TD de topologie et calcul différentiel– Feuille 8: Extremum et Théorème des accroissements finis

Groupe de TD 5

Exercice 1 (examen janvier 2008)**.** Soit f la fonction réelle définie sur $(\mathbb{R}^+)^3$ par

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{(x+y+z)^2} \text{ si } (x,y,z) \neq (0,0,0)$$
$$f(0,0,0) = 0$$

a) Montrer que f est continue et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(]0,+\infty[)^3$.

b) Soit $a > 0$. Montrer que f atteint son maximum sur

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 = a^2\},$$

et déterminer ce maximum.

c) Déduire de ce qui précède que, pour pour tous réels x,y,z, on a

$$\mid xyz \mid \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}(\mid x \mid + \mid y \mid + \mid z \mid)^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}.$$

Exercice 2. Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $ax+by+c=0$ et $\mathcal{P}$ une parabole d'équation $y = px^2$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance euclidienne. Calculer la distance de D à $\mathcal{P}$ en utilisant les multiplicateurs de Lagrange/Extremum liés.

Exercice 3. Soit $B(0,r)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon $r > 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer, en fonction de r, les éventuels extréma de la fonction $f : B(0,r) \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xy-3xz$.

b) Déterminer la nature des extréma trouvé(s) en **a)**.

Exercice 4. On veut montrer que le sytème

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}sin(x+y) \\ y = 1 + \frac{2}{3}arctg(x-y) \end{cases}$$

admet une unique solution.

1) En utilisant le théorème des accroissements finis, trouver une norme sur $\mathbb{R}^2$ telle que $(x,y) \mapsto \left(\frac{1}{4}sin(x+y), 1+\frac{2}{3}arctg(x-y)\right)$ soit contractante.

2) Conclure.

Exercice 5. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable telle que

$$\|Dg(x)\| \leqslant k$$

en tout x de $\mathbb{R}^n$ pour $k < 1$ et indépendant de x. Soit $f(x) = x + g(x)$.

a) Montrer que g est contractante. En déduire que f est injective.

b) Montrer que $\|f(x)\| \to \infty$ lorsque $\|x\| \to \infty$, autrement dit que l'image réciproque par f de tout ensemble borné est borné.

c) Montrer que f est surjective.

d) Montrer que f est un difféomorphisme.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel

$$\alpha\|x - y\| \leqslant \|f(x) - f(y)\|, \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

a) Montrer que f est injective.

b) Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.

c) Montrer que $Df(x)$ est inversible en tout point x de $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est surjective.

d) Montrer que f est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-fois différentiable. On suppose que f et la $n^{\text{ième}}$ différentielle $d^{(n)}f$ sont bornées.

1) En utilisant la formule de Taylor (reliant $f(x)$ à $f(x + h_i e_i)$ où $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$), montrer, pour tout $0 \leqslant p \leqslant n$, que $d^{(p)}f$ est bornée.

2) On suppose $n = 2$. montrer que

$$\|df\|_\infty \leqslant \sqrt{\|f\|_\infty \|d^{(2)}f\|_\infty}.$$