TD de topologie et calcul différentiel– Feuille 7: sur les applications différentiables et problèmes d'extremum

Groupe de TD 5

Différentielles, dérivées partielles

Exercice 1. Soient E, F et G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et soit B une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G. Soit $(a, b) \in E \times F$.

a) Montrer que B est différentiable en (a, b) et calculer sa différentielle.

b) Montrer que B est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2 (*Dérivées partielles*)**.** On munit $\mathbb{R}^n$ de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$.

a) Rappeler la définition des dérivées partielles. Calculer les dérivées partielles des applications

$$(x, y, z) \to x^4 + y^4 + z^4, \qquad (x, y, z) \to 4x^2yz.$$

Ces applications sont elles de classe $\mathcal{C}^1$?

b) Rappeler la définition de la jacobienne. Calculer la jacobienne de l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$f(x, y, z) = (x^4 + y^4 + z^4, 4x^2yz).$$

c) Soit I un ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Considérons $g : I \to U$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Rappeler comment on calcule les dérivées partielles de $f \circ g$ en fonctions des dérivées partielles de f et de la dérivée de g.

d) Soient des applications x, y f et g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Calculer les dérivéees partielles de

$$(t, s) \to f(x(t, s), y(t, s)) \quad \text{et} \quad (t, s) \to g(s^2 + t^3, x^2(t, s))$$

en fonction de celles de f, g, x et y.

Exercice 3 (*Dérivée directionnelle*)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une application $f : U \to \mathbb{R}$. Soit $x \in U$ et $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que f est *dérivable suivant* $\overrightarrow{u}$ *en* x si

$$h(t) = f(x + t\overrightarrow{u})$$

est dérivable en $t = 0$. Dans ce cas, on appelle $h'(0)$ la *dérivée directionnelle* de f en x par rapport à $\overrightarrow{u}$.

a) Vérifier que si f est différentiable en x, elle admet des dérivées directionnelles en x dans toutes les directions. Les calculer en fonction de $Df(x)$.

b) Vérifier que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 0$$

admet des dérivées en l'origine dans toutes les directions et qu'elle n'est pas différentiable.

c) Pour quelles valeurs de $p, q \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{pq} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_{pq}(x, y) = \frac{x^p y^q}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 0$$

est elle continue ? De classe $\mathcal{C}^1$?

d) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = y^3/x \quad \text{si } x \neq 0, \qquad f(0, y) = 0$$

admet des dérivées en l'origine dans toutes les directions et qu'elle n'est pas bornée au voisinage de l'origine.

Quelques exemples classiques

Exercice 4 (*Fonction déterminant)***.** On note det l'application déterminant de $\mathrm{M}(n)$ dans $\mathbb{R}$.

a) Pourquoi det est-elle de classe C^1 ?

b) En calculant $\det(\mathrm{Id} + tE_{ij})$, montrer que $D\det(\mathrm{Id})(H) = \mathrm{tr}(H)$

c) En déduire que pour tout $M \in \mathrm{Gl}(n)$, $D\det(M)(H) = \det(M)\,\mathrm{tr}(M^{-1}H)$.[1]

d) En prolongeant par continuité[2], montrer que pour tout $M \in \mathrm{M}(n)$, $D\det(M)(H) = \mathrm{tr}({}^t\widehat{M}H)$ où $\widehat{M}$ est la matrice des cofacteurs de M.

Exercice 5. On considère $\varphi : \mathrm{M}(n) \to \mathrm{M}(n)$ définie par $M \mapsto {}^tM.M$.

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $D\varphi(M)$.

b) On suppose que $M \in O(n) = \{M \in \mathrm{M}(n)/{}^tM.M = I_j\}$. Calculer le rang de $D\varphi(M)$.

Exercice 6. Soient E, F et G trois espaces normés et soit $\Omega \in E$ un ouvert de E. Considérons $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue, $f : \Omega \to E$ et $g : \Omega \to F$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur E. Soit $\Pi : \Omega \to G$ définie par

$$\forall x \in \Omega, \;\; \Pi(x) = B(f(x), g(x)).$$

Montrer que Π est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 7 (*Différentiabilité des normes)***.** Soit $\| \cdot \|$ une norme de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que l'application

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad x \to \|x\|$$

n'est pas différentiable en 0 et que l'ensemble de ses points de différentiabilité est une réunion de demi-droites de $\mathbb{R}^n$.

b) En quels points sont différentiables les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8 (*Relation d'Euler)***.** Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré n, i.e. pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^p$ l'on a $f(tx) = t^n f(x)$. On suppose que f est différentiable en dehors de l'origine. Montrer que pour tout $x \neq 0$,

$$Df(x)(x) = nf(x)$$

et que $Df(tx) = t^{n-1}Df(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

[1] On pourra considérer l'application $N \mapsto \det(M^{-1}N)$ et la différentier en M.

[2] Rappelons que $\mathrm{Gl}(n)$ est un ouvert dense de $\mathrm{M}(n)$.

Exercice 9 (*Dimension infinie, exemples simples)*.

a) Etudier la dérivabilité de la norme d'un espace de Hilbert.

b) Soit $X = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que l'application

$$f \to \int_0^1 f^2(t)\, dt$$

est différentiable. Calculer sa différentielle.

c) *(Opérateur de composition)* Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

i) Montrer que "l'opérateur de composition" Comp : $X \to X$ défini par $\mathrm{Comp}(f) = \varphi \circ f$ (pour tout $f \in X$) est continue.

ii) On suppose désormais φ de classe C^1. Montrer que $\varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + h\Psi(x,h)$ avec Ψ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

iii) En déduire que Comp est différentiable avec pour différentielle

$$D\mathrm{Comp}(f)(h) = \varphi'(f).h$$

Problèmes d'extremum

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ et X l'intersection du plan $\{(x,y,z)/x+y+z=1\}$ et de la sphère $\{(x,y,z)/x^2+y^2+z^2=1\}$.

a) Trouver les extremum possibles de $f_{|X}$.

b) Etudier la réciproque, c'est à dire quels points sont effectivement des extremum.

Exercice 11. Déterminer les extrema de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ déterminée par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ et préciser leur nature.

Exercice 12 (janvier 2007)**.** Soient

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + z^2 = 5 \text{ et } x^2 + y^2 - 2z = 0\}.$$

Soit ϕ la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(x,y,z) = (x^2 + 2y^2 + z^2 - 5, x^2 + y^2 - 2z)$$

et f la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y,x) = y + z$.

a) Montrer que P est une partie compact non vide de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer qu'en tout point m de P, le rang de la différentielle de ϕ est 2.

c) Trouver les extremas de f et préciser leur nature.

Exercice 13. On considère le carré $C = [0,a]^2$ dans le plan (euclidien). On cherche les triangles (A,B,C) inscrits sur les côtés du carré C d'aire maximale.

a) Montrer qu'un tel triangle existe.

b) Montrer qu'on peut supposer que les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $A = (0,y)$, $B = (x,a)$, $C = (a,z)$.[3] On notera $K = [0,a]^3$ l'ensemble des triplets $\{(A,B,C)\}$ vérifiant la condition précédente.

c) Montrer qu'il n'y a pas de triangle maximal dans $\mathring{K}$.

d) Trouver les triangles maximaux dans ∂K. Quelle est l'aire maximale ?

[3] c'est à dire que A est sur le côté vertical gauche du carré, B sur le côté horizontal supérieur et C sur le côté de droite.