Établissement : **Université des Lagunes**

Année 2022-2023

DEVOIR DE MAISON

L3 Calcul Différentiel

EXERCICE 1

Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } g(x,y) > 0 \\ f(x,y) + (g(x,y))^2 & \text{si } g(x,y) \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. une fonction continue. On définit $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$g(x,y) = \frac{1}{x}\int_x^{xy} f(t)dt$$

1. Etudier la continuité de g. Montrer qu'on peut prolonger g en une fonction continue $\tilde{g}$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$
2. Calculer les dérivées partielles premières de g en $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$
3. On suppose que $f'(0)$ existe.
   Calculer les dérivées partielles premières de g en $(0,y_0) \in \{0\} \times \mathbb{R}$
4. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x,y) = \varphi(y),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

EXERCICE 3

1. Soit $f : E \to F$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $f(\lambda x) = \lambda x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$. Montrer que l'application f est linéaire.
2. Montrer que $\phi : A \mapsto \det A$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle en commençant par évaluer ses dérivées partielles.