hat{y} \;= 2{,}923\,1577 & \Rightarrow y_5 = 2{,}932\,3361 \\ \hat{y} \;= 3{,}161\,3890 & \Rightarrow y_6 = 3{,}171\,4502 \end{array}$$

L'erreur est alors donnée par :
$|y(0{,}3) - y_6| = |3{,}171\,977\,608 - 3{,}171\,4502| = 0{,}000\,527\,39$.

c) Le ratio des erreurs est : $\dfrac{0{,}001\,977\,45}{0{,}000\,527\,39} = 3{,}75 \approx 4$, ce qui confirme que la méthode d'Euler modifiée est d'ordre 2.

d) L'extrapolation de Richardson d'ordre n est donnée par l'équation suivante :

$$Q_{exa} \backsimeq \frac{2^n + Q_{app}(h/2) - Q_{app}(h)}{2^n - 1}$$

On a donc :

$$\frac{4 \times 3{,}171\,450\,217 - 3{,}170\,000\,1557}{3} = 3{,}171\,933\,572 \text{ (erreur } = 0{,}44 \times 10^{-4}\text{)}.$$

Numéro 4. On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} y\prime(t) & = 2y(t) \\ y(0) & = 5 \end{cases}$$

a) Vérifier que la solution analytique est $y(t) = 5e^{2t}$.

b) En posant $h = \frac{1}{N}$, montrer que les approximations fournies par la méthode d'Euler explicite peuvent s'écrire comme $y_n = 5(1+2h)^n$, pour $n = 0, ..., N$.

c) Vérifier numériquement que l'erreur $e(h)$ se comporte suivant la relation $e(h) \approx Kh$, où K est une constante.

Solution

a) Si $y(t) = 5e^{2t}$, alors on a que $y'(t) = 10e^{2t} = 2y(t)$. De plus, on a que $y(0) = 5e^0 = 5$. Donc, $y(t) = 5e^{2t}$ est bien une solution analytique de l'équation différentielle.

b) Puisque $y'(t) = 2y(t)$, on a que $f(t_n, y_n) = 2y_n$. On a également que $y_0 = 5$. L'algorithme de la méthode d'Euler explicite nous dit que

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) = y_n + h(2y_n) = (1+2h)y_n$$

pour tout n. Par conséquent, on obtient par récursivité que :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= (1+2h)((1+2h)y_{n-1}) \\ &= (1+2h)^2((1+2h)y_{n-2}) \\ &= \qquad \vdots \\ &= (1+2h)^{n+1}y_0 = 5(1+2h)^{n+1} \end{aligned}$$

c) On peut chercher la constante en calculant e_n/h_n.

n	h_n	e_n	e_n/h_n
2	0,5	16,9462	33,9
10	0,1	5,9866	59,9
20	0,05	3,3077	66,7
100	0,01	0,7220	72,2
200	0,005	0,3651	73,0

et donc $K \simeq 73$.

Numéro 19. On vous demande de résoudre le système d'équations différentielles suivant pour modéliser le mouvement d'un pendule de Foucault :

$$\begin{cases} x''(t) = 2\omega y'(t) sin\psi - k^2 x(t) & x(0) = 1 \quad x'(0) = 0 \\ \\ y''(t) = -2\omega x'(t) sin\psi - k^2 y(t) & y(0) = 1 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

où $(x(t), y(t))$ désigne la trajectoire du pendule dans le plan, ω est la vitesse angulaire de la terre, ψ est la latitude locale et $k^2 = g/l$, g étant l'accélération gravitationnelle et l la longueur du pendule.
Discuter brièvement d'une stratégie de résolution et, si nécessaire, reformuler ce problème pour que l'on puisse résoudre par les techniques numériques vues dans ce chapitre. **Ne pas répondre.**

Solution
En posant $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$, $x_3(t) = y(t)$ et $x_4(t) = y'(t)$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x_1'(t) &=& x_2(t) & x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) &=& 2\omega x_4(t)\sin\psi - k^2 x_1(t) & x_2(0) = 0 \\ x_3'(t) &=& x_4(t) & x_3(0) = 0 \\ x_4'(t) &=& -2\omega x_2(t)\sin\psi - k^2 x_3(t) & x_4(0) = 0 \end{cases}$$

On peut alors résoudre par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour les systèmes d'équations différentielles pour une plus grande précision.