TD de topologie et calcul différentiel– Corrigé de la Feuille 8: Extremum et Théorème des accroissements finis

Groupe de TD 5

Corrigé 1 (examen janvier 2008)**.** On note $\|(x,y,z)\|_\infty = \max(|x|,|y|,|z|)$. Rappelons que l'on a

$$\begin{cases} f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{(x+y+z)^2} \text{ si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ f(0,0,0) = 0 \end{cases}$$

a) Comme f est une fonction polynomiale en ses coordonnées sur $(]0,+\infty[)^3$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $(]0,+\infty[)^3$, a fortiori de classe $\mathcal{C}^1$. Il reste à étudier la continuité en $(0,0,0)$. Remarquons que pour tout $x,y,z \geqslant 0$, on a

$$x+y+z \geqslant \max(x,y,z) = \|(x,y,z)\|_\infty.$$

Il suit que, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3_+ - \{(0,0,0)\}$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f(x,y,z) = \frac{xyz}{(x+y+z)^2} \leqslant f(x,y,z) &= \frac{\|(x,y,z\|^3_\infty)}{\|(x,y,z)\|^2_\infty} \\ &= \|(x,y,z)\|_\infty \underset{(x,y,z)\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

ce qui démontre que f est continue en $(0,0,0)$ (note: par équivalence des normes en dimension finie, il est tout à fait légitime d'utiliser la norme $\| \|_\infty$ pour démontrer le résultat; mais on pourrait aussi utiliser une autre norme...).

b) Tout d'abord, $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 = a^2\}$ est compact d'après le Théorème de Riesz car $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie (K est la sphère de rayon a pour la norme euclidienne). Comme f est continue sur K elle admet alors un maximum et un minimum sur K (remarque: le minimum est évidemment 0). Appliquons le théorème des multiplicateurs de Lagrange à $K = \Phi^{-1}(\{0\})$ où $\Phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (Φ est polynomiale...). On a

$$Jac(\Phi)_{(x,y,z)} = \big(2x,\ 2y,\ 2z\big) \neq 0$$

si $(x,y,z) \in K$ (car $(0,0,0) \notin K$) ce qui assure que $\partial\Phi_{(x,y,z)}$ est surjective en tout point $(x,y,z) \in K$. Le théorème des multiplicateurs de Lagrange assure alors que le maximum de f est atteint en un point (x, y, z) tel que $\partial f_{(x,y,z)}$ soit colinéaire à $\partial \Phi_{(x,y,z)}$. Or

$$Jac(f)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{yz(y+z-x)}{(x+y+z)^3} & \frac{xz(x+z-y)}{(x+y+z)^3} & \frac{xy(x+y-z)}{(x+y+z)^3} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\partial \Phi_{(x,y,z)}$ et $\partial f_{(x,y,z)}$ sont colinéaires si et seulement si

$$y \cdot (yz(y+z-x)) = x \cdot (xz(x+z-y)),$$

$$z \cdot (yz(y+z-x)) = x \cdot (xy(x+y-z)),$$
$$z \cdot (xz(x+z-y)) = y \cdot (yz(x+y-z)).$$

(ces égalités sont données par les trois déterminants de taille $2x2$ obtenus en considérant la matrice $\begin{pmatrix} \partial \Phi_{(x,y,z)} \\ \partial f_{(x,y,z)} \end{pmatrix}$)Rappelons que l'on suppose $x, y, z > 0$. La première égalité se réécrit (en simplifiant par z)

$$z(y-x)(y+x) = (x-y)(x^2+y^2).$$

Or si $y \neq x$ l'équation ci-dessus se simplifie en $z(y+x) = -(x^2+y^2)$ ce qui est basurde puisque $x, y, z > 0$. Par conséquent, on a nécessairement que $x = y$. En raisonnant de même avec léquation $z \cdot (yz(y+z-x)) = x \cdot (xy(x+y-z))$, on obtient $x = z$. Réciproquement, si $x = y = z$, alors il est aisé de vérifier que $\partial \Phi_{(x,y,z)}$ est colinéaire à $\partial f_{(x,y,z)}$.

Comme $(x, y, z) \in K$ on a alors $3x^2 = a^2$ d'où $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$. On a trouvé une seul maximum possible (note: on ne trouve pas de valeur correspondant au minimum, car celui-ci est atteint en des points où f n'est aps différentiable, c'est à dire $x = 0$, $y = 0$ ou $z = 0$)[1] On en déduit que le maximum de f vaut

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \frac{a}{9\sqrt{3}}.$$

.

c) Si $x = y = z = 0$, il n'y à rien à prouver. Sinon, on applique la question bf a) pour $a = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On en déduit alors que

$$f(|x|, |y|, |z|) = \frac{|\, xyz\,|}{(|\, x\,| + |\, y\,| + |\, z\,|)^2} \leqslant \frac{a}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{9\sqrt{3}}$$

ce qui donne immédiatement le résultat demandé.

[1] En toute rigueur, il faudrait justifier l'utilisation du théorème puisque f n'est pas différentiable en certains points de K. C'est possible car, comme $f((0,0,0)) = 0$,par continuité, le maximum est forcément atteint en un point situé dans $[\delta, a]^3$ où δ est un réel > 0.

Corrigé 2. Voir le polycopié du cours de Pierre Schapira. Il est bon de traiter des exemples concrets. Par exemple regardons le cas de la droite $D : 2x + y + 1 = 0$ et de la parabole $\mathcal{P} : y = 2x^2$. On cherche à minimiser la distance $\|(x, y) - (z, t)\|$ où $(x, y) \in D$ et $(z, t) \in \mathcal{P}$. Cela revient au même de minimiser $\|(x, y) - (z, t)\|^2 = (x - z)^2 + (y - t)^2$. Noter que $\|(x, y) - (z, t)\|$ n'a pas de maximum (puisque la parabole est non bornée). Enfin la distance est atteinte car $\|(x, y) - (z, t)\| \underset{max(\|(x,y)\|, \|(z,t)\|) \to +\infty}{\longrightarrow} \infty$, donc on peut se restreindre à un compact de $\mathbb{R}^4$ pour calculer cette distance.

On note $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la fonction $f(x, y, z, t) = (x - z)^2 + (y - t)^2$. On cherche donc le mimimum de f sur $D \times \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$. Il est clair que $D \times \mathcal{P} = \Phi_1^{-1}(\{0\}) \cap \Phi_2^{-1}(\{0\})$ où $\Phi_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sont définies par

$$\Phi_1(x, y, z, t) = 2x + y + 1, \qquad \Phi_2(x, y, z, t) = t - 2z^2$$

(Φ_1 est donnée par l'équation de D et Φ_2 par celle de $\mathcal{P}$). On note $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$. Les applications Φ_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il est clair que $\partial\Phi_{1(x,y,z,t)}$ et $\partial\Phi_{1(x,y,z,t)}$ sont linéairement indépendantes car

$$Jac(\Phi)_{(x,y,z,t)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2z & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 (considérer la matrice extraite en gardant les colonnes 2 et 4). On peut donc appliquer le théorème des multiplicateurs de Lagrange pour trouver d'éventuels extrema. Un extremum $(x, y, z, t) \in D \times \mathcal{P}$ doit vérifier que $\partial f_{(x,y,z,t)}$ est combinaison linéaire de $\partial\Phi_{1(x,y,z,t)}$ et $\partial\Phi_{1(x,y,z,t)}$. Autrement dit la matrice (de rang au moins 2 vu ci-dessus)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2z & 1 \\ 2(x - z) & 2(y - t) & -2(x - z) & -2(y - t) \end{pmatrix}$$

n'est pas de rang 3. Il faut donc que tous les déterminants (3×3) extraits de la matrice soient nuls. On obtient (après simplification) le système

$$\begin{aligned} 2(y - t) &= x - z \\ 2z(y - t) &= z(x - z) \\ -2z(y - t) &= (x - z) \end{aligned}$$

Si $z = 0$, on obtient $x = 0$ et $y = t$. Or $(0, y, 0, y) \in D \times \mathcal{P}$ implique $y + 1 = 0$ et $y = 0$ ce qui est absurde. On peut donc supposer $z \neq 0$ ce qui simplifie le système en

$$x = 2(y - t) + z \qquad (y - t)(2z + 1) = 0.$$

On conclut que $y = t$ et $x = z$ ou bien $z = -1/2$. Il est immédiat que $(x, y, x, y) \notin D \times \mathcal{P}$ (car $D \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Finalement le minimum ne peut être obtenu que pour $z =$

$-1/2$. Auquel cas l'équation $t = 2z^2$ donne $t = 1/2$. On en déduit $x = 2y-1-1/2$ et $2x + y + 1 = 0$ (car $(x, y) \in D$). D'où $x = -7/10$, $y = 2/5$. Comme (vu-ci dessus) on sait qu'un minimum global de f existe, le point $(-\frac{7}{10}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ est bien un minimum de f.

Conclusion: la distance de D à $\mathcal{P}$ est

$$\sqrt{f(-\frac{7}{10}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Corrigé 3. Soit $B(0, r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Puisque $B(0, r)$ est ouverte, une condition nécéssaire pour que (x, y, z) soit un extremum est $\partial f_{(x,y,z)} = 0$. On a

$$Jac(f)_{(x,y,z)} = 3 \begin{pmatrix} x^2 - y - z & y^2 - x & z^2 - x \end{pmatrix}.$$

Donc $\partial f_{(x,y,z)} = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 = y + z \\ x = y^2 \\ x = z^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y + z \\ x = y^2 \\ y = \pm z \end{cases}$$

Si $y = -z$, on obtient $x^2 = 0$ d'où $x = 0$ puis $y = z = 0$. Si $y = z$, on obtient $y^4 = x^2 = 2y$ ce qui donne $y = 0$ (auquel cas $x = z = 0$) ou $y = \sqrt[3]{2} = z$ (qui donne $x = \sqrt[3]{4}$). On a donc deux candidats extremums $(0, 0, 0)$ et $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$.

b) Pasons à la réciproque. On a

$$Hess(f)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & -1 & -1 \\ -1 & 2y & 0 \\ -1 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

qui n'est clairement pas inversible en $(0, 0, 0)$. Remarquons que $f(0, 0, 0) = 0$. Clairement $f(x, 0, 0) = x^3$ est du signe de x. Donc $(0, 0, 0)$ n'est pas un extremum local. On a $\det(Hess(f)_{(x,y,z)}) = 2y + 2z(4xy + 1) > 0$ en $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$. De plus $2\sqrt[3]{4} > 0$ et, pour $(x, y, z) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ on a $4xy + 1 = 9 > 0$ également. Tous les mineurs principaux de $Hess(f)_{(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})}$ sont > 0, donc $Hess(f)_{(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})}$ est définie postive et il suit que $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ est un minimum local (et $f(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) = -4$). Ce n'est pas un minimum global puisque $f(x, 0, 0) = x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Corrigé 4. Soit $f(x, y) = (\frac{1}{4} sin(x + y), 1 + \frac{2}{3} arctg(x - y))$

1) On a, pour tout $h, k \in \mathbb{R}^2$ et $x, y \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial f_{(x,y)} \cdot (h,k) = \left(\frac{h+k}{4} \cos(x+y), \frac{2h-2k}{3(1+(x-y)^2)} \right)$$

Il suit, en prenant $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ que

$$\|\partial f_{(x,y)} \cdot (h,k)\|_1 \leqslant |h| + |k| (\frac{11}{12}).$$

Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe, le théorème des accroissements finis implique que, pour tout (x,y), (x', y') on a

$$\|f(x,y) - f(x',y')\|_1 \leqslant \frac{11}{12} \|(x,y) - (x',y')\|_1$$

ce qui assure que f est contractante ($11/12 < 1$).

2) Comme $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, il est complet. Puisque f est contractante le théorème du point fixe donne la conclusion.

Corrigé 5.

a) D'après le théorème des accroissements finis (il s'applique puisque $\mathbb{R}^n$ est convexe), $\|Dg(x)\| \leqslant k$ pour tout point x de $\mathbb{R}^n$ implique

$$\|g(x) - g(y)\| \leqslant k\|x - y\|, \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Comme $k < 1$, g est contractante. Montrons que f est injective. Si $f(x) = f(y)$, alors $x - y = g(y) - g(x)$. Compte tenu de l'inégalité précédente, il vient

$$\|x - y\| \leqslant k\|x - y\|$$

Or $k < 1$, donc nécessairement $x = y$.

b) On dit que $\|f(x)\|$ tend vers l'infini lorsque $\|x\|$ tend vers l'infini si

$$\forall M > 0, \ \exists N > 0 \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| \geqslant N \Rightarrow \|f(x)\| \geqslant M$$

Ceci équivaut à: pour tout $M > 0$, il existe $N > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \ \|f(x)\| < M \Rightarrow \|x\| < N$$

Autrement dit l'image réciproque de la boule de rayon M est incluse dans la boule de rayon N. Il est facile de voir que ceci équivaut au fait que l'image de tout ensemble borné est borné.

Ceci étant, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a:

$$\|x - g(x)\| \geqslant \|x\| - \|g(x) - g(0)\| - \|g(0)\|$$

g étant k-lipschitzienne, il vient

$$\|f(x)\| \geqslant (1-k)\|x\| - \|g(0)\|.$$

Donc si $M > 0$, il suffit de poser $N = (M + \|g(0)\|)(1-k)^{-1}$. De sorte que $\|x\| \geqslant N$ implique

$$(1-k)\|x\| - \|g(0)\| \geqslant M,$$

et donc $\|f(x)\| \geqslant M$.

c) Soit $y \in \mathbb{R}^n$. On cherche x tel que $f(x) = y$, autrement dit $x = y - g(x)$. Donc x doit être un point fixe de $x \mapsto y - g(x)$. Cette application est contractante car g l'est. Le résultat découle alors du théorème du point fixe. Il est licite d'appliquer ce théorème puisque g est contractante et $\mathbb{R}^n$ est complet.

d) Il découle des questions précédentes que f est une bijection. Montrons que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$. f est différentiable car g l'est, de plus pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\partial f_{(x)} \cdot (u) = u + \partial g_{(x)} \cdot (u)$$

$\|\partial g_{(x)}\| \leqslant k$ implique $\|\partial g_{(x)} \cdot (u)\| \leqslant k\|u\|$ et donc $\|\partial f_{(x)} \cdot (u)\| \geqslant (1-k)\|u\|$. De cela on déduit immédiatement que $\partial f_{(x)}$ est injective, donc bijective d'après le théorème du rang. Il découle alors du théorème d'inversion locale que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (rappelons que la différentiabilité n'est qu'une question locale, contrairement à l'injectivité).

Corrigé 6. a) L'inégalité $\alpha\|x-y\| \leqslant \|f(x) - f(y\|)$ donne immédiatement que $f(x) = f(y)$ implique $x = y$, autrement dit f est injective.

b) On utilise la caractérisation des fermés par les suites. Soit (z_m) une suite convergente de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $f(\mathbb{R}^n)$. Montrons que sa limite z appartient à $f(\mathbb{R}^n)$. Par définition, z_m est de la forme $f(x_m)$. On cherche x tel que $f(x) = z$. Par hypothèse,

$$\alpha\|x_m - x_p\| \leqslant \|z_m - z_p\|$$

La suite (z_m) est convergente, donc vérifie le critère de Cauchy. D'après l'inégalité ci-dessus, il en est de même pour (x_m), qui est donc convergente. Soit x sa limite, f étant continue, $f(x) = z$.

c) Soit x et u dans $\mathbb{R}^n$ fixés. Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|t|\alpha\|u\| \leqslant \|f(x+tu) - f(x)\|$$

D'autre part, f étant différentiable,

$$f(x+tu) = f(x) + t\partial f_{(x)} \cdot (u) + to(1),$$

$o(1)$ désigant une fonction qui tend vers 0 lorsque $t \to 0$. On déduit alors de l'inégalité précédente que

$$|t|\alpha\|u\| \leqslant |t|(\|\partial f_{(x)} \cdot (u)\| + o(1))$$

On simplifie alors par $|t|$ (lorsque $t \neq 0$!), et on passe à la limite $t \to 0$, il vient

$$\alpha\|u\| \leqslant \|\partial f_{(x)} \cdot (u)\|$$

De cette inégalité on déduit que $\partial f_{(x)}$ est injective, donc inversible d'après le théorème du rang. D'après le théorème d'inversion locale, f est alors ouverte. Par conséquent $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert. Ainsi $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie non vide à la fois ouverte et fermée de $\mathbb{R}^n$ qui est connexe, donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, autrement dit f est surjective.

d) On a déjà montré que f était bijective et que sa différentielle était inversible en tout point, f est donc un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (comme dans l'exercice 5, le fait que f^{-1} soit différentiable est une propriété locale, en particulier découle du théorème d'inversion locale).

Corrigé 7.

1) Soit $h_1, \dots, h_{n-1} \in \mathbb{R}$ distincts et non nuls. Alors, la formule de Taylor à l'ordre $n-1$ (vérifier les hypothèses avant de l'appliquer) donne pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x+h_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} h_i^k f^{(k)}(x) + h_i^n R_i$$

où le reste R_i vérifie

$$R_i \quad \leqslant \quad \frac{1}{n!} h_i^n \sup_{t \in [x, x+h_i]} |f^{(n)}(t)| \leqslant \frac{1}{n!} \|f^{(n)}\|_\infty. \tag{1}$$

En particulier, en notant $y_i = f(x+h_i) - f(x) - h_i^n R_i$, on a un système linéaire de $n-1$ équations en les inconnues $f^{(k)}(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} h_1^k f^{(k)}(x) & = \; y_1 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} h_2^k f^{(k)}(x) & = \; y_2 \\ \vdots & \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} h_{n-1}^k f^{(k)}(x) & = \; y_n \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut

$$\det\left(\frac{1}{i!}h_i^j\right)_{i,j=1\dots n-1} = \left(\prod_{i=1}^{n-1}\frac{h_j}{i!}\right) VdM(h_1,\dots,h_{n-1})$$

où $VdM(h_1,\dots,h_{n-1})$ est la matrice de Van der Monde.[2] Comme les h_i sont tous distincts, ce déterminant est non nul et on peut résoudre le système (en utilisant les formules de Kramer) pour obtenir, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,k}\, y_i$$

où la matrice $M = \big(m_{i,j}\big)_{i,j=1\dots n-1}$ a ses coefficients qui sont des polynômes en $h_1,\dots,h_{n-1}$. Remarquons que l'inégalité (1) implique que

$$|y_i| \leqslant |f(x+h_i)| + |f(x)| + |h_i^n R_i| \leqslant 2\|f\|_\infty + \frac{1}{n!}\|f^{(n)}\|_\infty.$$

On en déduit (en choisissant les $h_i \leqslant 1$) que

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leqslant \sum_{i=1}^{n-1}|m_{i,k}|\left(2\|f\|_\infty + \frac{1}{n!}\|f^{(n)}\|_\infty\right).$$

En particulier $f^{(k)}$ est bornée.

2) Dans le cas particulier $n = 2$, les calculs de la question **a)** se simplifie en

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}R_1$$

d'où on déduit immédiatement $\|f'\|_\infty \leqslant \left(2\frac{\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f"\|_\infty}{2}\right)$. La fonction $h \mapsto \left(2\frac{\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f"\|_\infty}{2}\right)$ a un minimum en $h = 2\sqrt{\frac{\|f\|_\infty}{\|f"\|_\infty}}$. On obtient finalement

$$\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{\|f\|_\infty\|f"\|_\infty}.$$

[2] Rappel: $VdM(x_1,\dots,x_m) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^{m-1}\end{pmatrix}$. Il est bien connu que $\det\big(VdM(x_1,\dots,x_m)\big) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(x_j - x_i)$. En particulier, ce déterminant est non-nul si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.